Universität Karlsruhe **Sommersemester 2009**

Klassissche Theoretische Physik II (Theorie B)

V: PD. Dr. M. Eschrig
Ü: Dr. habil. W. Lang

Nachklausur, 28. Oktober 2009, 13.30 - 15.30 Uhr

Name: **Matrikelnummer:** **B/D/L:**

1	**2**	**3**	
			Σ =

Allgemeine Hinweise:

Die Gesamtpunktzahl der aus **d r e i Aufgaben** bestehenden Nachklausur beträgt **27 Punkte**. Voraussetzung für die Zulassung zur Nachklausur und Scheinvergabe ist, dass in den Übungsblättern Nr. 1 - 12 mindestens die Punktzahl **118.5** erreicht wurde.

Zum Zweck der Orientierungsprüfung im Diplomstudiengang kann die Nachklausur auch ohne diese Zulassungsbedingung mitgeschrieben werden. Es gibt dann aber keinen Schein.

Die Noten für Teilnehmer im Bachelor- und Lehramt-Studiengang werden später aus der Punkteverteilung bestimmt.

Die Bestandenschranke für Teilnehmer in einem Diplomstudiengang wird später festgelegt. Die Punktzahlen für die Teilaufgaben sind am Ende jeder Aufgabe angegeben.

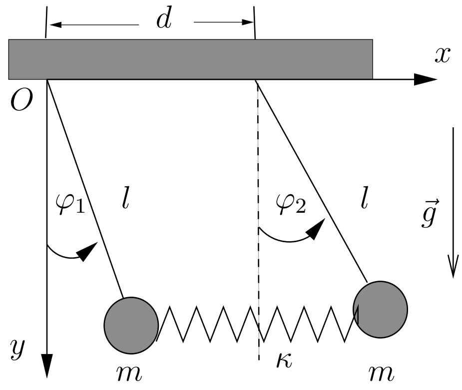
Hilfsmittel: Zwei eigenhändig beschriebene (nicht kopierte) Din-A4 Seiten.

Bitte Mobiltelephone ausschalten und wegpacken!

Bitte nur ausgegebenes Papier verwenden. Bei Bedarf bitte melden.

Fortsetzung mit **Aufgabe 1** auf Seite - 2 -

Aufgabe 1: Doppelpendel **9 Pkte.**



Zwei (mathematische) Pendel mit gleicher Länge l und mit gleicher Masse m, die in der Entfernung d voneinander aufgehängt sind und durch eine (masselos gedachte) Feder (Federkonstante κ) verbunden sind, schwingen im homogenen Erdschwerefeld (g) in der $(x, y)-$Ebene. Die Feder hat im entspannten Zustand die Länge d. Siehe Abbildung.

a) Wie sehen die Zwangsbedingungen für die zwei Massenpunkte in kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus? Bestimmen Sie die Zahl der Freiheitsgrade f. Zeigen Sie, dass mit den verallgemeinerten Koordinaten φ_1 und φ_2 (siehe Skizze) die Zwangsbedingungen identisch erfüllt sind.

b) Schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion für kleine Auslenkungen φ_1 und φ_2 aus der Gleichgewichtslage auf.

Hinweis: In diesem Näherungsfall reicht es, nur die Federauslenkung in $x-$Richtung zu betrachten.

c) Geben Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichungen an.

d) Die gekoppelten Bewegungsgleichungen sind vom Typ

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= \quad a\,\varphi_1 + b\,\varphi_2 \ , \\ \ddot{\varphi}_2 &= \quad a\,\varphi_2 + b\,\varphi_1 \ . \end{aligned}$$

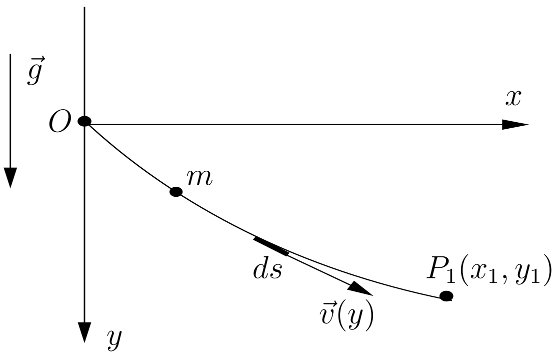
Geben Sie a und b an. Entkoppeln Sie diese Bewegungsgleichungen durch Einführung geeigneter Koordinaten. Geben Sie die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungen an. Erläutern Sie die Art dieser Eigenschwingungen für die Variablen φ_1 und φ_2.

2 + 3 + 1 + 3 = 9 Pkte.

