Theorie B (SS 2006)
Musterlösung **Nachklausur** 30.10.06

---

1 Impulse:

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\dot{s} \\
p_s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} + m\dot{x}
\end{aligned}
$$

`0.5 P`

Hamiltonfunktion:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= p_x\dot{x} + p_s\dot{s} - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2}M(\dot{s})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + m\dot{x}\dot{s} + \frac{1}{4}kx^4
\end{aligned}
$$

`0.5 P`

Geschwindigkeiten in $\mathcal{H}$ ersetzen: Summe und Differenz der Impulse bilden:

$$
(p_x - p_s) = m\dot{s} - M\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{s} = \frac{p_s - p_x}{M - m}}
$$

$$
(Mp_x - mp_s) = Mm\dot{x} - m^2\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{Mp_x - mp_s}{Mm - m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = \frac{\frac{M}{m}p_x - p_s}{M - m}}
$$

`1 P`

Damit folgt

$$
\mathcal{H}(x, s, p_x, p_s) = \frac{1}{2}M\left(\frac{p_s - p_x}{M - m}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\frac{M}{m}p_x - p_s}{M - m}\right)^2 + m\frac{(\frac{M}{m}p_x - p_s)(p_s - p_x)}{(M - m)^2} + \frac{1}{4}kx^4
$$

---

2 Lagrangegleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\,ml^2\dot\varphi\,] = -mgl\varphi$$

$$\Rightarrow \quad 2ml\dot{l}\dot\varphi + ml^2\ddot\varphi + mgl\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot\varphi + 2\frac{\dot l}{l}\dot\varphi + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

$$l(t) = l_0 e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \dot l = \alpha l_0 e^{\alpha t} = \alpha l(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot\varphi + 2\alpha\dot\varphi + \frac{g}{l_0}e^{-\alpha t}\varphi = 0}$$

`1 P`

---

3 Der folgende Ansatz funktioniert. (Wenn ein Ansatz nicht funktioniert, sollte man das weiter unten (be)merken!)

$$\boxed{q_l(t) = b_l e^{i\Omega t} \quad , \quad l = 1, 2}$$

`1 P`

Ansatz ableiten und einsetzen:

$$\ddot q_l(t) = -\Omega^2\, b_l\, e^{i\Omega t}$$

die $e^{\cdot}$-Faktoren fallen raus, es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten b_1, b_2,

$$\begin{aligned} -\Omega^2 b_1 + \omega_0^2(2b_1 - b_2) &= \Omega^2 b_2 \\ -\Omega^2 b_2 + \omega_0^2(2b_2 - b_1) &= \Omega^2 b_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} (\Omega^2 - 2\omega_0^2) & (\Omega^2 + \omega_0^2) \\ (\Omega^2 + \omega_0^2) & (\Omega^2 - 2\omega_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$$

`0.5 P`

Die Eigenfrequenz ergibt sich aus der Bedingung für eine nichttriviale Lösung,

$$\det(.) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - (\Omega^2 + \omega_0^2)^2 = 0$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \quad \Rightarrow$$

$$(\Omega^2 - 2\omega_0^2 - \Omega^2 - \omega_0^2)(\Omega^2 - 2\omega_0^2 + \Omega^2 + \omega_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3\omega_0^2)(2\Omega^2 - \omega_0^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \pm\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}}$$

`0.5 P`

Da man das Vorzeichen nicht zur Eigenfrequenz zählen würde, gibt es also nur eine, $\Omega_1 = |\Omega|$.

---

4 Die geeigneten Koordinaten sind natürlich Relativ- und Schwerpunktkoordinaten:

Relativ: $r = u_2 - u_1$ (genauso gut: $r = u_1 - u_2$)

Schwerpunkt: $s = \dfrac{mu_1 + mu_2}{m+m} = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_2)$ (genauso gut: $s = u_1 + u_2$)

`1 P`

Alte durch neue Koordinaten ausdrücken:

$$\begin{aligned} (r+2s) &= 2u_2 \\ (r-2s) &= -2u_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= s - \frac{1}{2}r \\ u_2 &= s + \frac{1}{2}r \end{aligned}$$

`0.5 P`

Einsetzen in die Lagrangefunktion:

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\underbrace{(\dot{s} - \frac{1}{2}\dot{r})^2 + (\dot{s} + \frac{1}{2}\dot{r})^2}_{2\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\dot{r}^2}] - \frac{D}{2}r^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}(r, s, \dot{r}, \dot{s}) = m(\dot{s})^2 + \frac{m}{4}(\dot{r})^2 - \frac{D}{2}r^2}$$

`0.5 P`

Mit Gesamt- und reduzierter Masse nimmt dies die übliche Form an:

$$M = 2m \ , \quad \mu = \frac{m \cdot m}{m+m} = \frac{m}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 - \frac{D}{2}r^2}$$

---

5 Über Lagrange:

$$T = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 \quad , \quad U = \frac{1}{2}Dx^2$$

x ist die (kleine) Auslenkung der Feder aus der Ruhelage. Für kleine x und φ ist $x = R\varphi$,

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\Theta(\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}DR^2\varphi^2$$

1 P

Lagrangegleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Theta\dot{\varphi}] = -DR^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{DR^2}{\Theta}}$$

0.5 P

Über den Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = \Theta\boldsymbol{\omega} = \Theta\dot{\varphi}\,\mathbf{e}_z$$

0.5 P

Das durch die Feder ausgeübte Drehmoment ist

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = R|\mathbf{F}|(-\mathbf{e}_z) \quad , \quad |\mathbf{F}| = Dx \approx DR\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = -\mathbf{e}_z\,DR^2\varphi$$

