Universität Karlsruhe **Sommersemester 2009**

Klassissche Theoretische Physik II (Theorie B)

V: PD. Dr. M. Eschrig
Ü: Dr. habil. W. Lang

Klausur, 14. September 2009, 10.00 - 12.00 Uhr

Name: **Matrikelnummer:** **B/D/L:**

1	**2**	**3**	
			$\Sigma\ =$

Allgemeine Hinweise:

Zunächst bitte das Deckblatt (Name, Matr.nr., Studienrichtung Bachelor B, Diplom (auch Mathematik) D oder Lehramt L) ausfüllen. Bitte Studienausweis auslegen.

Die Gesamtpunktzahl der aus **d r e i Aufgaben** bestehenden Klausur beträgt **27 Punkte**. Ein Schein wird vergeben, wenn in der Klausur **12** oder mehr Punkte erreicht werden und **118.5** oder mehr Punkte in den Übungsblättern Nr. 1 - 12 erreicht wurden.

Die Noten für Teilnehmer im Bachelor-Studiengang werden später aus der Punkteverteilung bestimmt.

Die Punktzahlen für die Teilaufgaben sind am Ende jeder Aufgabe angegeben.

Hilfsmittel: Zwei eigenhändig beschriebene (nicht kopierte) Din-A4 Seiten.

Bitte Mobiltelephone ausschalten und wegpacken!

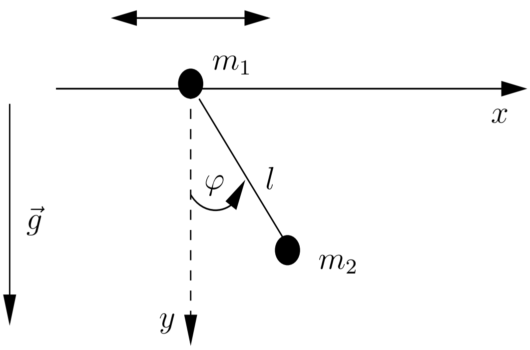
Nur ausgegebenes Papier verwenden. Bei Bedarf melden.

Zum Schluß ausgefülltes Deckblatt, Aufgabenblätter und Ausarbeitung (alle beschriebenen Blätter) abgeben.

Fortsetzung mit **Aufgabe 1** auf Seite - 2 -

Aufgabe 1: Pendelnde Hantel auf Schiene **8 Pkte.**

Die Punktmasse m_1 am einen Ende einer Hantel der Länge l (Hantelstange masselos gedacht) bewege sich reibungsfrei längs einer horizontalen Geraden ($x-$Achse), während die Punktmasse m_2 am anderen Ende unter dem Einfluß des homogenen Erdschwerefeldes $\vec{g} = g\,\overrightarrow{e_y}$ in einer $(x, y)-$Ebene schwinge. Siehe Abbildung.



a) Geben Sie die Zwangsbedingungen für die kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der beiden Massenpunkte m_1 und m_2 an. Die Zwangsbedingungen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ sind offensichtlich und werden im Weiteren nicht betrachtet. Welches ist die Zahl f der Freiheitsgrade? Wählen Sie als verallgemeinerte Koordinaten x_1 und φ, und zeigen Sie, dass damit die Zwangsbedingungen identisch erfüllt werden.

b) Schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion L in den verallgemeinerten Koordinaten x_1 und φ auf. Es gibt eine zyklische Variable, welche? Wie sieht die zugehörige Erhaltungsgröße aus? Gibt es eine weitere Erhaltungsgröße in diesem Beispiel? Wenn ja, welche?

c) Als Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ nimmt man:

$$x_1(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = -\frac{m_2\, l}{m_1 + m_2}\,\omega_0, \quad \text{mit } \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

Berechnen Sie damit die Erhaltungsgröße zu der zyklischen Variablen und integrieren Sie sie, um eine Beziehung zwischen $x_1(t)$ und $\varphi(t)$ zu erhalten.

Zeigen Sie (ohne die *Euler-Lagrange*-Gleichung zu der nichtzyklischen Variablen zu verwenden), dass sich der Massenpunkt m_2 immer auf einer Ellipse (einem Teil einer Ellipse) bewegt. Geben Sie den Mittelpunkt M und die beiden Hauptachsen dieser Ellipse an.

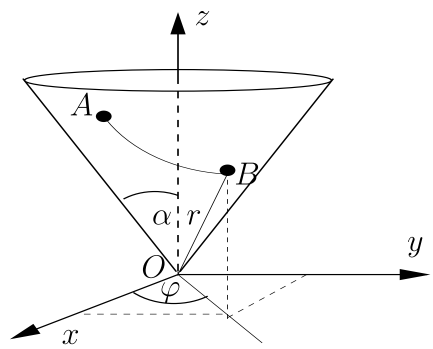
Bemerkung: Die *Euler-Lagrange*-Gleichung für die nichtzyklische Variable könnte aufgeschrieben werden und für kleine Schwingungen auch gelöst werden, aber das soll hier nicht getan werden.

