Universität Karlsruhe **Sommersemester 2009**

Klassissche Theoretische Physik II (Theorie B) **V: PD. Dr. M. Eschrig**
Ü: Dr. habil. W. Lang

Lösungen der Klausur vom 14. September 2009

Aufgabe 1: Pendelnde Hantel auf Schiene 8 Pkte.

a) [2 Pkte.] Triviale Zwangsbedingungen: $z_1 = 0 = z_2$.

$$\mathbf{A_1 : \ y_1 = 0, \quad A_2 : \ (x_1 - x_2)^2 + y_2^2 - l^2 = 0} \ .$$

Freiheitsgrade: $f = 2 \cdot 3 - 4 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$. Erste Version mit den trivialen Zwangsbedingungen.

Dies sind holonome (weil keine Zeitableitungen auftreten) und skleronome (weil keine explizite Zeitabhängigkeit vorkommt) Zwangsbedingungen.

$f = 2$ verallgemeinerte Koordinaten: x_1 und φ. D.h. x_1, $x_2 = x_1 + l \sin\varphi$, $y_1 = 0$, $y_2 = l \cos\varphi$. Damit ist auch die Zwangsbedingung A_2 identisch erfüllt nach Einsetzen.

b) [2 Pkte.] $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$, $T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$. Differenzieren und Ausmultiplizieren:
$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2 l \cos\varphi \, \dot{x}_1 \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$.
Potential mit Nullpunkt auf Höhe der $x-$Achse: $U = U_2 = -m_2 g l \cos\varphi$.

$$\begin{aligned}\mathbf{L(x_1, \boldsymbol{\varphi}, \dot{x}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}})} = \quad & \mathbf{T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_2 l \cos\boldsymbol{\varphi} \, \dot{x}_1 \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\boldsymbol{\varphi}}^2} \\ & \mathbf{+ m_2 g l \cos\boldsymbol{\varphi}}.\end{aligned}$$

Zyklische Variable ist x_1, mit dem verallgemeinerten Impuls
$p_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \cos\varphi \, \dot{\varphi} = \hat{C} = const.$
(Der Impuls in x_1-Richtung ist erhalten, weil das System translationsinvariant in dieser Richtung ist). Eine weitere Erhaltungsgröße ist die Energie $E = T + U$, da L nicht explizit von der Zeit abhängt (homogen in t ist).

c) [4 Pkte.] Erhaltungsgröße von oben p_{x_1}: $\dot{x}_1 = C - \frac{m_2 l \cos\varphi}{m_1 + m_2} \dot{\varphi}$ mit neuer Konstanten $C := \frac{\hat{C}}{m_1 + m_2}$. Integriere unbestimmt (oder bestimmt) über t:

$$x_1 = C t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \int dt \, \dot{\varphi} \cos\varphi + const.$$

$$x_1 = C t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \int d\varphi \cos\varphi + const.$$

$\mathbf{x_1 = C t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin\boldsymbol{\varphi} + A}$, mit zwei Konstanten $\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}$.

Anfangsbedingungen der Ableitungen, wie in der Aufgabe angegeben führen in p_{x_1} zur Bestimmung der Konstanten $C = 0$. Aus $x_1(0) = 0$ und $\varphi(0) = 0$ findet man dann auch $A = 0$. Damit ist die Lösung für x_1: $\mathbf{x_1(t) = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin\boldsymbol{\varphi}}$. Und für x_2 hat man

$\mathbf{x_2(t) = x_1(t) + l \sin\boldsymbol{\varphi}(t) = l \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sin\boldsymbol{\varphi}(t)}$. $\quad \mathbf{y_2(t) = l \cos\boldsymbol{\varphi}(t)}$.

