Theoretische Physik B

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. D. Seidel
www-ttp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/

SS 08 – Nachklausur
Bearbeitungsdauer: 2 Stunden

Name:	Gruppe:

Matrikelnummer:	Note: ja/nein

Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Die Rückgabe der Klausur erfolgt am Dienstag, den 16.09.08 zwischen 11:00 Uhr und 12:00 Uhr im Seminarraum 6.1.

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$
Punkte:	11	15	12	12	50

Aufgabe 1 **11 Punkte**

Ein Fahrzeug ist mit der Menge J Treibstoff betankt. Der Treibstoffverbrauch pro Zeiteinheit betrage

$$\frac{df}{dt} = av + b\dot{v}^2,$$

wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Fahrzeugs ist (a, b sind positive Konstanten). Zu Beginn der Fahrt sei $v(0) = 0$. Bestimmen Sie dasjenige $v(t)$, für welches die zurückgelegte Distanz D bei vorgegebener Zeit T maximal wird.

Hinweis: Bestimmen Sie das Funktional $D[v]$, welches die zurückgelegte Distanz wiedergibt. Die Nebenbedingung können Sie durch folgenden Trick einbauen: Fordern Sie für einen beliebigen Parameter λ stationäres Verhalten des Funktionals $\tilde{D}[v] := D[v] + \lambda \left(J - \int \frac{df}{dt} dt \right) \equiv \int dt F(v, \dot{v}, t)$. Die Lösung $v(t)$ des Variationsproblems $\delta\tilde{D}[v] = 0$ hängt vom Parameter λ ab. Wählt man diesen so, dass die Nebenbedingung erfüllt ist, so hat man die Variationsaufgabe $\delta D[v] = 0$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingung gelöst. Beachten Sie, dass die Formel für den Treibstoffverbrauch nur für positive Geschwindigkeiten sinnvoll ist. Da der Wert von $v(T)$ nicht vorgegeben ist, müssen Sie zusätzlich $\frac{dF}{d\dot{v}}(T) = 0$ fordern.

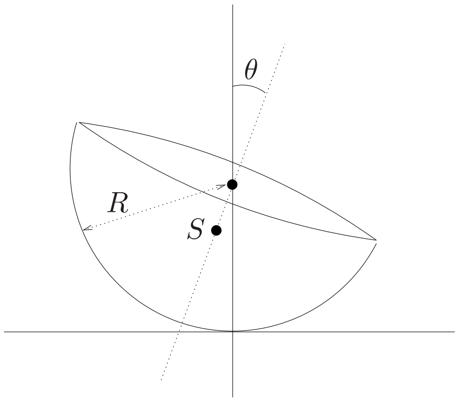
Bitte wenden

Aufgabe 2 **15 Punkte**

Eine auf einer horizontalen Ebene liegende starre Halbkugel (konstante Massendichte, Gesamtmasse M, Radius R) werde so angestoßen, dass sie im konstanten Schwerefeld eine ebene Schaukelbewegung ausführt, wobei sie auf der Ebene ohne zu gleiten abrollt.

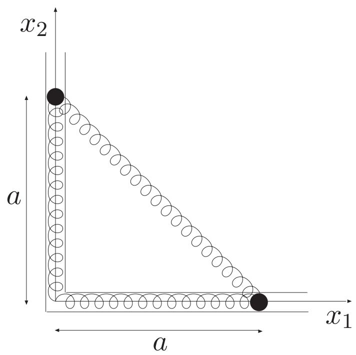
(a) **[6P]** Finden Sie die Lage des Schwerpunkts im körperfesten Bezugsystem, dessen Ursprung im Zentrum der Kugel liegt (siehe Abbildung). Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt, die auf der Symmetrieachse der Halbkugel senkrecht steht.

(b) **[9P]** Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung auf und bestimmen Sie die Frequenz von kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage.



Aufgabe 3 **12 Punkte**

Gegeben sei folgendes System: Zwei Massenpunkte gleicher Masse m sind so angebracht, dass sich der eine nur in x_1-Richtung und der andere dazu senkrecht nur in x_2-Richtung bewegen kann. Die Massen sind mit dem Ursprung mit zwei Federn der unausgelenkten Länge a verbunden, sowie diagonal untereinander mit einer Feder der unausgelenkten Länge $\sqrt{2}a$. Die sich ergebene Ruhelage der Massen ($x_1 = a, x_2 = a$) ist somit stabil. Alle drei Federn besitzen die gleiche Federkonstante k. Es wirken keine äußeren Kräfte. Reibungskräfte sollen unberücksichtigt bleiben.



(a) **[3P]** Stellen Sie die Lagrangefunktion in den Koordinaten $\eta_i \equiv x_i - a$ auf.

(b) **[4P]** Entwickeln Sie die Lagrangefunktion bis zur zweiten Ordnung in den kleinen Auslenkungen $|\eta_i| \ll a$ und leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.
(*Hinweis*: $\sqrt{1 \pm u} = 1 \pm \frac{u}{2} + \mathcal{O}(u^2)$ für $u \ll 1$)

(c) **[5P]** Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

Aufgabe 4 **12 Punkte**

(a) **[5P]** Leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen her. Der Einfachheit halber können Sie ein System mit einem Freiheitsgrad betrachten.

(b) **[7P]** Die Hamiltonfunktion eines Systems sei

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q^2} + p^2 q^4\right).$$

Geben Sie die kanonischen Gleichungen an. Suchen Sie dann eine kanonische Transformation mit $F_1(q,Q)$, so dass die neue Hamiltonfunktion $H'(Q,P)$ die Form eines harmonischen Oszillators hat und zeigen Sie, dass die Lösung der Bewegungsgleichung in den transformierten Variablen (ausgedrückt durch q und p) tatsächlich die ursprünglichen Hamiltonschen Gleichungen erfüllt.