Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Modulprüfung/ Klausur zur Theoretischen Physik B SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman

Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

29.07.2010

Arbeitszeit: 120 Minuten

---

1. **Quickies** (20 Punkte)

   Beantworten sie die folgenden Fragen *so kurz* wie möglich

   (a) Wie lautet in kartesischen Koordinaten die *Zwangsbedingung* für ein sphärisches Pendel (d.h. eine Punktmasse der Masse m, die an einem masselosen Stab der Länge l befestigt ist, welcher im Ursprung eines rechtshändigen Koordinatensystems aufgehängt ist. Die Gravitationskraft zeige in negative z-Richtung.)? Finden sie mithilfe der Zwangsbedingung die *Richtung* der entsprechenden *Zwangskraft*? (2 Punkte)

   (b) Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$. Wie ist die Wirkung definiert? Was besagt das Prinzip der kleinsten Wirkung? Was genau wird dabei variiert mit welcher Randbedingung? Fertigen sie zur letzten Frage eventuell eine kleine Skizze an. (3 Punkte)

   (c) Führen sie die Variation im Falle eines Freiheitsgrades aus und zeigen sie, dass dies die Euler-Lagrange-Gleichung impliziert. (2 Punkte)

   (d) Was besagt das Noether-Theorem (in Worten, ohne Formeln)? (2 Punkte)

   (e) Betrachten sie das sphärische Pendel aus Teilaufgabe (a). Welcher der folgenden Größen ist erhalten (i) Energie E (ii) Impuls $\vec{p}$ (iii) Drehimpuls $\vec{L}$ (iv) L_z (z-Komponente des Drehimpulses)?
   Zur Beantwortung der Fragen reicht jeweils ein kurzes, stichhaltiges (Symmetrie)-Argument. (2 Punkte)

   (f) Wieviele Normalkoordinaten y_i besitzt ein System mit N Teilchen in drei Dimensionen, welche f Zwangsbedingungen unterliegen? Was ergibt sich als Beispiel für zwei Massen, die mit einer Feder verbunden sind und deren Bewegung auf eine Ebene beschränkt (erzwungen) ist? Wie schreibt man die Lagrangefunktion eines solchen Systems (d.h. N Teilchen mit f Zwangsbedingungen) mittels der Normalkoordinaten y_i? (2 Punkte)

   (g) Wie ist der Trägheitstensor definiert? Was versteht man unter den Hauptträgheitsmomenten und den Hauptachsen? (2 Punkte)

   (h) Geben sie die Bewegungsgleichungen des starren Körpers im Inertialsystem an (d.h. zwei Gleichungen für den Impuls $\vec{P}$ und den Rotationsanteil des Drehimpulses $\vec{L}_{\text{rot}}$. Keine Eulergleichung!). (2 Punkte)

   (i) In der ersten Halbzeit eines Spiels der WM in Südafrika schießt ein Spieler den Ball in Richtung Osten auf das Tor. Vernachlässigen sie Luftreibung und betrachten sie den Ball als eine Punktmasse. Fliegt der Ball dann gerade nach Osten? Falls nicht, wird er nach Norden oder nach Süden abgelenkt? Ändert sich das Resultat in der zweiten Halbzeit, d.h. wenn er nun den Ball in Richtung Westen auf das Tor schießt? (3 Punkte)

2. Hamilton-Funktion (4 Punkte)

Gegeben sei die Lagrangefunktion des Kepler-Problems in Polarkoordinaten in der Ebene senkrecht zum Drehimpuls $\vec{L}$, welcher in z-Richtung zeigen soll

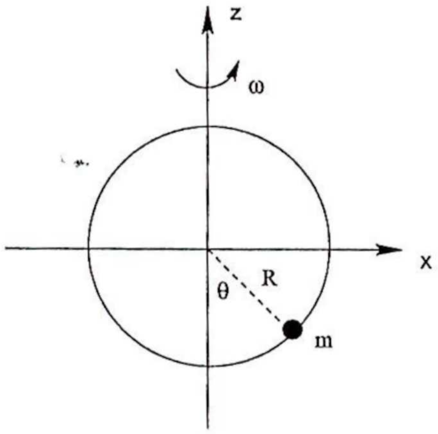
$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{\alpha}{r}.$$

(a) Finden sie die entsprechende Hamiltonfunktion H. (2 Punkte)

(b) Zeigen sie mithilfe der Poissonklammer, dass L_z (z-Komponente des Drehimpulses) erhalten ist. (2 Punkte)

3. Lagrange-Formalismus 2. Art - Perle auf rotierendem Kreis (8 Punkte)

Betrachten sie wie in der Abbildung gezeigt einen Kreis vom Radius R, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht. Das Zentrum des Kreises soll sich dabei im Ursprung befinden. Eine Punktmasse der Masse m kann sich reibungsfrei auf dem Kreis bewegen und befindet sich zudem unter dem Einfluss der Gravitationskraft.



