Universität Karlsruhe | **Sommersemester 2009**

Klassissche Theoretische Physik II (Theorie B)

V: PD. Dr. M. Eschrig
Ü: Dr. habil. W. Lang

Lösungen der Nachklausur vom 28. Oktober 2009

Aufgabe 1: Doppelpendel **9 Pkte.**

a) [2 Pkte.] Zwangsbedingungen: Massenpunkte auf Kreisen, also
$A_1: \; x_1^2 + y_1^2 - l^2 = 0, \;\; A_2: (x_2 - d)^2 - y_2^2 - l^2 = 0$ (holonom-skleronom).
Freiheitsgrade in der (x, y)- Ebene $f = 2 * 2 - 2 = 2$.
Mit Koordinaten φ_1 und φ_2: $x_1 = l \sin \varphi_1, \quad y_1 = l \cos \varphi_1, \quad x_2 = d + l \sin \varphi_2$, $y_2 = l \cos \varphi_2$.
Verallgemeinerte Koordinaten, da die Zwangsbedingungen damit identisch erfüllt werden.
$A1$: $x_1^2 + y_1^2 - l^2 = l^2\,((\sin\varphi_1)^2 + (\cos\varphi_1)^2) - l^2 = l^2 - l^2 = 0$ und
$A2$: $(x_2 - d)^2 + y_1^2 - l^2 = l^2\,((\sin\varphi_2)^2 + (\cos\varphi_2)^2) - l^2 = 0$.

b) [3 Pkte.] Koordinaten: $(x_1, y_1) = (l \sin\varphi_1, l\cos\varphi_1), (x_2, y_2) = (d + l\sin\varphi_2, l\,cos\,\varphi_2)$.
Kinetische Energie: $T_1 = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m\,l^2\,((\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1)^2 + ((-\sin\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1)^2) = \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\varphi}_1^2$. Analog: $T_2 = \frac{1}{2} m\,l^2\,\dot{\varphi}_2^2$.
Potentielle Energie (Nullpunkt des Potentials in Höhe der Aufhängepunkte):
$\vec{F} = m\,g\,\overrightarrow{e_y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$. $U = -g\,m\,y$.
$U_1 = -m\,g\,l\,\cos\varphi_1 \approx -m\,g\,l\,(1 - \frac{1}{2}\varphi_1^2)$. $U_2 = -m\,g\,l\,\cos\varphi_2 \approx -m\,g\,l\,(1 - \frac{1}{2}\varphi_2^2)$.
Federenergie: $U = \frac{1}{2}\kappa\,(\triangle d)^2$ mit $\mathbf{\triangle d} = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} \approx \triangle x = l\,(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \approx \mathbf{l}\,(\boldsymbol{\varphi_2} - \boldsymbol{\varphi_1})$, da $\triangle y^2 = l^2\,(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)^2 \approx \frac{l^2}{4}\,(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)^2 \ll \triangle x^2 \approx l^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi_1}, \boldsymbol{\varphi_2}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_1, \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2) &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m}\,\mathbf{l^2}\,(\dot{\boldsymbol{\varphi}}_1^2 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_2^2) - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{m\,g\,l}\,(\boldsymbol{\varphi}_1^2 + \boldsymbol{\varphi}_2^2) \\
&\quad + \mathbf{2\,m\,g\,l} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\kappa}\,\mathbf{l^2}\,(\boldsymbol{\varphi_2} - \boldsymbol{\varphi_1})^{\mathbf{2}}\,.
\end{aligned}$$

Der konstante Term ist irrelevant für die spätere Betrachtung.

c) [1 Pkt.]

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} &= m\,l^2\,\ddot{\varphi}_1 + m\,g\,l\,\varphi_1 - \kappa\,l^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)\,, \\
0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} &= m\,l^2\,\ddot{\varphi}_2 + m\,g\,l\,\varphi_2 + \kappa\,l^2\,(\varphi_2 - \varphi_1)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_1 + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}}\boldsymbol{\varphi_1} - \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varphi_2} - \boldsymbol{\varphi_1}) &= \mathbf{0}\,, \\
\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_2 + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}}\boldsymbol{\varphi_2} + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varphi_2} - \boldsymbol{\varphi_1}) &= \mathbf{0}\,.
\end{aligned}$$

Fortsetzung mit Lösung der Aufgabe 1d auf Seite - 2 -

Fortsetzung mit Lösung der Aufgabe 1d

d) [3 Pkte.] $\mathbf{a} = -(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} + \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mathbf{m}})$, $\mathbf{b} = \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mathbf{m}}$.
Entkoppelt in neuen Variablen $\phi_1 := \varphi_1 + \varphi_2$ und $\phi_2 := \varphi_1 - \varphi_2$, d.h.

