Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Peter Wölfle, Dr. Jan Brinckmann
http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre
theorie-b@tkm.uni-karlsruhe.de , theorie-a@tkm.uni-...

SS 2006

19.07.06

Klausur zur Vorlesung Theorie B SS 2006

Name:		**Vorname:**	
Matrikelnr.:		**Tutor oder Übungsgr.:**	
Semester:		**Lehramt ?**	

Wichtige Hinweise:

- **Studentenausweis bitte sichtbar bereitlegen.**

- **Bitte nur das gestellte Papier verwenden. Bei Mangel: Handzeichen geben.**
- **Bitte Namen auf jedes Blatt schreiben.**
- **Wer vor Ablauf der Zeit abgeben möchte: bitte Handzeichen geben.**
- **Dieses Deckblatt mit abgeben.**

- **Erlaubte Hilfsmittel: Schreibgerät.**
- **Handy ausschalten !!**

***** Formelsammlungen, Skripte, Rechner jeder Art sind NICHT zugelassen *****

Rückgabe von Klausur und Scheinen am Montag, 24.07.06 in den Übungsgruppen.

Die Aufgaben werden mit einem gesonderten Blatt ausgeteilt !

Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	Aufg.	Pkte	**Summe**	**Übung**	**Schein**
1		4		7		10				
2		5		8		11		von **20**	von **75**	**OP**
3		6		9		12				

OP = Klausur wird als erfolgreiche Orientierungsprüfung gewertet (nur 1.–3. Semester).

- Die einzelnen Aufgaben sind voneinander unabhängig und können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.
- Das Ergebnis einer Aufgabe braucht nicht (und kann nicht) in einer anderen Aufgabe verwendet werden!
- Die Formelsammlung auf der Rückseite ist natürlich unvollständig und muß durch die eigene Erinnerung ergänzt werden.

---

1 Für ein Teilchen im homogenen Magnetfeld lautet die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}})^2 + \frac{eB}{c}\,x\,\dot{y} \quad , \quad \mathbf{r} = (x,y,z) \quad , \quad m,e,B,c = const.$$

[1 P] Man bestimme die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\mathbf{r},\mathbf{p})$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

2 Gegeben sei die Hamiltonfunktion eines Teilchens,

$$\mathcal{H}(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p})^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\,y^2 + \omega_0\,y\,p_x \quad , \quad m,\omega_0 = const.$$

[2 P] Man bestimme über die Hamiltongleichungen die (gekoppelten) Bewegungsgleichungen für die Koordinaten $\mathbf{r} = (x,y,z)$.

3 Ein Fadenpendel mit einer explizit zeitabhängigen Masse $m(t)$ sei beschrieben durch die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{1}{2}m(t)\,l^2\,(\dot{\varphi})^2 + m(t)gl\cos(\varphi) \quad , \quad m(t) = m_0 e^{2\gamma t} \quad , \quad m_0,\gamma = const. \quad , \quad g,l = const.$$

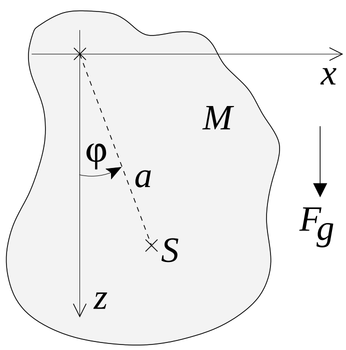
[1 P] Man bestimme die Bewegungsgleichung für kleine φ .

4 Ein System aus zwei gekoppelten Oszillatoren genügt den Bewegungsgleichungen

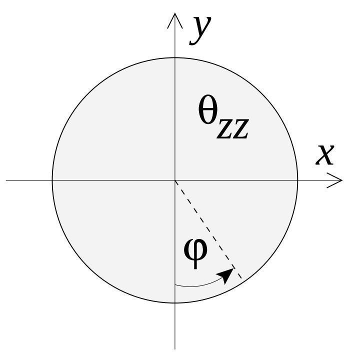
$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2(2q_1 - q_2) = 0 \quad , \quad \ddot{q}_2 + \omega_0^2(2q_2 - q_1) = 0 \quad , \quad \omega_0 = const.$$

[2 P] Man bestimme die Eigenfrequenzen $\Omega_1\,,\Omega_2$ des Systems über einen geeigneten Ansatz für $q_1(t)\,,q_2(t)$.

