KIT **SS 2012**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 1 – Lösung

01. August 2012, 17-19 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen (*2+2+2+4=10 Punkte*)

(a) Zwangsbedingungen beschreiben Einschränkungen der Bewegungsfreiheit des Systems. Mögliche Arten sind:

- holonom:
  Z. kann geschrieben werden als $A_\mu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$
- nicht-holonom:
  Z. kann nicht durch o.a. Form ausgedrückt werden, z.B. geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingung
- skleronom:
  $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$
- rheonom:
  $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} \neq 0$

Für die Anzahl der Freiheitsgrade gilt: $f = 3N - N_Z$.

(b) Falls q_i eine zyklische Koordinate ist, ist L unabhängig von q_i, also $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$. Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.} = p_i$$

p_i bezeichnet den verallgemeinerten Impuls.

(c) Wir definieren $L' = c \cdot L$. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} \\ &= c \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \ . \end{aligned}$$

Da $c \neq 0$, muss der Ausdruck innerhalb der Klammer 0 sein, was die ursprüngliche Bewegungsgleichung für L ist. Die Bewegungsgleichungen bleiben somit unverändert.

(d) Drehen von $\vec{e}_z = (0,0,1)^T$ um die Eulerwinkel liefert $\vec{e}_z$ in der Basis der $\vec{e}_i$.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_z &= D_\psi D_\vartheta D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Rotierender Quader (*12+3+10=25 Punkte*)

(a) Zunächst berechnen wir die Dichte des Quaders:

$$M = \int_V \mathrm{d}^3 r \varrho = \varrho \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}} \mathrm{d}z = \varrho abc$$

$$\varrho = \frac{M}{abc}$$

Komponenten des Trägheitstensors:

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \int_V \mathrm{d}^3 r \varrho (y^2 + z^2) \\
&= \varrho a \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}} \mathrm{d}z (y^2 + z^2) \\
&= \varrho a \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \left[y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{\frac{-c}{2}}^{\frac{c}{2}} \\
&= \varrho ac \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathrm{d}y \left(y^2 + \frac{c^2}{12} \right) \\
&= \varrho abc \left(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12} \right) \\
&= \frac{M}{12} \left(b^2 + c^2 \right)
\end{aligned}$$

Die Berechnung der anderen Diagonalelemente erfolgt analog:
$\Theta_{yy} = \frac{M}{12} \left(a^2 + c^2 \right)$
$\Theta_{zz} = \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2 \right)$

Die Außerdiagonalelemente verschwinden, wie man sofort erkennen kann. Explizite Rechnung bestätigt dies:

$$\begin{aligned}
\Theta_{xy} &= - \int_V \mathrm{d}^3 r \varrho xy \\
&= - \varrho c \int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und analog für die anderen Außerdiagonalelemente.
Der vollständige Trägheitstensor lautet also

$$\Theta = \frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} .$$

(b) Gesucht ist der Trägheitstensor um eine um den folgenden Vektor verschobene Achse: $\vec{v} = \frac{c}{2}\vec{e}_z$
Berechnung mit Hilfe des Satz von Steiner angewandt auf Θ_{xx}

$$\begin{aligned}\Theta'_{xx} &= \Theta_{xx} + M\left(\vec{v}^2 - v_1 v_1\right)\\ &= \frac{M}{12}\left(b^2+c^2\right) + M\frac{c^2}{4}\\ &= \frac{M}{12}\left(b^2+4c^2\right)\end{aligned}$$

(c) Rotationsenergie:

$$T = \frac{1}{2}\Theta'_{xx}\dot{\varphi}^2 = \frac{M}{24}\left(b^2+4c^2\right)\dot{\varphi}^2$$

Potentielle Energie durch Schwerkraft (wirkt auf Schwerpunkt des Quaders, Nullpunkt gewählt im Aufhängepunkt):

$$U = Mg\frac{c}{2}\left(1-\cos\varphi\right)$$

also

$$L = T - U = \frac{M}{24}\left(b^2+4c^2\right)\dot{\varphi}^2 - \frac{Mgc}{2}\left(1-\cos\varphi\right)$$

Einsetzen in die Lagrangegleichungen führt auf die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{M}{12}\left(b^2+4c^2\right)\ddot{\varphi}\\ \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= \frac{Mgc}{2}(-\sin\varphi) = -\frac{Mgc}{2}\varphi\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $\sin\varphi \sim \varphi$ für kleine Auslenkungen benutzt haben.

