Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 1 – Lösung

28. Juli 2014, 17-19 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen (*2+2+2+2=8 Punkte*)

(a) Verallgemeinerte Koordinaten sind Koordinaten, die die Zwangsbedingungen des Systems automatisch berücksichtigen. Die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems: $f = 3N - N_Z$ mit N Massenpunkten und N_Z Zwangsbedingungen.

(b) Das Noethertheorem besagt, dass es zu jeder infinitesimalen Transformation, die die Lagrange-Gleichung invariant lässt, eine zugehörige Erhaltungsgröße gibt.

(c)
- Impulserhaltung (3): $m\dot{\vec{r}}$
- Drehimpulserhaltung (3): $m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$
- Energieerhaltung (1): $\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$
- Schwerpunktsbewegung (3) : $\vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot t + \vec{r}_0$

(Die Angabe der Begriffe ist ausreichend.)

(d) Der Satz von Steiner beschreibt die Berechnung des Trägheitstensor Θ' um einen beliebigen Punkt P ausgehend vom Trägheitstensor Θ um den Schwerpunkt S:

$$\Theta' = \Theta + M \left(\vec{a}^2 \mathbb{1} - \vec{a}\vec{a}^{\mathrm{T}}\right) \quad \text{mit } \vec{a} = \overrightarrow{SP}\,.$$

Aufgabe 2: Massen und Feder (*12+4+5+8+5+8=42 Punkte*)

(a) Die kinetische Energie des Systems ist

$$T_1 = \frac{m}{2}\dot{z}_1^2$$
$$T_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{m}{2}(3\dot{z}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{m}{2}4\dot{z}_2^2$$

mit

$$\frac{z_2}{x_2} = \tan(-30^\circ) = \frac{\sin(-30^\circ)}{\cos(-30^\circ)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; x_2 = -\sqrt{3}z_2\,.$$

Für die potentielle Energie benötigen wir den Abstand der beiden Massenpunkte

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 3z_2^2 + (z_2 - z_1)^2 = 4z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2\,,$$

wodurch sich für die Federenergie

$$U_F = \frac{\kappa}{2}l^2 = \frac{\kappa}{2}\left(4z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2\right)$$

ergibt. Der zweite Teil der potentiellen Engergie gibt sich aus der Schwerkraft

$$U_g = mgz_1 + mgz_2\,.$$

Die Lagrangefunktion ist damit

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{z}_1^2 + 4\dot{z}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(4z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2\right) - mg(z_1 + z_2)\,.$$

(b) Für z_1 ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} - \frac{\partial L}{\partial z_1} = m\ddot{z}_1 + \frac{\kappa}{2}(2z_1 - 2z_2) + mg = 0$$
$$\Rightarrow\; \ddot{z}_1 = -\frac{\kappa}{m}(z_1 - z_2) - g$$

und für z_2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} - \frac{\partial L}{\partial z_2} = 4m\ddot{z}_2 + \frac{\kappa}{2}(-2z_1 + 8z_2) + mg = 0$$
$$\Rightarrow\; 4\ddot{z}_2 = -\frac{\kappa}{m}(4z_2 - z_1) - g\,.$$

(c) In der Gleichgewichtslage gilt $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$. Mit den Bewegungsgleichungen ergibt sich

$$-\frac{\kappa}{m}(z_1 - z_2) - g = -\frac{\kappa}{m}(4z_2 - z_1) - g$$
$$2z_1 = 5z_2$$
$$z_1 = \frac{5}{2}z_2\,.$$

Eingesetzt in $\ddot{z}_1 = 0$ finden wir

$$\ddot{z}_1 = -\frac{\kappa}{m}\left(\frac{5}{2}z_2 - z_2\right) - g = 0$$
$$\frac{3}{2}z_2 = -\frac{mg}{\kappa}\,.$$

Damit haben wir für die Gleichgewichtslage

$$z_{2,0} = -\frac{2}{3}\frac{mg}{\kappa} \quad \text{und} \quad z_{1,0} = -\frac{5}{3}\frac{mg}{\kappa}\,.$$