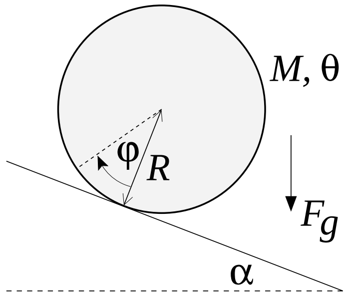
5 Gegeben ist ein starrer Körper der Masse M im Schwerefeld $\mathbf{F}_g$ der Erde. Der Körper wird von der y-Achse als Drehachse durchbohrt, kann also in der x-z-Ebene schwingen. Die Verbindungslinie vom Schwerpunkt S des Körpers zur Drehachse habe die Länge a .
[2 P] Man nehme an, der Körper sei aus kleinen Massenelementen m_i zusammengesetzt, und bestimme Betrag und Richtung des Drehmomentes $\mathbf{N}$ als Funktion des Drehwinkels φ .



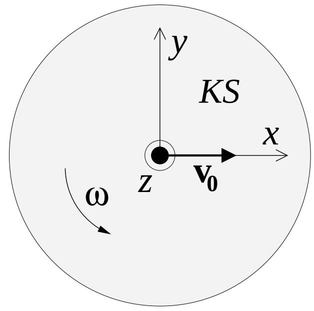
6 Eine Unruh (Rotationsfederpendel) besteht aus einem zylinderförmigen Körper, der um die z-Achse drehbar gelagert ist. Das Trägheitsmoment Θ_{zz} bezüglich dieser Achse sei bekannt. Für gegebenen Drehwinkel φ aus der Ruhelage bewirkt eine Feder (in der Skizze nicht eingezeichnet) ein Drehmoment $\mathbf{N} = -KR\varphi\,\mathbf{e}_z$, $K,R = const.$
[1 P] Bestimme die Bewegungsgleichung für $\varphi(t)$. Gebe die Schwingungsfrequenz ω_0 an.



Bitte wenden ⟹ ⟹



$\boxed{7}$ Ein zylinderförmiger Körper mit Radius R, Masse M und Trägheitsmoment Θ bezüglich der Zylinderachse rollt im Schwerefeld $\mathbf{F}_g$ eine schiefe Ebene mit Anstellwinkel α herunter.
[1.5 P] Man bestimme über die Lagrangefunktion die allgemeine Lösung $\varphi(t)$ für den Drehwinkel φ des Zylinders.



$\boxed{8}$ Eine Kreisscheibe in der x-y-Ebene rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Ein Beobachter auf der Scheibe im mitbewegten System KS stößt eine Punktmasse m zur Zeit $t = 0$ bei $\mathbf{r}(0) = 0$ mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(0) = v_0\, \mathbf{e}_x$ an. $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ beziehen sich auf KS. Äußere Kräfte sind nicht vorhanden.
[2.5 P] Berechne die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$, die der Bobachter in KS als Funktion der Zeit mißt. In der Bewegungsgleichung soll die Zentrifugalkraft vernachlässigt werden (dies ist für kleine t erlaubt).

$\boxed{9}$ Ein Hohlzylinder der Gesamtmasse M mit endlicher Wandstärke und inhomogener Massenverteilung in Längsrichtung sei beschrieben durch die Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \Gamma\, \boldsymbol{z}^2\, \Theta(L-z)\Theta(z)\, \Theta(r-[R-a])\Theta([R+a]-r) \quad , \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

mit $\Theta =$“Theta-Funktion” und $L, R, a = const.$
[1 P] Bestimme die Konstante Γ.
[1 P] Berechne das Trägheitsmoment Θ_{zz} bezüglich der körperfesten z-Achse.

$\boxed{10}$ Die Lagrangefunktion eines Teilchens sei gegeben,

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 + d(x^2+y^2) \quad , \quad \mathbf{r} = (x,y,z) \quad , \quad m, d = const.$$

[2 P] Für welche der Impulskomponenten $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ und Drehimpulskomponenten $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ldots = 0$? Beweise jeweils die Behauptung!

$\boxed{11}$ [1 P] Was ist ein Inertialsystem?

$\boxed{12}$ [0.5 P] Wie ist die Wirkung S definiert?
[0.5 P] Was besagt das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung?
[1 P] Was ist die Aussage des Noethertheorems? (ohne Formeln!)

Formelsammlung:

Hamilton: $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$

Starrer Körper: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_i = N_i \quad , \quad L_i = \sum_j \Theta_{ij}\omega_j \quad , \quad \Theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3 r\, \rho(\mathbf{r}) [\, |\mathbf{r}|^2 - x_i x_j\,]$

Im bewegten System KS: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) - m\, \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})$

“Theta-Funktion”: $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$