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{6gc}{b^2+4c^2}\varphi$$

Mit dem üblichen Ansatz für Schwingungen

$$\varphi = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{6gc}{b^2+4c^2}}$$

und damit als Lösung

$$\varphi = A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{6gc}{b^2+4c^2}}t + \varphi_0\right)$$

Aufgabe 3: Longitudinale Molekülschwingungen (*5+13+21+6+5=50 Punkte*)

(a) Die x_i bezeichnen die Auslenkungen aus der Ruhelage. Damit ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2$$

und die potentielle durch die beiden Federn als

$$U = \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{\kappa}{2}(x_2 - x_3)^2 \quad ,$$

was zusammen auf die Lagrangefunktion führt:

$$L = T - U = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{\kappa}{2}(x_1^2 + x_3^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_3x_2) \ .$$

(b) Aus der Transformation

$$x_i^* = x_i + \varepsilon v_0 t \quad , \qquad\qquad t^* = t$$

lassen sich die folgenden Größen, die in den Gleichungen für das Noether-Theorem vorkommen, berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^* &= \dot{x}_i + \varepsilon v_0 & \qquad \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} &= 1 \\ \psi_i &= v_0 t & \varphi &= 0 \\ \dot{\psi}_i &= v_0 \ . \end{aligned}$$

Zuerst muss geprüft werden, ob die Bedingungen des Noether-Theorems erfüllt sind:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(L(x_i^*, \dot{x}_i^*, t^*)\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right)_{\varepsilon=0} \\ &\quad = \frac{\partial L}{\partial x_i}\psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{\psi}_i \\ &\quad = -\frac{\kappa}{2}\left(2(x_1 - x_2) + 2(x_2 - x_1) + 2(x_2 - x_3) + 2(x_3 - x_2)\right) v_0 t \\ &\qquad + \left(\frac{m_A}{2}(2\dot{x}_1 + 2\dot{x}_3) + \frac{m_B}{2}2\dot{x}_2\right) v_0 \\ &\quad = \left(m_A(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) + m_B\dot{x}_2\right) v_0 \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\left(m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2\right) v_0\right)}_{=f} \ . \end{aligned}$$

Das Ergebnis lässt sich also als eine totale Zeitableitung schreiben und die Bedingung des verallgemeinerten Noether-Theorems ist erfüllt.

Dies setzen wir nun in die Formel für die Noether-Ladung ein:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i - f \\ &= (m_A(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) + m_B\dot{x}_2)\, v_0 t - (m_A(x_1 + x_3) + m_B x_2)\, v_0 \ . \end{aligned}$$

Die erhaltene Größe ist die Schwerpunktsbewegung des Systems, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegt.
Eine weitere Erhaltungsgröße ist z.B. die Energie, da $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

(c) Einsetzen der Lagrangefunktion in die Lagrangegleichung führt zu den Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_A \ddot{x}_1 & \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \kappa(x_2 - x_1) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} &= m_B \ddot{x}_2 & \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \kappa(x_1 + x_3 - 2x_2) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} &= m_A \ddot{x}_3 & \frac{\partial L}{\partial x_3} &= \kappa(x_2 - x_3) \ , \end{aligned}$$

welche in Matrixform umgeschrieben werden können:

$$\ddot{\vec{x}} = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{m_A} & -\frac{\kappa}{m_A} & 0 \\ -\frac{\kappa}{m_B} & 2\frac{\kappa}{m_B} & -\frac{\kappa}{m_B} \\ 0 & -\frac{\kappa}{m_A} & \frac{\kappa}{m_A} \end{pmatrix}}_{M} \vec{x}$$

Dies hat die Form eines harmonischen Oszillators und kann mit dem Schwingungsansatz gelöst werden:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \Rightarrow \ddot{\vec{x}} &= -\omega^2 \vec{x} \end{aligned}$$

