Musterlösung Klausur

Aufgabe 1:

(a) Hamiltonsches Prinzip: Die Bahnkurve eines Teilchens erfolgt so, dass die Wirkung $S[x(t)]$ extremal (d.h. stationär) wird.

Ist $x_0(t)$ die physikalische Bahn des Teilchens, so definieren wir

$X_\alpha(t) := x_0(t) + \eta_\alpha(t)$ mit $\eta_{\alpha=0}(t) = 0$, $\eta_\alpha(t_{1/2}) = 0$ (Ränder fest).

Damit wird die Variation von $x(t)$ zu

$$\delta x = X_{d\alpha}(t) - x_0(t) = \left(\frac{\partial \eta_\alpha(t)}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha .$$

Für die Variation der Wirkung gilt somit

$$\delta S = S[X_{d\alpha}(t)] - S[x_0(t)] = \left(\frac{dS(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L(x_{d\alpha}, \dot{x}_{d\alpha}, t) - L(x_0, \dot{x}_0, t)\right] \underset{(1P)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha \quad (1P)$$

$$\left[\text{Es gilt: } \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\Big|_{t_1}^{t_2}\right)_{\alpha=0} d\alpha + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}_{=\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \alpha}}\right]_{\alpha=0} d\alpha \quad (1P)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0,\ \text{da } \delta x(t_{1/2})=0} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x \overset{!}{=} 0 \quad (1P)$$

Für beliebige Variation δx muss somit die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (1P)$$

erfüllt sein. / (5P)

(b) Die Lagrangefunktion $L(\theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + mgl\cos\theta$ hängt nicht explizit von x ab $\rightarrow$ x ist zyklische Koordinate.

Bewegungskonstante: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}(M\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta) = 0 \Rightarrow M\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta = \text{Konst.}$ (1P)

Es gilt: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ (1P)

/ (2P)

(c) Energieerhaltung folgt aus der Homogenität der Zeit:

L ist invariant unter der Symmetrietransformation $t' = t + \varepsilon$. (1P)

Impulserhaltung folgt aus der Homogenität des Raumes:

L ist inv. unter räumlichen Translationen $\vec{r}\,' = \vec{r} + \varepsilon\vec{a}$ (1P)

Drehimpulserhaltung folgt aus der Isotropie des Raumes:

L ist invariant unter Drehungen $\vec{r}\,' = \vec{r} + \varepsilon(\vec{\omega} \times \vec{r})$ (1P)

/ (3P)

(d) Eine Transformation $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ mit $H(q_i, p_i) \to \bar{H}(Q_i, P_i)$ ist kanonisch, wenn

$\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_j} = \dot{Q}_j$ und $\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_j} = -\dot{P}_j$ gilt.

/ (2P)

(e) $(\vec{L})_i = (\vec{r} \times \vec{p})_i = \sum_{\ell m} \epsilon_{i\ell m} q_\ell p_m$

$$\{L_i, p_j\} = \sum_k \Big(\frac{\partial L_i}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{=\delta_{jk}} - \frac{\partial L_i}{\partial p_k} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \Big) = \sum_{k,\ell m} \epsilon_{i\ell m} \underbrace{\frac{\partial (q_\ell p_m)}{\partial q_k}}_{=p_m \delta_{\ell k}} \delta_{jk} = \sum_m \epsilon_{ijm} p_m$$

/ (4P)

(f) Es gilt: $\frac{d\vec{V}}{dt} = \{\vec{V}, H\} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ (1P)

Der Runge-Lenz-Vektor $\vec{V}$ ist eine Erhaltungsgröße. $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$

$\to \{\vec{V}, H\} = 0$. (1P)

/ (2P)

Aufgabe 2:

(a) Die Bewegungsgleichungen

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_1}{\partial q} = 2\ddot{q} - 2q = 0$ (1P)

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_2}{\partial q} = 2(\dot{q} + \ddot{q}) - 2(q + \dot{q}) = 2\ddot{q} - 2q = 0$ (1P)

sind identisch.