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} \boldsymbol{\phi}_{\mathbf{1}} = \mathbf{0} \text{ und } \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{2}} + (\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} + \mathbf{2}\,\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mathbf{m}})\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{2}} = \mathbf{0} \; .$$

Eigenfrequenzen: $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{1}} = \sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}}}$ und $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} + \mathbf{2}\,\frac{\boldsymbol{\kappa}}{\mathbf{m}}}$.
Eigenschwingungen: $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{1}} = \mathbf{a_1}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{1}}\,\mathbf{t} + \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathbf{1}})$ und $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{2}} = \mathbf{a_2}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{2}}\,\mathbf{t} + \boldsymbol{\mathcal{X}}_{\mathbf{2}})$
(oder andere Versionen, auch Realteil von komplexen Größen, wie $Re(C_1\, exp(i\,\omega_1\, t))$ und $Re(C_2\, exp(i\,\omega_2\, t))$).
Art der Eigenschwingungen:

i) $\phi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\phi_2 = 0$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}\phi_1$, also gleichphasige Schwingung beider Massenpunkte mit ω_1.

ii) $\phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ mit $\phi_1 = 0$, d.h. $\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{1}{2}\phi_2$, also gegenphasige Schwingung beider Massenpunkte mit Frequenz ω_2.

Fortsetzung mit **Lösung zur Aufgabe 2** auf Seite - 3 -

Aufgabe 2: Variationsaufgabe: Brachystochrone **8 Pkte.**

a) [3 Pkte.] $J[y] = \int_{t_0=0}^{t_1} dt = \int_{s+0}^{s_1} \frac{ds}{v} = \int_{x_0=0}^{x_1} \frac{dx}{v(y)} \sqrt{1 + y'^2}$,

da $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 (1 + y'^2)$, also $\mathbf{ds} = \mathbf{dx} \sqrt{\mathbf{1 + y'^2}}$.

Energiesatz: $\frac{m}{2} (v_0 = 0)^2 - m\, g\, 0 = 0 = \frac{m}{2} v^2 - m\, g\, y$, d.h. $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{2\, g\, y}}$.

Damit wird $F(y, y', x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2\, g\, y}} = F(y, y')$ wie angegeben.

b) [2 Pkte.] $C = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2\, g\, y}} - y' \frac{1}{\sqrt{2\, g\, y}} \frac{2\, y'}{2 \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\, g\, y} \sqrt{1 + y'^2}}$. Verwende die neue Konstante $a := \frac{1}{2\, g\, C^2}$, mit $a > 0$. Dann hat man

$$\mathbf{y'} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{y}} - \mathbf{1}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a - y}}{\mathbf{y}}} \; .$$

c) [2 Pkte.] Trennung der Variablen y und x: $\int dy \frac{1}{\sqrt{\frac{a-y}{y}}} = \int dx = x + b$, mit einer Integrationskonstanten b.

Neue Variable statt y mittels Substitution $y = a\, (\sin\, \varphi)^2$. D.h. $dy = 2\, a\, \sin\, \varphi\, \cos\, \varphi\, d\varphi$ und (bis auf Vorzeichen beim Wurzelziehen) erhält man $2\, a \int d\varphi\, (\sin\, \varphi)^2$, was mit der angegebenen trigonometrischen Formel (oder partieller Integration) zu $x + b = a\, (\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\, \varphi)) + b'$ führt, mit einer weiteren Integrationskonstanten b', die zu b geschlagen werden kann. Die Anfangsbedingung $y = 0$, d.h. z. B. $\varphi = 0$ und $x(\varphi = 0) = 0$ bestimmt die neue Konstante b zu Null, so dass nur noch die Konstante a im Spiel ist. Mit $\chi := 2\, \varphi$ und der angegebenen trigonometrischen Umformung hat man schließlich:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{sin}\, \boldsymbol{\chi}) \, , \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} (\mathbf{1} - \mathbf{cos}\, \boldsymbol{\chi}) \; .$$

Bemerkung: Das ist die Parameterdarstellung einer **Zykloide** mit Radius $R = \frac{a}{2}$ (Abrollen eines Kreisrades mit Radius R und Ort des Ventilansatzes am Rad verfolgen).

d) [1 Pkt.] Mit dem angegebenen speziellen Endpunkt P_1 auf der $x-$Achse im Abstand x_1 vom Ursprung, wird die Konstante a bestimmt:
$y_1 = 0$: $a \neq 0$, d.h. $\varphi = \pi$ (da die Lösung $\varphi = 0$ ausfällt). Damit wird $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x_1}}{\boldsymbol{\pi}}$.