Für die Eigenfrequenzen müssen die Eigenwerte von M bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda \mathbb{1}) \\ &= \left(\frac{\kappa}{m_A} - \lambda\right)^2 \left(2\frac{\kappa}{m_B} - \lambda\right)^2 - \frac{\kappa}{m_A}\frac{\kappa}{m_B}\left(\frac{\kappa}{m_A} - \lambda\right) \cdot 2 \\ &= -\lambda^3 + \left(2\frac{\kappa}{m_A} + 2\frac{\kappa}{m_B}\right)\lambda^2 - \left(\left(\frac{\kappa}{m_A}\right)^2 + 2\frac{\kappa}{m_A}\frac{\kappa}{m_B}\right)\lambda \\ \Rightarrow& \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow& \lambda^2 - 2\lambda\left(\frac{\kappa}{m_A} + \frac{\kappa}{m_B}\right) + \frac{\kappa}{m_A}\left(\frac{\kappa}{m_A} + 2\frac{\kappa}{m_B}\right) = 0 \\ \lambda_{2,3} &= \frac{\kappa}{m_A} + \frac{\kappa}{m_B} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa}{m_A} + \frac{\kappa}{m_B}\right)^2 - \frac{\kappa}{m_A}\left(\frac{\kappa}{m_A} + 2\frac{\kappa}{m_B}\right)} \\ &= \frac{\kappa}{m_A} + \frac{\kappa}{m_B} \pm \frac{\kappa}{m_B} \ . \end{aligned}$$

Damit lauten die drei Eigenfrequenzen

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0\\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{\kappa}{m_A}}\\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{\kappa}{m_A}+2\frac{\kappa}{m_B}}\ .\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Eigenschwingungen müssen wir nun die zugehörigen Eigenvektoren von M berechnen. Römische Ziffern bezeichnen im folgenden die jeweilige Zeile des Gleichungssystems, aus der die Gleichung stammt:
λ_1:

$$M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \text{I)}\ x_1=x_2 \qquad \text{III)}\ x_2=x_3$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

λ_2:

$$\left(M-\frac{\kappa}{m_A}\mathbb{1}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \text{I)}\ x_2=0 \qquad \text{II)}\ x_1=-x_3$$
$$\Rightarrow \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

λ_3:

$$\left(M-\left(\frac{\kappa}{m_A}+2\frac{\kappa}{m_B}\right)\mathbb{1}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\vec{0}$$
$$\Rightarrow \text{I)}\ x_2=-2\frac{m_A}{m_B}x_1 \qquad \text{III)}\ x_2=-2\frac{m_A}{m_B}x_3 \qquad \Rightarrow x_1=x_3$$
$$\Rightarrow \vec{v}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\frac{m_A}{m_B}\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m_A}{m_B}}}$$

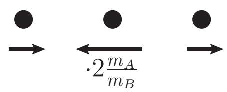
(d) $\omega_1 = 0$:

Translationsbewegung des gesamten Systems. Alle Federn bleiben stets entspannt.

$\omega_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_A}}$:

Die äußeren beiden Massen schwingen gegeneinander.

$\omega_3 = \sqrt{\frac{\kappa}{m_A} + 2\frac{\kappa}{m_B}}$:



Die äußeren beiden Massen schwingen gleichphasig, die mittlere dagegen mit einer gerade so großen Amplitude, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleibt (z.B. doppelt so groß im Spezialfall drei identischer Massen)

(e) Da $\omega_1 = 0$, funktioniert hier der Schwingungsansatz nicht. Da die Zeitabhängigkeit herausfällt, bleibt effektiv nur mehr eine Integrationskonstante übrig. Wir benötigen stattdessen einen Ansatz für

$$\ddot{x} = 0 \qquad \Rightarrow x = C_1 t + C_0 \ .$$

Also lautet die allgemeine Lösung für die Auslenkungen der drei Massen

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) = &\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (C_1 t + C_0) \\
&+ A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m_A}} t + \varphi_{20}\right) \\
&+ A_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m_A}{m_B} \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m_A} + 2\frac{\kappa}{m_B}} t + \varphi_{30}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Das Problem der Dido (*6+6+11+6+6=35 Punkte*)

Hintergrund zum Aufgabentitel:
Im Jahre 814 v. Chr. landete die vertriebene Prinzessin Dido von Tyros der Sage nach auf der Flucht an der Küste Nordafrikas, wo ein spöttischer Lokalfürst ihr soviel Land zubilligte, „wie unter die Haut eines Ochsen passt“. Die gerissene Prinzessin zerschnitt das Leder in feine Streifen und umspannte damit einen ganzen Landstrich von Küste zu Küste, auf dem sie später die phönizische Siedlung Karthago gründete. In welche Form legte Dido den Hautstreifen?