Die Richtung $-\mathbf{e}_z$ von $\mathbf{N}$ ergibt sich dadurch, daß für $\varphi > 0$ die rücktreibende Kraft $\mathbf{F}$ der Feder tangential in mathematisch negative Richtung zeigt. 1 P

Die Bewegungsgleichung steht in der Formelsammlung,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{L} = \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Theta\dot{\varphi}] = -DR^2\varphi$$

---

6 Die Annahme bedeutet, daß der "Stoß" zumindest teilweise inelastische sein muß. Das wird klar im Grenzfall $\alpha \to 90°$: Der Zylinder würde bei einem elastischen Stoß zurückprallen, die Annahme impliziert aber, daß er einfach stehen bleibt. In diesem Fall wird die kinetische Energie und der Schwerpunktimpuls komplett vernichtet (von der offenbar elastischen Rampe aufgenommen).

Im Allgemeinen, für $0 \leq \alpha \leq 90°$, kann also die Energie und der Schwerpunktimpuls *nicht* erhalten sein (außer im Grenzfall $\alpha = 0$). 1 P

Der Drehimpuls ist allerdings erhalten, genau genommen L_Q bezüglich des Punktes Q, denn die Rollbewegung des Zylinders um den Punkt Q (und in mathematische negativer Richtung, für $v > 0$) ist frei. Dies ist auch für $\alpha = 90°$ der Fall, nur ist dann $L_Q = 0$. 1 P

$\boxed{\mathbf{7}}$ Die Bewegungsgleichung für KS spezialisieren für

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 \quad , \quad \mathbf{F} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= -2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= -2\begin{pmatrix} -\omega\dot{y} \\ \omega\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega\dot{y} \\ -2\omega\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x} &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{1 P}}$

Mit der Annahme $\dot{y} \ll \omega x$ kann $2\omega\dot{y}$ gegen $\omega^2 x$ in der ersten Gleichung vernachlässigt werden.

$$\dot{y} \ll \omega x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \ddot{x} - \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} - \omega^2 y &= -2\omega\dot{x} \end{aligned}} \quad , \quad \ddot{z} = 0$$

$\boxed{\texttt{0.5 P}}$

Hintergrund: Für kleine Zeiten t ist die Geschwindigkeit der Masse noch klein, und der Ort in KS ungefähr durch $x(t) \approx x_0$, $y(t) \approx 0$ gegeben. Es kann aber *nicht* $\dot{x} \ll \omega y$ angenommen werden, da $\dot{x}$ und ωy beide klein sind!

Die Gleichung für x läßt sich offenbar direkt lösen: Exponentialansatz,

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \pm\omega} \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Mit den Anfangsbedingungen für x vereinfacht sich das noch,

$$x(0) = x_0 = A{+}B \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 = \omega(A{-}B) \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})}$$

$\boxed{\texttt{1 P}}$

Die Gleichung für y ist dieselbe, aber ergänzt um $\dot{x}$ als "externe Kraft" :

$$\dot{x}(t) = \frac{x_0\omega}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{y} - \omega^2 y = -x_0\omega^2(e^{\omega t} - e^{-\omega t})}$$

$\boxed{\texttt{0.5 P}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Hinreichend für die Erhaltung der Energie ist eine Lagrangefunktion, die *nicht* explizit von der Zeit abhängt.

Hinreichend für die Erhaltung einer Impulskomponente p_i ist eine Lagrangefunktion, die invariant ist unter räumlichen Verschiebungen $x_i \mapsto (x_i - a_i)$, $a_i = const.$ ((In diesem Fall liefert die Lagrangegleichung ja auch $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$.))

Hinreichend für die Erhaltung einer Drehimpulskomponente L_i ist eine Lagrangefunktion, die invariant ist unter Drehungen um die x_i-Achse, $\mathbf{r} \mapsto D_i(\varphi)\mathbf{r}$. ((Für einen Beweis kann man z.B. Polarkoordinaten einführen, wobei die x_i-Achse die Rolle der z-Achse übernimmt. Der Azimutwinkel φ ist dann zyklisch, und die Lagrangegleichung liefert $\dot{L}_i = 0$.))

Damit folgt sofort:

$\mathcal{L}_1$	:	E und L_x erhalten,	$\boxed{\texttt{1 P}}$
$\mathcal{L}_2$	:	nur E erhalten,	$\boxed{\texttt{1 P}}$
$\mathcal{L}_3$	:	$\mathbf{p}$ und $\mathbf{L}$ erhalten.	$\boxed{\texttt{1 P}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Mit der zeitabhängigen Kraft $\mathbf{F}(t) = F(t)\,\mathbf{e}_x$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 + x\,F(t) \quad ,$$

denn die Lagrangegleichung liefet so genau die Newtongleichung zurück:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\mathbf{r}} = F(t)\,\mathbf{e}_x \quad \Rightarrow \quad \surd$$

Genausogut läßt sich mit

$$\mathcal{L} = T - U \quad , \quad \mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U \quad \Rightarrow \quad U(\mathbf{r}, t) = -x\,F(t)$$

argumentieren. $\boxed{\texttt{1 P}}$

Ist die Kraft zusätzlich x-abhängig, liefern die Argumente von oben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) &= \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 + \int \mathrm{d}x\,F(x, t) + const. \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}})^2 + \int\limits_{x_0 = const.}^{x} \mathrm{d}x'\,F(x', t) \end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{1 P}}$