Fortsetzung mit **Aufgaben 2** auf Seite - 3 -

Aufgabe 2: Variationsaufgabe: Brachystochrone **8 Pkte.**

Auf welcher Kurve $y = y(x)$ gelangt ein reibungslos gleitender Massenpunkt m im homogenen Erdschwerefeld g in kürzester Zeit vom Punkt O (Ursprung) zum Punkt P_1 mit Koordinaten (x_1, y_1)? Der Massenpunkt starte im Ursprung mit Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = \vec{0}$. Siehe Skizze. Bearbeiten Sie zur Lösung dieses Problems die folgenden Teilaufgaben.



a) Schreiben Sie das Linienelement ds auf und verwenden Sie den Energiesatz, um $v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$ als Funktion von y zu erhalten. Schreiben Sie damit das Funktional für dieses Variationsproblem auf. Zeigen Sie, dass es gegeben ist durch $J[y] = \int_{x_0=0}^{x_1} dx\, F(y, y', x)$ mit $F(y, y', x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2\, g\, y}}$.

b) Für dieses Funktional $J[y]$ ist die Voraussetzung eines in den Übungen bewiesenen Satzes erfüllt: Falls die Funktion F nicht explizit von der Integrationsvariablen x abhängt, folgt aus der *Euler*-Gleichung:

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C = const.$$

Verwenden Sie diesen Satz, um daraus eine Differentialgleichung erster Ordnung für y zu erhalten.

c) Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen, indem Sie im $y-$Integral die Substitution $y = a\,(\sin\varphi)^2$ mit einem geeignet zu wählenden $a > 0$ durchführen. Bestimmen Sie damit eine Parameterdarstellung $(x(\varphi), y(\varphi))$ der gesuchten Kurve. Die Kurve beginnt im Ursprung.

Hinweis: $(\sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\,\varphi))$.

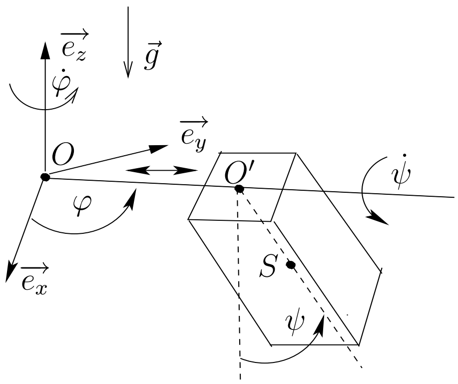
d) Bestimmen Sie die Konstante a für einen vorgegebenen Punkt P_1 mit Koordinaten $(x_1 \neq 0, y_1 = 0)$.

3 + 2 + 2 + 1 = 8 Pkte.

Fortsetzung mit **Aufgaben 3** auf Seite - 4 -

Aufgabe 3: Schwingender, gleitender und drehender Quader **10 Pkt.**

Ein homogener Quader mit quadratischer Grundfläche der Länge $2\,a$, Höhe $2\,b$ und Masse M sei an einer (masselos gedachten) Schiene so angebracht, dass er längs ihr reibungslos gleiten kann , wobei die Schiene parallel zu einer Quadratseite liegt und durch den Quadratmittelpunkt geht. Der Quader kann sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ um die Schiene als Achse drehen. Außerdem drehe sich die Schiene noch horizontal mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega_0$ um eine raumfeste vertikale $z-$Achse. Die ganze Anordnung befindet sich im homogenen Erdschwerefeld $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{e_z}$. Siehe Skizze.



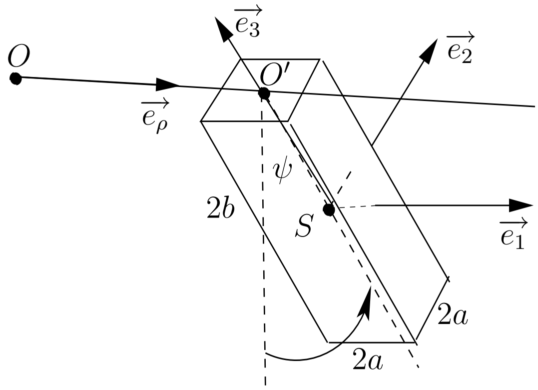
In dieser Aufgabe spielen drei Koordinatensysteme eine Rolle:

i) das raumfeste Inertialsystem IS mit Rechtsdreibein $\{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\}$ mit Ursprung 0 (siehe obere Skizze),

ii) das körperfeste Koordinatensystem KS mit Rechtsdreibein $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ und Schwerpunkt S als Ursprung (siehe untere Skizze)

und

iii) das mit der φ-Drehung mitgeführte Zylinderkoordinatensystem ZK mit Rechtsdreibein $\{\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}\}$. ρ ist die Entfernung zwischen O und O'.



a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente des homogenen Quaders $(2\,a, 2\,a, 2\,b)$ mit Gesamtmasse M bezüglich eines Hauptachsensystems mit dem Schwerpunkt S als Ursprung. Siehe untere Skizze.

b) Rechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \omega_0\,\overrightarrow{e_z} + \dot{\psi}\,\overrightarrow{e_\rho}$$

in das körperfeste System KS um. Geben Sie also die Komponenten von $\vec{\omega}$ in der Basis $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ an.

c) Bestimmen Sie die *Lagrange*-Funktion dieser Anordnung in den verallgemeinerten Koordinaten ρ und ψ. Die Ergebnisse für die Hauptträgheitsmomente von Teil **a)** brauchen hier nicht eingesetzt zu werden.

Hinweis: Bestimmen Sie den Schwerpunktsvektor $\vec{r}_S = \overrightarrow{0S}$, daraus $\vec{v}_S = \dot{\vec{r}}_S$ und $\vec{v}_S^{\,2}$.

3 + 3 + 4 = 10 Pkte.

Ende der Aufgaben