Modulprüfung zur Klassischen Theoretischen Physik II

Prof. Dr. J. Kühn (Institut für Theoretische Teilchenphysik) Mittwoch, 19.10.2011, 16:00 – 19:00
Dr. P. Marquard (Institut für Theoretische Teilchenphysik)

Wichtig: Schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen und ihre Matrikelnummer.
Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Aufgabe 1: 13 Punkte

Hinweis: Die Fragen in dieser Aufgabe können alle unabhängig voneinander und kurz beantwortet werden.

a) Gegeben sei eine Lagrangedichte L, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Zeigen Sie, dass es dann eine Erhaltungsgröße gibt, die üblicherweise als Energie interpretiert wird.

b) Ein Massenpunkt mit Masse m bewege sich auf einer Kugeloberfläche (Radius R). Wieviele und welche Freiheitsgrade liegen vor? Es wirken keine weiteren Kräfte. Geben Sie die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange Gleichungen an. Eliminieren Sie einen Freiheitsgrad und führen Sie das Problem auf **eine** DGL zweiten Grades zurück.

c) Die Poisson-Klammer sei definiert durch

$$\{A, B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} - \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} \right) .$$

Berechnen Sie folgende Poisson-Klammern

(i) $\{L_i, q_j\}$ mit dem Drehimpuls $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$,

(ii) $\{V, L_x\}$, wobei $V = V(\vec{q}^{\,2})$.

d) Zwei Massenpunkte bewegen sich auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius R_1 bzw. R_2 in einem Potential der Form $V(r) = \lambda r^{-\frac{1}{2}}$. In welchem Verhältnis stehen die Umlaufzeiten? In welchem Verhältnis stehen die mittlere kinetische und potentielle Energie in diesem Fall?

e) Ein Massenpunkt bewege sich in dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \lambda x & x \geq 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

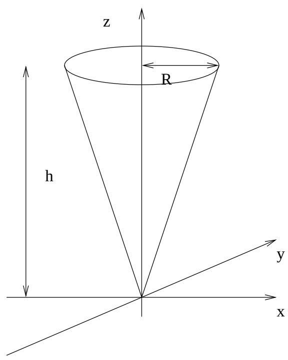
mit $\lambda > 0$. Zeichnen Sie das Phasenraumdiagramm.

Aufgabe 2: 10 Punkte

Berechnen Sie die Trägheitstensoren der folgenden Objekte bezüglich ihres Schwerpunktes, legen Sie das Koordinatensystem in die Hauptträgheitsachsen. Geben Sie zunächst die Massendichte an.

a) homogener Quader mit Seitenlängen a, b, c und Masse M,

b) homogener Kegel mit Höhe h, Radius der Grundfläche R und Masse M.



Der Quader aus a) rotiere nun mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse $\vec{n} = (1, 2, 2)/3$. Geben Sie für diesen Fall den Drehimpuls und die Rotationsenergie an.

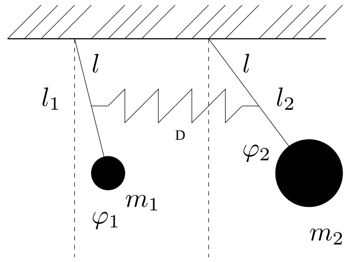
(bitte wenden)

Modulprüfung zur Klassischen Theoretischen Physik II

Prof. Dr. J. Kühn (Institut für Theoretische Teilchenphysik) Mittwoch, 19.10.2011, 16:00 – 19:00
Dr. P. Marquard (Institut für Theoretische Teilchenphysik)

Aufgabe 3: 10 Punkte

Betrachten Sie zwei gekoppelte Pendel wie in nebenstehender Abbildung. Die Feder habe die Federkonstante D und sei im Abstand l befestigt. Die Ruhelage ist $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.



a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und stellen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auf.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall $m_1 = m_2 = m$ und $2l = l_1 = l_2 = l_0$. Berechnen Sie hierzu die Fundamentalschwingungen und geben Sie die allgemeinste Lösung an. Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = \varphi_0$, $\varphi_2(0) = \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Diskutieren Sie das zeitliche Verhalten der Lösung.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Aufgabe 4: 10 Punkte

a) Gegeben sei die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + k^2 x(t) + \lambda\dot{x}(t) = f_0 \sin(\Omega t)\,.$$

Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung für $x(t)$.
Hinweis: Machen Sie zur Bestimmung der inhomogenen Lösung den Ansatz $x(t) = A\exp(i(\Omega t + \varphi))$.

b) Gegeben sei die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) + k^2 x(t) + \epsilon x^2(t) = 0\,.$$

Lösen Sie die Differentialgleichung in erster Ordnung Störungstheorie für $\epsilon \ll 1$. Verwenden Sie die Anfangsbedingung $\dot{x}(0) = 0$. Nützliche trigonometrische Identitäten sind:

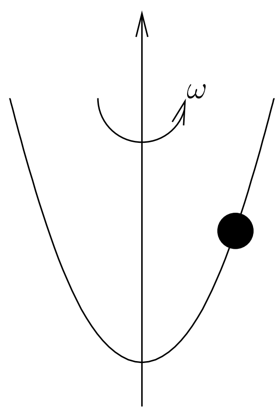
$$\cos^2\phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi), \quad \sin^2\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)\,.$$

Aufgabe 5: 5 Punkte

Eine Perle mit Masse m kann reibungslos auf einem Draht der Form

$$z(r) = \frac{a}{2}r^2\,, \quad a > 0\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gleiten. Der Draht rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Die Perle befinde sich zusätzlich im Schwerefeld der Erde.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichung auf.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $r \ll 1$.