(a) Aus der Aufgabenstellung lassen sich zwei Bedingungen herauslesen:

- Fläche unter dem Seil ist maximal

$$J[y] = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, y(x) = \text{maximal} \tag{1}$$

- Länge des Seils ist fest

$$L = \int_1^2 \mathrm{d}s = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \sqrt{1+y'^2} = K[y] = \text{const.} \tag{2}$$

Wir haben also ein Variationsproblem mit isoperimetrischer Nebenbedingung mit den Funktionen

$$\begin{aligned} F &= y \\ G &= \sqrt{1+y'^2}\ . \end{aligned}$$

(b) Die Nebenbedingung wird mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators in die zu maximierende Funktion F eingebaut:

$$F \to \tilde{F} = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

Da $\tilde{F}$ keine explizite x-Abhängigkeit besitzt, können wir benutzen:

$$\tilde{F} - y'\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = \text{const.}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= C \\ (y-C)\sqrt{1+y'^2} &= \lambda\left(y'^2 - \left(1+y'^2\right)\right) = -\lambda \\ \sqrt{1+y'^2} &= \frac{-\lambda}{y-C} \\ y' &= \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{(y-C)^2} - 1} \end{aligned}$$

(c) Wir betrachten zunächst nur den Bereich $x > 0$, in dem gilt $y' < 0$. Die Gleichung der vorhergehenden Teilaufgabe wird durch Separation der Variablen integriert, wobei wir die Größe $y_0 = y(x = 0)$ einführen

$$\int_0^x \mathrm{d}x = -\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}\tilde{y} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{(\tilde{y}-C)^2} - 1}}$$

Auf der rechten Seite substituieren wir $y^* = \tilde{y} - C$

$$\begin{aligned}
x &= -\int_{y_0-C}^{y-C} \mathrm{d}y^* \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{y^{*2}} - 1}} \\
&= -\int_{y_0-C}^{y-C} \mathrm{d}y^* \frac{y^*}{\sqrt{\lambda^2 - y^{*2}}} \\
&= \left[\sqrt{\lambda^2 - y^{*2}}\right]_{y_0-C}^{y-C} \\
&= \sqrt{\lambda^2 - (y-C)^2} - \sqrt{\lambda^2 - (y_0 - C)^2} \\
x &= \sqrt{\lambda^2 - (y-C)^2} - b
\end{aligned}$$

mit $b^2 = \lambda^2 - (y_0 - C)^2$. Diese Gleichung lösen wir nach y auf:

$$\begin{aligned}
(x+b)^2 &= \lambda^2 - (y-C)^2 \\
(y-C)^2 &= \lambda^2 - (x+b)^2 \\
y &= C + \sqrt{\lambda^2 - (x+b)^2}
\end{aligned}$$

(d) Die gerade gewonnene Lösung setzen wir in y' ein. Da y an der Stelle $x = 0$ ein Maximum hat, also $y'(0) = 0$, lässt sich daraus eine Bedingung an die noch zu bestimmenden Parameter gewinnen.

$$\begin{aligned}
y'(0) &= \pm\sqrt{\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - b^2} - 1} \\
&= \pm\sqrt{\frac{b^2}{\lambda^2 - b^2}} = 0 \\
&\Rightarrow b = 0 \\
&\Rightarrow y = C + \sqrt{\lambda^2 - x^2}
\end{aligned}$$

Für den Bereich $x < 0$ gilt aus Symmetriegründen $y(-x) = y(x)$. Da x in obenstehender Gleichung nur quadratisch vorkommt, ist diese folglich für alle x gültig. Formen wir diese noch etwas um

$$x^2 + (y-C)^2 = \lambda^2 \ ,$$

führt dies auf die Bahngleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, C)$ und Radius λ.

(e) Eine Bedingung erhalten wir aus den Endpunkten, da beide auf dieselbe Gleichung führen (die zweite Bedingung aus den Endpunkten hatten wir schon implizit durch die Symmetrieüberlegungen benutzt)

$$y(a) = C + \sqrt{\lambda^2 - a^2} = 0$$
$$\Rightarrow C = -\sqrt{\lambda^2 - a^2}$$

Die zweite Bedingung liefert die Seillänge

$$\begin{aligned} L &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2} - 1} \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} \\ L &= 2\lambda \arcsin\left(\frac{a}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Dies ist eine transzendente Gleichung, die analytisch nur für spezielle Werte von a und λ weiter vereinfacht werden kann.