Es ist $L_2 - L_1 = 2q\dot{q} = \frac{d}{dt} q^2$ (1P)

/ (3P)

(b) Aus der Hamiltonfunktion $H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$

folgen die Bewegungsgleichungen:

(i) $\frac{\partial H}{\partial p_1} = q_1 = \dot{q}_1$ (ii) $\frac{\partial H}{\partial q_1} = p_1 - 2 a q_1 = -\dot{p}_1$

(iii) $\frac{\partial H}{\partial p_2} = \dot{q}_2 = -q_2$ (iv) $\frac{\partial H}{\partial q_2} = -p_2 + 2 b q_2 = -\dot{p}_2$ 4P

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} K = \frac{(\dot{p}_2 - b\dot{q}_2) q_1 - (p_2 - b q_2)\dot{q}_1}{q_1^2} \overset{(i)}{\underset{(iv)}{\overset{(iii)}{=}}} \frac{1}{q_1^2}\left[(p_2 - 2bq_2 + bq_2) q_1 - (p_2 - b q_2) q_1\right]$$

$$= 0$$ 1P

/5P

Aufgabe 3:

(a) Das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse durch S ist

$$\Theta_S = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a d\varrho\, \varrho\, \varrho_0 \underbrace{(x^2 + y^2)}_{= \varrho^2} \text{ 1P} = \varrho_0 h 2\pi \frac{a^4}{4} \underset{M = \varrho_0 a^2 \pi h}{=} \frac{1}{2} M a^2$$ 1P

Das Trägheitsmoment bezüglich O ergibt sich aus dem Steinerschen Satz:

$$\Theta_0 = \Theta_S + M l^2 = M\left(l^2 + \frac{1}{2} a^2\right)$$ 1P

/4P

(b) Es ist $T = T_{rot} = \frac{1}{2}\Theta_0 \dot{\theta}^2$ 1P

und $V = Mgz = -Mgl\cos\theta$ 1P

$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}\Theta_0 \dot{\theta}^2 + Mgl\cos\theta$ 1P

Euler-Lagrange-Gl.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \Theta_0 \ddot{\theta} + Mgl\sin\theta = 0$ 1P

Für kleine Auslenkungen $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$ 1P

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgl}{\Theta_0}\theta = 0$ 1P

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Mgl}{\Theta_0}} = \sqrt{\frac{g}{l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{l^2}\right)}}$ 1P ist die Frequenz der Oszillation um den Punkt O.

/7P

Aufgabe 4:

(a) Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot\phi_1^2 + \dot\phi_2^2) = \frac{1}{2} (\dot\phi_1, \dot\phi_2) \overbrace{\begin{pmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix}}^{\equiv \mathcal{M}} \begin{pmatrix} \dot\phi_1 \\ \dot\phi_2 \end{pmatrix}. \quad (1P)$$

Für die Federlänge D gilt:

$$D^2 = [(d + l \sin\phi_2) - l \sin\phi_1]^2 + [l\cos\phi_2 - l\cos\phi_1]^2 \approx [d + l(\phi_2 - \phi_1)]^2 \quad (1P)$$

$$\Rightarrow \Delta D = D - d \approx l(\phi_2 - \phi_1) \quad (1P)$$

Die potentielle Energie setzt sich aus der Energie im Gravitationsfeld und der Federspannung zusammen:

$$V_{grav} = mgl(1 - \cos\phi_1 + 1 - \cos\phi_2) \quad (1P) \approx \frac{1}{2} mgl(\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (1P)$$

$$V_{Feder} = \frac{1}{2} k \Delta D^2 \approx \frac{1}{2} k l^2 (\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (1P)$$

Es ist $L = T - (V_{grav} + V_{Feder})$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} = ml^2 \ddot\phi_1 + mgl\phi_1 + kl^2(\phi_1 - \phi_2) = 0 \quad (1P)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} = ml^2 \ddot\phi_2 + mgl\phi_2 - kl^2(\phi_1 - \phi_2) = 0 \quad (1P)$$

gekoppelte Schwingungsgleichungen

/ 8P

(b) Es ist

$$V = V_{grav} + V_{Feder} = \frac{1}{2}(\phi_1, \phi_2) \overbrace{\begin{pmatrix} mgl + kl^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 \end{pmatrix}}^{\equiv \mathcal{U}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

Die Eigenfrequenzen werden durch $\det(\mathcal{U} - \omega^2 \mathcal{M}) \overset{!}{=} 0$ (1P) bestimmt.

$$\det \begin{pmatrix} mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 & -kl^2 \\ -kl^2 & mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2 \end{pmatrix} = (mgl + kl^2 - \omega^2 ml^2)^2 - (kl^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega^4 - 2\omega^2 \frac{mg + kl}{ml} + \frac{2gk}{ml} + \frac{g^2}{l^2} \Rightarrow \omega_{1/2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

Also: $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$, $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$ (1P)

Die erste Eigenschwingung ist die gleichphasige Schwingung mit $\phi_1 = \phi_2$. Die zugehörige Frequenz ist die gleiche wie beim freien Pendel, da die Feder nicht ausgelenkt wird. (1P)

Die zweite Eigenschwingung ist die gegenphasige Schwingung mit $\phi_1 = -\phi_2$. Hier schwingt das System schneller, da eine rücktreibende Kraft von der Feder ausgeübt wird. (1P)

/ 5P