(d) Wir führen nun die Auslenkung aus der Ruhelage ein, $\xi_i = z_i - z_{i,0} \Rightarrow\; z_i = \xi_i + z_{i,0}$ $\Rightarrow\; \dot{\xi}_i = \dot{z}_i$, und setzen dies in die Lagrangefunktion ein:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left((\xi_1 + z_{1,0})^2 - 2(\xi_1 + z_{1,0})(\xi_2 + z_{2,0}) + 4(\xi_2 + z_{2,0})^2\right)$$
$$- mg\left(\xi_1 + \xi_2 + z_{1,0} + z_{2,0}\right)\;.$$

Die Terme unabhängig von ξ tragen nichts zu den Bewegungsgleichungen bei und können deshalb weggelassen werden,

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2\right)\\
&\quad - \frac{\kappa}{2}\left(2\xi_1\left(-\frac{5}{3}\frac{mg}{\kappa}\right) - 2\xi_1\left(-\frac{2}{3}\frac{mg}{\kappa}\right) - 2\xi_2\left(-\frac{5}{3}\frac{mg}{\kappa}\right) + 8\xi_2\left(-\frac{2}{3}\frac{mg}{\kappa}\right)\right)\\
&\quad - mg\left(\xi_1 + \xi_2\right)\\
&= \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2\right)\\
&\quad + \frac{mg}{2\cdot 3}\left(\xi_1(10 - 4 - 6) + \xi_2(-10 + 16 - 6)\right)\\
&= \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + 4\dot{\xi}_2^2\right) - \frac{\kappa}{2}\left(\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2\right)\;.
\end{aligned}$$

(e) Die Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen aus der Ruhelage sind

$$m\ddot{\xi}_1 + \kappa(\xi_1 - \xi_2) = 0$$
$$4m\ddot{\xi}_2 + \kappa(-\xi_1 + 4\xi_2) = 0$$

und damit in Matrixform

$$\begin{pmatrix}\ddot{\xi}_1\\ \ddot{\xi}_2\end{pmatrix} = -\frac{\kappa}{m}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}}_{=M}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\;.$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix M,

$$\det(M - \lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0$$
$$\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\; \frac{3}{2}\;,$$

und damit sind die Eigenfrequenzen: $\omega_1^2 = \frac{1}{2}\frac{\kappa}{m}$ und $\omega_2^2 = \frac{3}{2}\frac{\kappa}{m}$.

(f) Wir berechnen den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \ \frac{1}{2} v_{11} = v_{12} \ \Rightarrow \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

und zum Eigenwert $\lambda_1 = \frac{3}{2}$,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \ -\frac{1}{2} v_{21} = v_{22} \ \Rightarrow \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

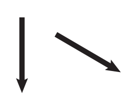
(Die Eigenvektoren stehen hier nicht senkrecht aufeinander, wie man direkt sieht. Diese Eigenschaft gilt im allgemeinen nur für symmetrische Matrizen, was M nicht ist.)
Die allgemeine Lösung mit dem Schwingungsansatz ist

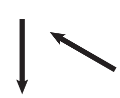
$$\xi_i = A \sin(\omega t + \varphi) \ \Rightarrow \ \omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{2m}}$$
$$\Rightarrow \ \omega_2 = \sqrt{\frac{3\kappa}{2m}}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t + \varphi_1 \right) + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{3\kappa}{2m}} t + \varphi_2 \right) \ .$$

(Die Eigenvektoren müssen hier nicht notwendigerweise normiert werden. Auftretende Normierungsfaktoren können in A_i absorbiert werden.)
Die Auslenkung der Masse 1 aus der Ruhelage in z-Richtung ist stets doppelt so groß wie die Auslenkung der Masse 2.

Für ω_1 schwingen die Massen gleichphasig:  .

Für ω_2 schwingen die Massen gegenphasig:  .

Aufgabe 3: Noether-Theorem *(2+11+7=20 Punkte)*

(a) Die Bedingung für zyklische Koordinaten ist, dass die Lagrangefunktion L nicht von einer verallgemeinerten Koordinate abhängt. Hier ist das nicht der Fall, da L von x, y und z abhängt.

