1 Aufgabe 1

Hinweis: Die Fragen in dieser Aufgabe können alle unabhängig voneinander und kurz beantwortet werden.

a) Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t)$. Wie erhält man daraus den kanonischen Impuls p und die Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$?

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad H = p\dot{q} - L$$

b) Wie lautet die Euler-Lagrange-Gleichung?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

c) Wie lauten die kanonischen Gleichungen für p und q?

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}\,, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}$$

d) Die Poisson-Klammer sei definiert durch

$$\{A, B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} \right) .$$

Berechnen Sie folgende Poisson-Klammern

(i) $\{L_i, p_j\}$ mit dem Drehimpuls $L = \vec{q} \times \vec{p}$,

$$\{f, p_j\} == -\frac{\partial f}{\partial q_j} \Rightarrow \{L_i, p_j\} = -\epsilon_{ikl}\frac{\partial}{\partial q_j} q_k p_l = -\epsilon_{ijl} p_l$$

(ii) $\{V, L_z\}$, wobei $V = V(\vec{q}^2)$.

$$\begin{aligned}\{V, L_z\} &= \epsilon_{zij}\{V, q_i p_j\} = \epsilon_{zij} q_i \{V, p_j\} \\ &= -\epsilon_{zij} q_i \frac{\partial}{\partial q_j} V(q^2) = -2\epsilon_{zij} q_i q_j \frac{\partial}{\partial q^2} V(q^2) = 0\,,\end{aligned}$$

wobei die Kettenregel verwendet wurde.

e) Eigenschaften des Trägheitstensors:

(i) Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte I_1, I_2, I_3 des Trägheitstensors gilt:

$$I_1 + I_2 \geq I_3\,.$$

$$I_1 = \int \rho(x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}V,\ I_2 = \int \rho(x_1^2 + x_3^2)\mathrm{d}V,\ I_3 = \int \rho(x_1^2 + x_2^2)\mathrm{d}V$$

$$I_1 + I_2 = \int \rho(x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_3^2)\mathrm{d}V = 2\int \rho x_3^2 \mathrm{d}V + I_3 \geq I_3$$

(ii) Alle Massenpunkte liegen in einer Ebene senkrecht zu $\vec{e}_3$. Es gelte $I_1 = I_3/2$. Was ergibt sich für I_2?

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \rho(x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}V = \int \rho x_2^2 \mathrm{d}V + M\bar{x}_3^2 \\
I_2 &= \int \rho(x_1^2 + x_3^2)\mathrm{d}V = \int \rho x_1^2 \mathrm{d}V + M\bar{x}_3^2 \\
I_3 &= \int \rho(x_1^2 + x_2^2)\mathrm{d}V \\
I_3 &+ 2M\bar{x}_3^2 = I_1 + I_2 = \frac{I_3}{2} + I_2 \\
&\Rightarrow I_2 = \frac{I_3}{2} + 2M\bar{x}_3^2
\end{aligned}
$$

2 Aufgabe 2

$$m_1 = m,\; m_2 = m/2,\; D_1 = D,\; D_2 = D/2$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q(\phi(\vec{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}))$$

a) kanonischer Impuls:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + qA_i$$

Hamiltonfunktion:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

b) Mit $\phi = 0$ und dem gegebenen $\vec{A}$ wird die Hamiltonfunktion zu

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - qxB\vec{e}_y)^2 = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_z^2 + (p_y - xBq)^2\right)$$

und die kanonischen Gleichungen sind

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} = \dot{x} \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -Bq\frac{p_y - xBq}{m} = -\dot{p}_x \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y - xBq}{m} = \dot{y} \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 = -\dot{p}_y \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} = \dot{z} \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 0 = -\dot{p}_z \tag{3}$$

Gl. (3) liefert

$$\ddot{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z(t) = z_0 + v_z^0 t\,.$$

Ineinander Einsetzen von Gln. (1) und (2) liefert

$$\ddot{y} = -\frac{Bq}{m}\dot{x}\,, \quad \ddot{x} = \frac{Bq}{m}\dot{y}\,.$$

Die Lösung ist also

$$x(t) = x_0 + A\sin(\omega t + \varphi)\,, \quad y(t) = y_0 + A\cos(\omega t + \varphi)\,,$$

mit $\omega = \frac{Bq}{m}$

3 Aufgabe 3

a)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{D_1}{2}x_1^2 - \frac{D_2}{2}(x_2 - x_1)^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{D}{2}x_1^2 - \frac{D}{4}(x_2 - x_1)^2 + mgx_1 + \frac{m}{2}gx_2 \end{aligned}$$

b)

$$m\ddot{x}_1 = -Dx_1 + \frac{D}{2}(x_2 - x_1) + mg = -\frac{3}{2}Dx_1 + \frac{D}{2}x_2 + mg \tag{4}$$

$$m\ddot{x}_2 = D(x_1 - x_2) + mg \tag{5}$$

c) Gleichgewichtslage: $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = 0$

