Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Klausur - Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman

Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

29.07.2010

Arbeitszeit: 120 Minuten

---

1. Quickies (20 Punkte)

(a) Die Zwangsbedingung lautet

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Die Zwangskraft zeigt entlang dem Stab in Richtung dem Ursprung, d.h.

$$Z = \lambda \vec{\nabla} g = 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) Die Wirkung ist

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t); t).$$

Das Hamiltonsche Prinzip oder das Prinzip der kleinsten Wirkung ist ein Extremalprinzip. Danach verhalten sich die physikalischen Teilchen und Felder so, dass eine Größe, die die Teilchenbahnen und Felder bewertet, kleiner ist als bei allen anderen denkbaren Teilchenbahnen oder Feldwerten. Die mathematisch genaue Formulierung verlangt, dass die Variation des Wirkungssintegrals Null sein muss:

$$\delta S = 0.$$

Hier variiert man die Bahnkurven

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t),$$

mit der Randbedingung

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

(c) Im Falle eines Freiheitsgrades:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q(t), \dot{q}(t); t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right].$$

Nach partieller Integration des zweiten Glieds ergibt sich:

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q$$

Wegen den Randbedingungen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ verschwindet der erste Summand. Das übrige Integral muss für beliebige Werte von δq gleich Null sein, d.h der Integrand muss verschwinden. So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

(d) Das Noether-Theorem sagt aus, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße existiert und umgekehrt.

(e) Erhalten sind : (i) Energie E, (iv) z-Komponente des Drehimpulses L_z. pro richtig +1 pro falsch −1

(f) Generell: es gibt $3N - f$ Normalkoordinaten.
Beispiel: $3N - f = 4$
Die Lagrangefuktion ist:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\left[\dot{y}_i^2 - \omega_i^2 y_i^2\right],$$

wo s die Nummer des Freiheitsgrades ist, $\cancel{m_i}$ ω_i positive Konstanten sind, und $\cancel{\theta_i}$ y_i die Normalkoordinaten bezeichnen.

(g) Der Trägheitstensor eines Körpers gibt seine Trägheitsmomente, also die Trägheit des Körpers bezüglich der Drehungen, an. Er spielt damit für Drehungen die Rolle, die die träge Masse für lineare Bewegungen spielt. Matematisch:

$$I_{ik} = \sum m\left[x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right],$$

wobei sich die Summe über alle Teile des Körpers erstreckt.
In einem von den Hauptträgheitsachsen aufgespannten Koordinatensystem ist der Trägheitstensor diagonal. Die zu den Hauptträgheitsachsen gehörenden Trägheitsmomente sind also die Eigenwerte des Trägheitstensors, sie heißen Hauptträgheitsmomente.

(h)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = \sum \vec{f}, \quad \frac{d\vec{L}_{rot}}{dt} = \vec{K} = \sum[\vec{r} \times \vec{f}].$$

(i) In der ersten Halbzeit wird der Ball nach Norden abgelenkt.
In der zweiten Halbzeit wird der Ball nach Süden abgelenkt (d.h. immer nach links).

2. Hamilton-Funktion (4 Punkte)

(a)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) + \frac{\alpha}{r}.$$

(b)

$$L_z = p_\phi \Rightarrow \{H, L_z\} = 0.$$

3. Lagrange-Formalismus 2. Art - Perle auf rotierendem Kreis (8 Punkte)

3 (a) Das System besitzt nur einen Freiheitsgrad, den Winkel θ. 1

Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$L = \frac{m}{2} R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta \right) + mgR\cos\theta.$$ 2

1 (b) Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{g}{R}\sin\theta.$$ 1

4 (c) Die stationäre Lösung ist

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$ 2

Die Bedingung ist gegeben durch

$$\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1 \to \omega \geq \sqrt{g/R}.$$ 2

4. Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden (9 Punkte)

(a)

$$M = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = k\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$ 3

(b)

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}$$
$$\omega_2 = \sqrt{3k/m}$$ 3

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}$$

(c)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} \beta_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$ 4

Die Lösung enthält vier freie Konstanten. 1

(d) Die Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$H = \frac{1}{2}\left(\vec{p}^T M^{-1} \vec{p} + \vec{x}^T V \vec{x} \right).$$ 1

5. Starrer Körper - Hohlzylinder auf schiefer Ebene (9 Punkte)

(a) Das Trägheitsmoment ist gegeben durch

$$I_Z = \frac{M}{2}\left(R^2 + r^2\right)$$

(b)

$$L = \frac{I_Z + MR^2}{2R^2}\dot{x}^2 - Mgx\sin\alpha.$$

(c)

$$a = \frac{M}{M + I_Z/R^2} g\sin\alpha < a_0 = g\sin\alpha.$$