Fortsetzung mit **Lösung der Aufgabe 1** auf Seite - 2 -

Also findet man als Ort des Massenpunktes m_2 die Parameterdarstellung einer Ellipse (je nach Laufbereich von φ, einen Teil der Ellipse) mit Ursprung O und Halbachsen a und b:

$$\mathbf{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1}, \text{ mit } \mathbf{a := l \frac{m_1}{m_1 + m_2}} \text{ und } \mathbf{b = l}\,.$$

Nicht gefragt war die *Euler-Lagrange*-Gleichung für φ (nichtzyklisch):

$$0 = \frac{d}{dt}\left(m_2\, l \cos\varphi\, \dot{x}_1 + m_2\, l^2\, \dot{\varphi}\right) - \left(-m_2\, l\, \dot{x}_1\, \dot{\varphi}\sin\varphi - m_2\, g\, l \sin\varphi\right)$$

$$\mathbf{l\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \cos\boldsymbol{\varphi}\,\ddot{x}_1 + g\sin\boldsymbol{\varphi} = 0}\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung war auch nicht gefragt. Nach Differentiation der Gleichung für $\dot{x}_1$ von oben, erhält man, in der Näherung für kleine Auslenkungen φ:

$\mathbf{\ddot{x}_1 = -\frac{m_2\, l}{m_1 + m_2}\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}}}$. Das führt zum Ergebnis: $\boldsymbol{\ddot{\varphi} + \omega^2\,\varphi = 0}$ mit $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\mathbf{\frac{g}{l}\,\frac{m_1 + m_2}{m_1}}}$.

Die Lösung ist also: $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t}) + \boldsymbol{\beta}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{t})$ mit Konstanten $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$.

Fortsetzung mit **Lösung zur Aufgabe 2** auf Seite - 3 -

Aufgabe 2: Variationsaufgabe: Geodäte auf Kegelmantel **9 Pkte.**

a) [2 Pkte.] In Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) mit $r = \dfrac{\rho}{\sin\,\alpha}$ und $\cos\,\alpha = \dfrac{z}{r}$ ergibt sich

$$\mathbf{x = r \cos\boldsymbol{\varphi} \sin\boldsymbol{\alpha}, \quad y = r \sin\boldsymbol{\varphi} \sin\boldsymbol{\alpha}, \quad z = r\cos\boldsymbol{\alpha}}\ .$$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dr\,\cos\,\varphi\,\sin\,\alpha - r\,\sin\,\alpha\,\sin\,\varphi\,d\varphi)^2 + (dr\,\sin\,\varphi\,\sin\,\alpha + r\,\sin\,\alpha\,\cos\,\varphi\,d\varphi)^2 + (dr\,\cos\,\alpha)^2$. Ausmultipliziert und $(\cos\,\varphi)^2 + (\sin\,\varphi)^2 = 1$ verwendet ergibt die Behauptung: $\mathbf{ds^2 = dr^2 + r^2\,d\boldsymbol{\varphi}^2\,(\sin\boldsymbol{\alpha})^2}$.

b [2 Pkte.] Für solche Verbindungskurven zwischen A und (davon verschiedenem) B, für die man eine (eindeutige) Funktion $r = r(\varphi)$ hat, kann man schreiben $ds = d\varphi\sqrt{r^2(\varphi)\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2(\varphi)}$.

(Nicht für alle Verbindungskurven zwischen A und B wird ein $\varphi-$Wert auf nur ein $r-$Wert abgebildet. Z. B. wenn A und B so liegen, dass sie durch eine Gerade auf dem Mantels verbindbar sind. Diese Gerade geht dann durch den Ursprung, und sie liefert sicher eine Geodäte (siehe Teil **d)**). Oder andere Kurven, die sich z. B. selber schneiden. Dann ist $r \mapsto \varphi$ mehrdeutig, also keine Funktion. Der Fall, wenn A und B auf einer Geraden durch den Ursprung liegen, sollte also getrennt behandelt werden, z. B. mit Funktionen $\varphi = \varphi(r)$.)

