MODULPRÜFUNG ZUR KLASSISCHEN THEORETISCHEN PHYSIK II

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik, TTP)
Dr. M. Brucherseifer (TTP)

Mittwoch, 24.07.2013, 17:00 – 20:00

- Die Klausurergebnisse werden unter untenstehender Identifikationsnummer bis am 26.07.13 auf der Homepage der Vorlesung und durch Aushang veröffentlicht.
- Die Einsicht der Klausur findet am 29.07.13 von 9:00 – 11:00 Uhr im kleinen Hörsaal B statt.

Aufgabe 1: 12 Punkte

Hinweis: Die Fragen in dieser Aufgabe können alle unabhängig voneinander und kurz beantwortet werden.

a) Erläutern Sie in wenigen Worten die Aussage des Noether-Theorems.

b) Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Diese Lagrangefunktion sei invariant unter den folgenden Transformationen. Gibt es Erhaltungsgrößen? Wenn ja, welche? (Herleitung ist nicht verlangt.)

- räumliche Translationen: $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}, \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^3$
- Drehungen im Raum: $\vec{x} \to R\vec{x}, \quad R \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $R^T R = 1$ und $\det(R) = +1$
- Raumspiegelung $\vec{x} \to -\vec{x}$

c) Wie lauten die kanonischen Gleichungen zu einer Hamiltonfunktion $H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t)$?
Es seien im Folgenden f und g Funktionen von $(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t)$. Die Poisson-Klammer von f und g ist definiert als

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

d) Welche Aussage können Sie über die Relationen der Eigenwerte des Trägheitstensors (I_x, I_y, I_z) eines langen, sehr dünnen Stabs machen. Nehmen Sie an, dass der Stab entlang der z-Richtung des Koordinatensystems liegt.

e) Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{\lambda}{2}x^2,$$

und den Anfangsbedingungen $\dot{x}(t=0) = 0$ und $x(t=0) = x_0$.

- Leiten Sie die Hamiltonfunktion des obigen Oszillators her.
- Was erhalten Sie für $\frac{dH}{dt}$?
- Was erhalten Sie für $\frac{dL}{dt}$?

Aufgabe 2: 8 Punkte

Betrachten Sie ein mathematisches Pendel mit Länge l und Masse m mit beliebigem Ausschlag. Die Energie des Pendels in Ruhelage sei $E_0 = 0$.

a) Leiten Sie die Energie als Funktion der Auslenkung θ und des dazu verallgemeinerten Impuls p_θ her.

b) Bestimmen und zeichnen Sie Bahnen im Phasenraum für drei verschiedene Energien (i) $E \ll 2mgl$, (ii) $E = 2mgl$ und (iii) $E \gg 2mgl$. Hier bezeichnet g die Erdbeschleunigung.
Hinweis: Benutzen Sie die Identität $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ und nähern Sie $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2}$ für $x \ll 1$.

MODULPRÜFUNG ZUR KLASSISCHEN THEORETISCHEN PHYSIK II

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik, TTP)
Dr. M. Brucherseifer (TTP)

Mittwoch, 24.07.2013, 17:00 – 20:00

Aufgabe 3: 8 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m, das sich auf der Oberfläche eines unendlich langen Zylinders mit Radius R bewegen muss. Die z-Achse ist die Symmetrieachse des Zylinders und auf das Teilchen wirkt eine Kraft $\vec{F} = -k\vec{x}$, die zum Ursprung des Koordinatensystems gerichtet ist.

a) Wie lautet die Lagrangefunktion des Sy ordinaten (r, ϕ, z)?
Systems in Zylinderkoordinaten

b) Bestimmen Sie die zu z und ϕ verallgemeinerten Impulse und berechnen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion.

c) Welche Erhaltungsgrößen liegen vor? Berechnen Sie die Bewegung des Teilchens mit den Anfangsbedingungen $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ und $\dot{\phi}(0) = \omega$.

Aufgabe 4: 8 Punkte

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens mit Masse m in einem konstanten Gravitationsfeld mit Beschleunigung g in einer Dimension (Koordinate z).

a) Wie lautet die Lagrangefunktion?

b) Bestimmen Sie den zu z verallgemeinerten Impuls p. Wie lautet die Energie E als Funktion von p und z?

c) Skizzieren Sie die Bewegung im Phasenraum (z, p) für drei verschiedene Energien $E_+ > 0$, $E_0 = 0$ und $E_- = -E_+$.

d) Berechnen Sie das zu einem bestimmten Zeitpunkt durch $p_1 < p < p_2$ und $E_1 < E < E_2$ definierte Phasenraumvolumen $\Phi = \int dp\, dz$.

e) Benutzen Sie die kanonischen Gleichungen um die zeitliche Entwicklung des obigen Phasenraumvolumens zu berechnen.

Aufgabe 5: 12 Punkte

Betrachten Sie ein zweidimensionales Koordinatensystem x, z mit zwei Massen M und m. Die Masse M kann sich durch eine Schiene nur auf der x-Achse bewegen. Die Masse m sei durch eine masselose Stange der Länge l mit der Masse M verbunden und bewege sich im Gravitationsfeld der Erde (Beschleunigung g) (siehe nebenstehende Abbildung).

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

b) Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen?

c) Gibt es Erhaltungsgrößen? Wenn ja, welche?

d) Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage (d.h. Sie können Terme der Ordnung φ^2, $\dot{\varphi}^2$ und $\varphi\dot{\varphi}$ vernachlässigen). Was passiert im Fall $M \gg m$?