Fortsetzung der Lösung der **Aufgabe 3** auf Seite - 4 -

Aufgabe 3: Schwingender, gleitender und drehender Quader **10 Pkte.**

a) [3 Pkte.] Hauptträgheitsmoment eines homogenen Quaders mit quadratischer Grundfläche $2\,a$ und Höhe $2\,b$ mit Ursprung im Schwerpunkt S laut unterer Skizze:
Wegen Vierersymmetrie um die $z-$Achse symmetrischer Kreisel: $\mathbf{\Theta_1} = \mathbf{\Theta_2}$ und

$$\mathbf{\Theta_1} = \iiint\limits_V d^3x\,\rho(\vec{x})\,(\vec{x}^2 - x^2) = \frac{M}{8\,a^2\,b}\iiint\limits_V d^3x\,(y^2 + z^2) =$$

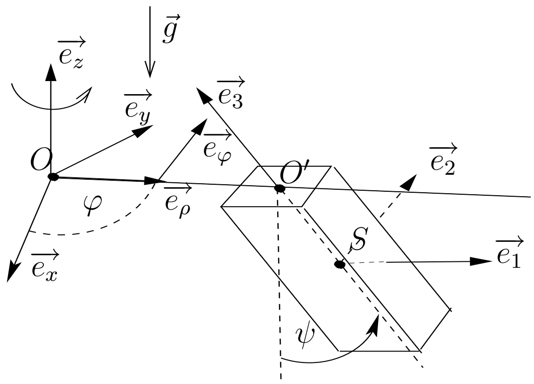
$$\frac{M}{8\,a^2\,b}\int_{-b}^{b} dz \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy\,(y^2 + z^2) = \frac{M}{8\,a^2\,b}\left((2\,a)\,(2\,b)\frac{2}{3}\,a^3 + (2\,a)^2\,\frac{2}{3}\,b^3\right) =$$

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{3}}\,(\mathbf{a^2} + \mathbf{b^2})\,.$$

$$\mathbf{\Theta_3} = \frac{M}{8\,a^2\,b}\iiint\limits_V d^3x\,(x^2 + y^2) = \frac{M}{8\,a^2\,b}\,2\,(2\,b)\,(2\,a)\,\frac{2}{3}\,a^3 = \frac{\mathbf{2\,M}}{\mathbf{3}}\,\mathbf{a^2}\,.$$

b) [3 Pkte.]

Koordinatensystem IS: $(0; \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$
Koordinatensystem KS: $(S; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$
Koordinatensystem ZK: $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$.
ZK aus IS: $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_y}$ und $\overrightarrow{e_\varphi} = \cos\varphi\,\overrightarrow{e_y} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_x}$, mit $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_z}$.



KS aus ZK: $\overrightarrow{e_2} = \cos\psi\,\overrightarrow{e_\varphi} + \sin\psi\,\overrightarrow{e_z}$ und $\overrightarrow{e_3} = -\sin\psi\,\overrightarrow{e_\varphi} + \cos\psi\,\overrightarrow{e_z}$. $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_\rho}$.
Daraus Winkelgeschwindigkeit aus den zwei unabhängigen Drehungen:

$$\vec{\omega} = \omega_0\,\overrightarrow{e_z} + \dot{\psi}\,\overrightarrow{e_\rho}\,,$$
$$\vec{\omega} = \omega_0\,\overrightarrow{e_z} + \dot{\psi}\,(\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_y})\,.$$

Komponenten von $\vec{\omega}$ im raumfesten System IS: $(\dot{\psi}\cos\varphi,\ \dot{\psi}\sin\varphi,\ \omega_0)$.
Umgerechnet mit Formeln oben (Umkehrung ZK aus KS):
Komponenten von $\vec{\omega}$ im körperfesten System KS: $(\boldsymbol{\dot{\psi}},\ \boldsymbol{\omega_0\sin\psi},\ \boldsymbol{\omega_0\cos\psi})$.