Minimiert (bzw. extremalisiert) werden soll die Länge der A und B verbindenden Kurve auf dem Kegelmantel.

$$J[r] = \int_A^B ds = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi\,\sqrt{r^2(\varphi)\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2(\varphi)}\ .$$

Also $F(r, r', \varphi) = F(r, r') = \sqrt{r^2\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2}$.

c) [3 Pkte.] Der angegebene Satz aus den Übungen zeigt:

$$\sqrt{r^2\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2} - r'\,\frac{2\,r'}{2\sqrt{r^2\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2}} = C = const.$$

D.h. $\dfrac{r^2\,(\sin\,\alpha)^2}{\sqrt{r^2\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2}} = C$; d.h. $\sqrt{r^2\,(\sin\,\alpha)^2 + r'^2} = \dfrac{r^2\,(\sin\,\alpha)^2}{C}$.

Quadrieren, gibt r'^2 als ≥ 0 Ausdruck. Dann Wurzel ziehen. Der Ausduck unter der folgenden Wurzel ist also ≥ 0. Man kann sich auf die positive Wurzel beschränken. Der andere Fall geht analog.

$$\mathbf{r' = r\sin\boldsymbol{\alpha}\sqrt{\frac{r^2\,(\sin\boldsymbol{\alpha})^2}{C^2} - 1}}.$$

Mit $\hat{r} := \dfrac{r\,\sin\,\alpha}{C}$ und der Annahme $\hat{r} > 1$, d.h. $|C| < r\,\sin\,\alpha$, nach Trennung der Variablen $\hat{r}$ und φ (der Fall $\hat{r} = 1$, d.h. $r' = 0$, d.h. $r = const.$ ergibt keine Geodäte für A und B mit $r_A = r_B$ (siehe Teil **d)**):

$$\frac{d\hat{r}}{\hat{r}\sqrt{\hat{r}^2 - 1}} = \sin\,\alpha\,d\varphi\ .$$

Nach (unbestimmter) Integration:

$$\int d\hat{r}\frac{1}{\hat{r}\sqrt{\hat{r}^2 - 1}} = \sin\,\alpha\int d\varphi = (sin\,\alpha)\,\varphi + \hat{a}\ .$$

Fortsetzung der Lösung der **Aufgabe 2** auf Seite - 4 -

Fortsetzung zur Lösung der Aufgabe 2

Mit Hinweis:

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\hat{r}}\right) = (\sin\alpha)\,\varphi + a\ , \text{ mit neuer Konstanten } a\,.$$

D. h. $\hat{r} = \dfrac{r\,\sin\alpha}{C} = \dfrac{1}{\cos((\sin\alpha)\,\varphi + a)}$. D.h.

$$\mathbf{r(\varphi) = \frac{C}{\sin\boldsymbol{\alpha}}\,\frac{1}{\cos((\sin\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\varphi} + a)}}\ .$$

Mit den zwei Integrationskonstanten C und a, die im Prinzip aus den Anfangslagen $r(\varphi_A) = r_A$ und $r(\varphi_B) = r_B$ bestimmt sind.

d) [2 Pkte] $r(\pm\frac{\pi}{2}) = r_0 = \dfrac{C}{\sin\alpha}\,\dfrac{1}{\cos(\pm(\sin\alpha)\,\frac{\pi}{2} + a)}$. Da $\cos(-x) = \cos(x)$, auch $r_0 = \dfrac{C}{\sin\alpha}\,\dfrac{1}{\cos((\sin\alpha)\,\frac{\pi}{2} \pm a)}$, also erfüllt mit $a = 0$. Daraus C aus r_0 bestimmt, und das Ergebnis ist:

$$\mathbf{r(\boldsymbol{\varphi}) = r_0\,\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\sin\boldsymbol{\alpha})}{\cos((\sin\boldsymbol{\alpha})\,\boldsymbol{\varphi})}}\ .$$

Urspünglich war noch vorgesehen (wurde aber dann weggelassen):

e) [1 Pkt.] Durch welche Operation kann jede Geodäte zwischen A und B auf dem Kegelmantel in ein Stück einer Geraden verwandelt werden? Formeln sind hier nicht gefragt.