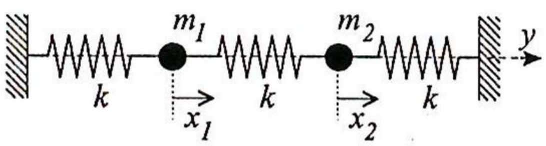
(a) Wieviele Freiheitsgrade besitzt das System? Bestimmen sie die Lagrangefunktion L in geeigneten Koordinaten. (3 Punkte)

(b) Bestimmen sie die Bewegungsgleichung(en) dieses Systems. (1 Punkt)

(c) Sei wie in der Abbildung gezeigt θ der Winkel gegen die negative z-Achse. Die Bewegungsgleichungen erlauben Lösungen mit θ = const. Welcher Winkel stellt sich bei gegebenem ω ein? Finden sie eine Bedingung dafür, dass es nicht nur die Lösung $\theta = 0$ (bzw. $\theta = \pi$) gibt. (4 Punkte)

4. Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden (9 Punkte)

Betrachten sie wie in der Abbildung gezeigt zwei Massen $m_1 = m_2 = m$, die über eine Feder miteinander verbunden sind und je auch mit einer Feder an einer Wand befestigt sind. Alle Federn besitzen die Federkonstante k. Es soll nur die eindimensionale Bewegung entlang der y-Achse betrachtet werden. Die Auslenkungen aus den Ruhelagen werden mit x_1, x_2 bezeichnet.



(a) Bestimmen sie die Lagrangefunktion dieses Systems, bringen sie diese auf die Form

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{x}}^T M \dot{\vec{x}} - \vec{x}^T V \vec{x}\right) \tag{1}$$

mit den zu bestimmenden Matrizen $V, M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ist V positiv definit? (3 Punkte)

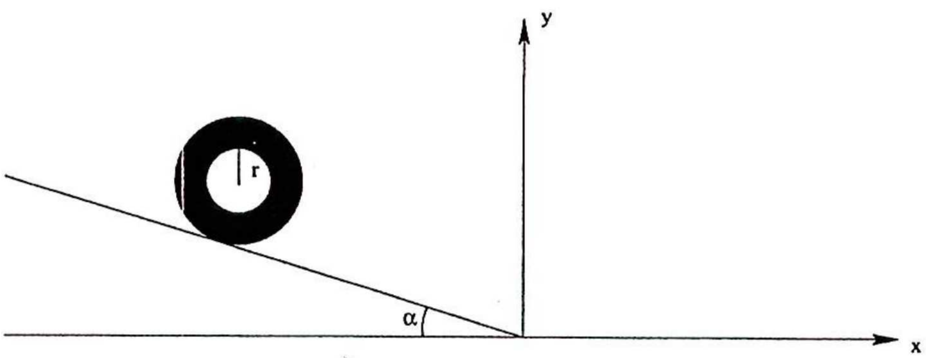
(b) Bestimmen sie die beiden Eigenmoden (d.h. Eigenfrequenzen mit zugehörigen Eigenvektoren) des Systems. (3 Punkte)

(c) Geben sie die allgemeine reelle Lösung an. Wieviele freie Konstanten besitzt diese? (2 Punkte)

(d) Geben sie die Hamiltonfunktion zur Lagrangefunktion Gl. (1) an. (1 Punkt)

5. Starrer Körper - Hohlzylinder auf schiefer Ebene (9 Punkte)

Betrachten sie wie in unten stehender Abbildung gezeigt einen Hohlzylinder mit äußerem Radius R, innerem Radius r, Länge L und homogener Massendichte ρ, welche unter dem Einfluss der Gravitationskraft auf einer schiefen Ebene abrollt. Die Ebene schließe einen Winkel α mit der Horizontalen ein.



(a) Finden sie das Trägheitsmoment I_Z bezüglich einer Drehung um die Zylinderachse. (3 Punkte)

(b) Wie lautet die Lagrangefunktion L dieses Systems? (3 Punkte)

(c) Finden sie damit den Betrag der Beschleunigung a des Schwerpunktes. (3 Punkte)