c) [4 Pkte.] $L = T - U$. $\vec{F} = -M\,g\,\overrightarrow{e_z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$. $U = M\,g\,z$, $z = -b\cos\psi$,
$\mathbf{U} = \mathbf{-M\,g\,b}\,\boldsymbol{\cos\psi}$ (Potentialnullpunkt in Schienenhöhe $z = 0$).
Schwerpunkt als Nullpunkt des körperfesten Koordinatensystems KS, dann
$T = \dfrac{1}{2}\,M\,\vec{v}_S^{\,2} + \dfrac{1}{2}\,\vec{\omega}^\top\,\mathbf{\Theta}_S\,\vec{\omega}$. $\vec{v}_S$ aus $\dot{\vec{r}}_S$ mit $\vec{r}_S = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} - b\,\overrightarrow{e_3}$. (Basisvektoren aus verschiedenen Systemen). Mit Basis aus ZK:

$$\vec{r}_S = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} - b\cos\psi\,\overrightarrow{e_z} + b\sin\psi\,\overrightarrow{e_\varphi}\,.$$

Fortsetzung der **Lösung der Aufgabe 3c)** auf Seite - 5 -

Fortsetzung der Lösung der Aufgabe 3 c)

$\dot{\vec{r}_S} \,=\, \dot\rho\,\overrightarrow{e_\rho} \,+\, \rho\,\dot{\overrightarrow{e_\rho}} \,+\, b\,\dot\psi\,\sin\psi\,\overrightarrow{e_z} \,+\, b\,\psi\,\cos\dot\psi\,\overrightarrow{e_\varphi} \,+\, b\,\sin\psi\,\dot{\overrightarrow{e_\varphi}}$. Mit $\dot{\overrightarrow{e_\rho}} \,=\, \dot\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi} \,=\, \omega_0\,\overrightarrow{e_\varphi}$ und
$\dot{\overrightarrow{e_\varphi}} \,=\, (-\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} \,-\, \cos\varphi\,\overrightarrow{e_x})\,\dot\varphi \,=\, -\overrightarrow{e_\rho}\,\omega_0$ ergibt sich

$$\vec{v}_S \,=\, \dot{\vec{r}_S} \,=\, (\dot\rho \,-\, b\,\omega_0\,\sin\psi)\,\overrightarrow{e_\rho} \,+\, (\rho\,\omega_0 \,+\, b\,\dot\psi\,\cos\psi)\,\overrightarrow{e_\varphi} \,+\, b\,\dot\psi\,\sin\psi\,\overrightarrow{e_z}\ .$$

Daraus, mit der Orthogonalität der ZK-Basis:
$\boldsymbol{\vec{v}_S}^{\mathbf{2}} \,=\, \dot\rho^{\mathbf{2}} + \mathbf{b^2}\,\omega_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\,(\sin\psi)^{\mathbf{2}} - \mathbf{2\,b}\,\dot\rho\,\omega_{\mathbf{0}}\,\sin\psi + \rho^{\mathbf{2}}\,\omega_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{b^2}\,\dot\psi^{\mathbf{2}}\,(\cos\psi)^{\mathbf{2}} + \mathbf{2\,b}\,\rho\,\omega_{\mathbf{0}}\,\dot\psi\,\cos\psi + \mathbf{b^2}\,\dot\psi^{\mathbf{2}}\,(\sin\psi)^{\mathbf{2}}$

$$=\, \boldsymbol{\dot\rho}^{\mathbf{2}} \,+\, \mathbf{b^2}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\,(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\psi})^{\mathbf{2}} \,-\, \mathbf{2\,b}\,\boldsymbol{\dot\rho}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\psi} \,+\, \boldsymbol{\rho}^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} \,+\, \mathbf{b^2}\,\boldsymbol{\dot\psi}^{\mathbf{2}} \,+\, \mathbf{2\,b}\,\boldsymbol{\rho}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}\,\boldsymbol{\dot\psi}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\psi}\,.$$

Dazu vom Trägheitstensorteil, mit $\vec\omega$ von Teil **b)**:

$$\frac{1}{2}\,\Theta_{S,1}\,(\dot\psi^2 \,+\, \omega_0^2\,(\sin\psi)^2) \,+\, \frac{1}{2}\,\Theta_{S,3}\,\omega_0^2\,(\cos\psi)^2\,.$$

Insgesamt

$$\mathbf{T} \,=\, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{M}\,\boldsymbol{\vec{v}_S}^{\mathbf{2}} \,+\, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{S,1}}\,(\boldsymbol{\dot\psi}^{\mathbf{2}} \,+\, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\,(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\psi})^{\mathbf{2}}) \,+\, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{S,3}}\,\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}}\,(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\psi})^{\mathbf{2}}\,,$$

mit $\boldsymbol{\Theta}_{S,1}$, $\boldsymbol{\Theta}_{S,3}$ von Teil **a)** und $\boldsymbol{\vec{v}_S}^{\mathbf{2}}$ von oben.

Ende der Lösungen der Nachklausur