Lösung:

e) [1 Pkt.] Schneide Kegelmantel längs einer Geraden durch den Ursprung O, die die Geodäte zwischen A und B nicht trifft auf, und wickle den Mantel auf einer Ebene ab. Das ergibt einen Kreissektor (mit welchem Winkel?), auf dem die Geodäte ein Geradenstück sein muss, da in der Ebene die Geodäten Geraden sind. Da der Schlitz die Geodäte auf dem Mantel nicht geschnitten hat, liegt die A und B verbindende Gerade innerhalb des Kreissektors.

Fortsetzung mit Lösung der **Aufgabe 3** auf Seite - 5 -

Aufgabe 3: Rollende Kugel auf gleitender schiefer Ebene **10 Pkte.**

Zum *Hinweis* zu **b)**: Der reibungsfreie Keil (m, α) als starrer Körper führt nur eine Translationsbewegung in $x-$Richtung aus. Die Koordinaten seines Schwerpunktes sind $(x + x_K, y_K)$, wenn im körperfesten System des Keils, mit Ursprung in der linken unteren Ecke, sein Schwerpunkt (x_K, y_K) ist. Da nur die Zeitableitung interessiert, braucht man diesen Schwerpunkt nicht zu kennen (deshalb braucht der Keil auch nicht homogen zu sein) und es gilt: $T_{\text{Keil}} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$.

a) [2 Pkte.] Kugelträgheitsmoment bezüglich irgendeiner Drehachse durch den Mittelpunkt, der der Schwerpunkt S ist, in Polarkoordinaten $x = r \cos\varphi \sin\theta$, $y = r \sin\varphi \sin\theta$, mit $u := \cos\theta$, z. B.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta} = \Theta_{zz} &= \iiint\limits_V d^3x\, \rho(\vec{x})\, (\vec{x}^2 - z^2) = \rho \iiint\limits_V d^3x\, (x^2 + y^2) \\
&= \frac{3\,M}{4\,\pi\,R^3} \int_0^R dr\, r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} du\, r^2\, (1 - u^2) = \frac{3\,M}{2\,R^3}\, \frac{R^5}{5}\, \left(u - \frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{+1} \\
&= \frac{3}{10}\, M\, R^2\, (1 - (-1) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3})) = \frac{3}{10}\, M\, R^2\, \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{2}{5}\, M\, R^2}.
\end{aligned}
$$

b) [3 Pkte.] $T = T_{\text{Keil}} + T_{\text{Kugel}}$. T_{Keil} siehe oben im Vorspann. T_{Kugel} mit $S-$Punkt als Ursprung, dann Bewegung des Schwerpunkts S: $T_{\text{Kugel}} = \dfrac{1}{2}\, M\, (\dot{\vec{r}}_S)^2 + \dfrac{1}{2}\, \Theta\, \dot{\varphi}^2$ mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$. $\vec{r}_S = (x + s \cos\alpha, \sin\alpha\,(l - s) + \cos\alpha\, R)^\top$, d.h. $\dot{\vec{r}}_S = (\dot{x} + \dot{s} \cos\alpha, -\sin\alpha\, \dot{s})^\top$. (Also auch hier sind konstante Terme in $\vec{r}_S$ nicht wichtig).

$$
\begin{aligned}
T_{\text{Kugel}} &= \frac{1}{2}\, M\, (\dot{x}^2 + \dot{s}^2\, (\cos\alpha)^2 + 2\, \dot{x}\, \dot{s} \cos\alpha + (\sin\alpha)^2\, \dot{s}^2) + \frac{1}{2}\, \Theta\, \dot{\varphi}^2 \\
&= \frac{1}{2}\, M\, (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\, \dot{x}\, \dot{s} \cos\alpha) + \frac{1}{2}\, \Theta\, \dot{\varphi}^2 \;.
\end{aligned}
$$

