KIT **SS 2014**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 1

28. Juli 2014, 17-19 Uhr

Name

Matrikelnummer *Code für Ergebnisse*

Aufgabe	Punkte	Zeichen
1	/ 8	
2	/ 42	
3	/ 20	
4	/ 20	
5	/ 10	
$\sum$	/100	

Hinweise

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Neue Aufgabe bitte auf neuer Seite anfangen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

Formelsammlung

Werte:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1: Kurzfragen (*2+2+2+2=8 Punkte*)

(a) Was sind verallgemeinerte Koordinaten? Wie viele gibt es?

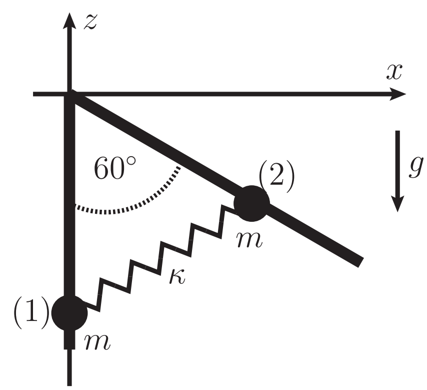
(b) Was besagt das Noether-Theorem (in Worten)?

(c) Welche 10 Erhaltungsgrößen findet man für ein freies Teilchen bei Anwendung der Galilei-Transformationen?

(d) Wie lautet der Satz von Steiner und was ist seine Bedeutung?

Aufgabe 2: Massen und Feder (*12+4+5+8+5+8=42 Punkte*)

Zwei punktförmige Körper gleicher Masse m bewegen sich im homogenen Schwerefeld g der Erde reibungsfrei auf zwei Drähten, von denen Massenpunkt 1 vertikal verläuft und Massenpunkt 2 um $60°$ gegen die Vertikale geneigt ist (s. Skizze). Eine ideale Feder mit Federkonstante κ verbindet die beiden Massen. Im entspannten Zustand habe die Feder die Länge $L = 0$. Es wirken keine weiteren Kräfte.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in den vertikalen Auslenkungen z_1, z_2 der beiden Massen auf.

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.

(c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage $z_{i,0}$, in der auf beide Massenpunkte keine Kraft wirkt.

(d) Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen ist es sinnvoll, Koordinaten $\xi_i = z_i - z_{i,0}$ zu wählen, die die Auslenkung der Massen aus ihren Ruhelagen beschreiben. Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion in diesen Koordinaten

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 + 4\xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2\right) + \text{const.}$$

ist.

(e) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems, indem Sie die Bewegungsgleichungen, die aus (d) folgen, in Matrixform bringen.

(f) Wie lautet folglich die allgemeine Lösung für die Auslenkungen ξ_i? Interpretieren Sie die auftretenden Schwingungsmoden.

Aufgabe 3: Noether-Theorem (*2+11+7=20 Punkte*)

Gegeben ist ein Teilchen der Masse m im Potential $U(x,y,z) = U_0 \cdot \left(x \sin\left(2\pi \frac{z}{R}\right) + y \cos\left(2\pi \frac{z}{R}\right)\right)$, wobei U_0 und R konstant sind.

(a) Was ist die Bedingung für zyklische Koordinaten? Gibt es welche?

Betrachten Sie nun die Transformation

$$x \to x^* = x + y \sin\epsilon \qquad z \to z^* = z + \frac{R}{2\pi}\epsilon$$
$$y \to y^* = y - x \sin\epsilon \qquad t \to t^* = t\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass diese Transformation die Bedingungen des (evtl. verallgemeinerten) Noether-Theorems erfüllt.

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Noether-Ladung. Nehmen Sie dabei ϵ jetzt als klein an. Finden Sie eine weitere Erhaltungsgröße des Systems.

Aufgabe 4: Geodäte auf dem Zylinder (*7+7+6=20 Punkte*)

Gegeben seien zwei Punkte S (φ_S,z_S) und E (φ_E,z_E) auf einem in z-Richtung unendlich ausgedehnten Zylinder mit festem Radius R, parametrisiert durch die Zylinderkoordinaten-Variablen φ und z. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten.

(a) Stellen Sie die Bedingung an die Verbindungslinie als Gleichung auf.

(b) Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die zugehörige Funktion $F(z, z', \varphi)$ auf und integrieren Sie diese einmal. Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis als $z' = C$ mit einer Konstanten C schreiben lässt. Eine Vorzeichenambiguität darf ohne weitere Begründung in C absorbiert werden.
Integrieren Sie dann nochmals, um eine Gleichung für die Bahnkurve $z(\varphi)$ zu erhalten. Integrationskonstanten müssen an dieser Stelle nicht explizit bestimmt werden.

(c) Berechnen Sie die Länge der Verbindung. Eliminieren Sie dann verbleibende Integrationskonstanten, sodass das Ergebnis nur von φ_S, z_S, φ_E und z_E abhängt.

Aufgabe 5: Zweilagiger Zylinder (*10 Punkte*)

Ein Zylinder der Höhe h und Masse m besteht aus zwei konzentrischen Lagen. Die innere Lage bis zum Radius r besitzt eine Dichte ρ_i, die äußere Lage zwischen Radius r und R eine Dichte $\rho_a = 2\rho_i$. Die Lagen selbst besitzen eine homogene Massendichte. Bestimmen Sie die Rotationsenergie des Zylinders, wenn er sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Symmetrieachse dreht, als Funktion von m, r, R, h und ω.
Benötigte Elemente des Trägheitstensors sollen dabei explizit berechnet werden, ohne auf evtl. bekannte Ergebnisse aus den Übungen zurückzugreifen.