2 + 2 + 4 = 8 Pkte.

Fortsetzung mit **Aufgabe 2** auf Seite - 3 -

Aufgabe 2: Variationsaufgabe: Geodäte auf Kreiskegelmantel **9 Pkte.**

Gesucht wird die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten A und B auf dem Mantel eines Kreiskegels mit halbem Öffnungswinkel α. Verwenden Sie als Koordinaten eines Punktes P auf dem Mantel des Kegels $r := \overline{OP}$ (in der Skizze für $P = B$ angedeutet) und den ebenen Polarwinkel φ.



a) Schreiben Sie die kartesischen Koordinaten (x, y, z) von P in diesen beiden Variablen r und φ auf. Zeigen Sie, dass das Lininienelementquadrat

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2\, (sin\, \alpha)^2$$

ist.

b) Gesucht ist das passende Funktional J für dieses Geodätenproblem von A nach B. Als A und B verbindende Kurve auf dem Kegelmantel kann man (bis auf Ausnahmen, die hier nicht betrachtet werden sollen) eine Funktion $r = r(\varphi)$ ansetzen. Schreiben Sie für das Punktepaar A und B das Funktional $J[r] = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi\, F(r, r', \varphi)$ auf.

c) Für das Funktional $J[r]$ ist die Voraussetzung eines in den Übungen bewiesenen Satzes erfüllt: Falls die Funktion F nicht explizit von der Integrationsvariablen abhängt, folgt aus der *Euler*-Gleichung (geschrieben für diesen Fall):

$$F(r, r') - r' \frac{\partial F(r, r')}{\partial r'} = C = const.$$

Verwenden Sie diesen Satz und schreiben Sie die Gleichung für r' auf. Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen (siehe *Hinweis*). Die Konstanten werden im Prinzip aus dem Start- bzw. Endpunkt, A bzw. B, der Geodäten (Extremalen) bestimmt (hier nicht von Interesse).

Hinweis: $\int dx \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$. Um die Bedingung $x^2 > 1$ braucht man sich in dieser Aufgabe nicht zu kümmern.

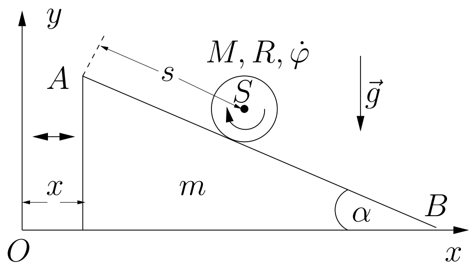
d) Welche Geodäte verbindet die Punkte A und B mit $r_A = r_B = r_0$ und $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{\pi}{2}$?

2 + 2 + 3 + 2 = 9 Pkte.

Fortsetzung mit **Aufgabe 3** auf Seite - 4 -

Aufgabe 3: Rollende Kugel auf gleitender schiefer Ebene **10 Pkte.**

Auf einem keilförmigen starren Körper (Masse m, Winkel α, Länge $\overline{AB} = l$), der reibungsfrei längs einer horizontalen $x-$Achse gleiten kann, rollt im homogenen Erdschwerefeld (g) eine homogene Kugel (Masse M, Radius R), so dass sie nicht gleitet und ihr Schwerpunkt S sich in einer $(x, y)-$Ebene bewegt. Siehe Abbildung.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ der Kugel bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt S.

b) Bestimmen Sie die *Lagrange*-Funktion L, geschrieben in den verallgemeinerten Koordinaten x (Keilabstand von der $y-$Achse) und s (zurückgelegte Strecke der Kugel auf der schiefen Ebene). Gibt es zyklische Koordinaten? Falls ja welche?

Hinweis: Der Keilschwerpunkt hat im raumfesten System $(0, x, y)$ die Koordinaten $(x + x_{\text{Keil}}, y_{\text{Keil}})$. Da aber nur die kinetische Energie des Keils wichtig ist, also Zeitableitungen, ist die konstante Koordinate $(x_{\text{Keil}}, y_{\text{Keil}})$ nicht von Interesse.

c) Schreiben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen auf.

d) Bestimmen Sie die Beschleunigungen $\ddot{s}$ und $\ddot{x}$. Testen Sie die beiden Vorzeichen.

2 + 3 + 2 + 3 = 10 Pkte.

Ende der Aufgaben