Rollbewegung (kein Gleiten): abgerollte Strecke $R\,\varphi + \mathit{const.}$, d.h. $\dot{s} = R\,\dot{\varphi}$.

$$
T_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2}\, M\, (\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\, \dot{x}\, \dot{s} \cos\alpha) + \frac{1}{2}\, \frac{\Theta}{R^2}\, \dot{s}^2 \;.
$$

Zusammen, und mit Θ von Teil **a)**:

$$
T = T_{\text{Keil}} + T_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2}\, (m + M)\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, M\, \dot{s}^2\, (1 + \frac{2}{5}) + M\, \dot{x}\, \dot{s} \cos\alpha \;.
$$

Dazu $U_{\text{Kugel}} = M\, g\, y_S = M\, g\, (\sin\alpha\, (l - s) + \cos\alpha\, R)$ (Potentialnullpunkt auf Höhe der x-Achse).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L(x, s, \dot{x}, \dot{s})} &= \mathbf{\frac{1}{2}\, (m + M)\, \dot{x}^2 + \frac{7}{10}\, M\, \dot{s}^2 + M\, \dot{x}\, \dot{s} \cos\boldsymbol{\alpha}} \\
&\quad - \mathbf{M\, g\, (\sin\boldsymbol{\alpha}\, (l - s) + \cos\boldsymbol{\alpha}\, R)} \;.
\end{aligned}
$$

Der konstante ($s-$unabhängige) Potentialteil ist irrelevant.

x ist zyklische Variable.

Fortsetzung mit Lösung der **Aufgabe 3 c)** auf Seite - 6 -

Fortsetzung der Lösung der Aufgabe 3 c)

c) [2 Pkte.] *Euler-Lagrange*-Gleichungen. Zur zyklischen Variablen x hat man die Erhaltungsgröße

$$\mathbf{p_x} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = (\mathbf{m} + \mathbf{M})\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}\cos\boldsymbol{\alpha}\;\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{const}.$$

(Falls man die Anfangsbedingung $\dot{x}(t=0) = 0$ und $\dot{s}(t=0) = 0$ verwendet, verschwindet diese erhaltene Größe.)

Die *Euler-Lagrange*-Gleichung ist:

$$(\mathbf{m} + \mathbf{M})\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}\cos\boldsymbol{\alpha}\,\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{0}\ .$$

Die Bewegungsgleichung für s ist:

$$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}\cos\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{M}\,\mathbf{g}\sin\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}\,.$$

d [3 Pkte.] Aus der *Euler-Lagrange*-Gleichung oben: $\ddot{x} = -\frac{M\cos\alpha}{m+M}\ddot{s}$. Damit wird aus dieser Gleichung $(\frac{7}{5}M - \dfrac{M^2}{m+M}(\cos\alpha)^2)\,\ddot{s} = M\,g\,\sin\alpha$. D.h.

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{s}} &= \mathbf{g}\,\frac{\sin\boldsymbol{\alpha}}{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{m}+\mathbf{M}}(\cos\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}}} > \mathbf{0}.\\
\ddot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{g}\,\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{m}+\mathbf{M}}\,\frac{\sin\boldsymbol{\alpha}\cos\boldsymbol{\alpha}}{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} - \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{m}+\mathbf{M}}(\cos\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{2}}} < \mathbf{0}\ .
\end{aligned}$$

Die Ungleichungen gelten, da $\dfrac{7}{5} - \dfrac{M}{m+M}(\cos\boldsymbol{\alpha})^2 > \dfrac{7}{5} - 1 = \dfrac{2}{5} > 0$, wegen $(\cos\alpha)^2 < 1$ und $M < m + M$.

Ende der Aufgaben