$$\begin{array}{lll} 2(1) + (2) & -2Dx_1^0 + 3mg = 0 & \Rightarrow x_1^0 = \dfrac{3mg}{2D} \\ x_1 \text{ in } (2) & & \Rightarrow x_2^0 = \dfrac{5mg}{2D} \end{array}$$

d) $x_1 = x_1^0 + y_1$, $x_2 = x_2^0 + y_2$

$$m\ddot{y}_1 = -\frac{3}{2}Dy_1 + \frac{D}{2}y_2 \tag{6}$$

$$m\ddot{y}_2 = D(y_1 - y_2) \tag{7}$$

Mit dem Ansatz $y_i = a_i \exp i\omega t$ folgt

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + \frac{3}{2}D & -\frac{D}{2} \\ -D & -m\omega^2 + D \end{vmatrix} = 0$$

also

$$m^2\omega^4 - \frac{5}{2}m\omega^2 D + \frac{3}{2}D^2 - \frac{D^2}{2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}}\right)\frac{D}{m} = \frac{5 \pm 3}{4}\frac{D}{m}$$

Mit $\omega_0^2 = D/m$ sind die Eigenfrequenzen also

$$\omega_1^2 = 2\omega_0^2\,, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \frac{3}{2}\omega_0^2 & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

liefert die Amplitudenverhältnisse

$$\omega_1^2 = 2\omega_0^2 \Rightarrow z_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 \Rightarrow z_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die allgemeinste Lösung ist also

$$z_1(c_1 \exp(i\omega_1 t) + c_2 \exp(-i\omega_1 t)) + z_2(c_3 \exp(i\omega_2 t) + c_4 \exp(-i\omega_2 t))$$

oder alternativ

$$z_1(c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)) + z_2(c_3 \cos(\omega_2 t) + c_4 \sin(\omega_2 t))$$

4 Aufgabe 4

a)

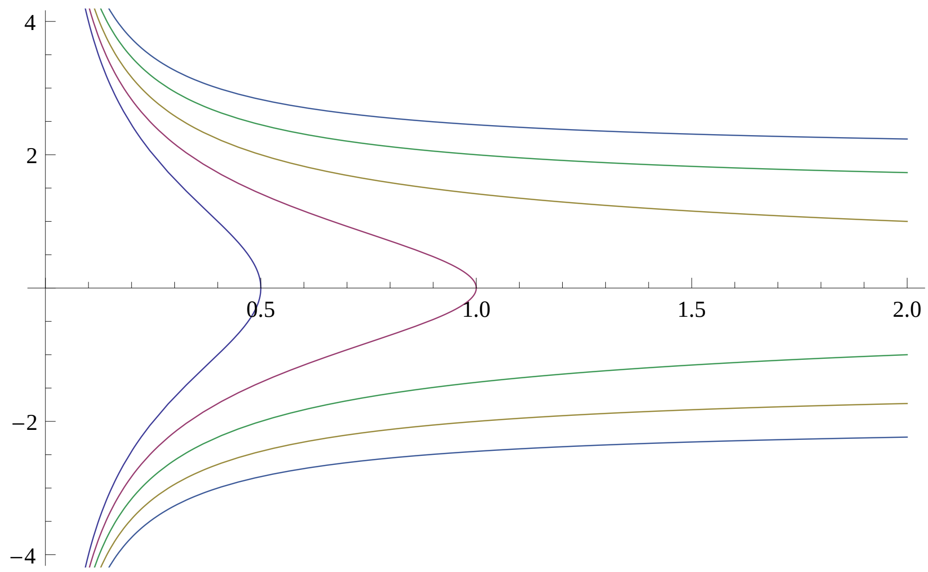
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{Gm}{x}$$
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$
$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} - \frac{Gm}{x}$$

b)

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{Gm}{x}$$

ist konstant, die Bahnen in Phasenraum haben also die Gestalt

$$p = \sqrt{2m}\sqrt{E + \frac{Gm}{x}}$$



5 Aufgabe 5

a)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + mgr\cos\phi - \frac{D}{2}r^2$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mgr\sin\phi = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi + Dr = 0$$

c) Gleichgewichtslage: $\ddot{\phi} = \dot{\phi} = \ddot{r} = \dot{r} = 0$

$$mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mgr\sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi + Dr = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{mg}{D}$$

d) Entwickle die Bewegungsgleichungen um r_0 und ϕ_0

$$r = r_0 + x \qquad \phi = \phi_0 + \psi$$

$$0 = mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mgr\sin\phi \approx m(r_0+x)^2\ddot{\psi} + 2m(r_0+x)\dot{x}\dot{\psi} + mg(r_0+x)\psi \approx mr_0^2\ddot{\psi} + mgr_0\psi$$

$$0 = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi + Dr \approx \ldots \approx m\ddot{x} + Dx$$

Mit der Definition von r_0 und $\omega_0^2 = D/m$ folgt:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \quad \ddot{\psi} + \omega_0^2\psi = 0$$

mit der Lösung

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$
$$\psi(t) = c_3 \cos \omega_0 t + c_4 \sin \omega_0 t$$