(b) Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U_0 \left(x \sin\left(\frac{2\pi z}{R}\right) + y \cos\left(\frac{2\pi z}{R}\right)\right) \ .$$

Mit den Transformationen

$$\begin{aligned}
x &\to x^* = x + y \sin\epsilon \\
y &\to y^* = y - x \sin\epsilon \\
z &\to z^* = z + \frac{R}{2\pi}\epsilon \\
t &\to t^* = t \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \varphi = 0,\ \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} = 1
\end{aligned}$$

ergibt sich die transformierte Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L^* = \frac{m}{2} &\left((\dot{x} + \dot{y}\sin\epsilon)^2 + (\dot{y} - \dot{x}\sin\epsilon)^2 + \dot{z}^2 \right) \\
&- U_0 \left((x + y\sin\epsilon) \sin\left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon\right) + (y - x\sin\epsilon)\cos\left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon\right)\right) \ .
\end{aligned}$$

Die Bedingung für das (nicht erweiterte) Noether-Theorem,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(L^* \frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right)_{\epsilon=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(L^*\right)_{\epsilon=0} \\
&= \Bigg[m\left((\dot{x} + \dot{y}\sin\epsilon)\,\dot{y}\cos\epsilon + (\dot{y} - \dot{x}\sin\epsilon)\,(-\dot{x}\cos\epsilon)\right) \\
&\quad - U_0 \left(y\cos\epsilon \sin\left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon\right) + (x + y\sin\epsilon)\cos\left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon\right) \right. \\
&\quad \left. - x\sin\epsilon\cos\left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon\right) - (y - x\sin\epsilon)\sin\left(\frac{2\pi z}{R} + \epsilon\right)\right)\Bigg]_{\epsilon=0} \\
&= m\left(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}\right) - U_0 \left(y \sin\left(\frac{2\pi z}{R}\right) + x\cos\left(\frac{2\pi z}{R}\right) \right. \\
&\quad \left. - x\cos\left(\frac{2\pi z}{R}\right) - y\sin\left(\frac{2\pi z}{R}\right)\right) \\
&= 0 \ ,
\end{aligned}$$

ist erfüllt.

(c) Wir nähern jetzt die Transformationen für kleine ϵ,

$$\begin{aligned}
x \to x^* &= x + y\sin\epsilon \approx x + y\epsilon && \Rightarrow \psi_x = y \\
y \to y^* &= y - x\sin\epsilon \approx y - x\epsilon && \Rightarrow \psi_y = -x \\
z \to z^* &= z + \frac{R}{2\pi}\epsilon && \Rightarrow \psi_z = \frac{R}{2\pi}\ ,
\end{aligned}$$

und berechnen damit die Erhaltungsgröße des Noether-Theorems

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\psi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\psi_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\psi_z = m\dot{x}y + my(-\dot{x}) + m\dot{z}\frac{R}{2\pi} \\
&= m\left(\dot{x}y - y\dot{x} + \dot{z}\frac{R}{2\pi}\right)\ .
\end{aligned}$$

Eine weitere Erhaltungsgröße ist die Energie, da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Aufgabe 4: Geodäte auf dem Zylinder *(7+7+6=20 Punkte)*

Startpunkt $S(\varphi_S, z_S)$ und Endpunkt $E(\varphi_E, z_E)$.

(a) Für die Verbindungslinie zwischen Start- und Endpunkt gilt:

$$L = \int_S^E \mathrm{d}s = \min \ .$$

Mit Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi && \Rightarrow \mathrm{d}x = -R\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ z &= R\sin\varphi && \Rightarrow \mathrm{d}y = R\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ x &= z && \Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{d}z \end{aligned}$$

ergibt sich für das Wegelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2} = \sqrt{R^2\sin^2\varphi(\mathrm{d}\varphi)^2 + R^2\cos^2\varphi(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \\ &= \sqrt{R^2(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2} \end{aligned}$$

und damit als Bedingung an die Verbindungslinie zwischen Start- und Endpunkt

$$L = \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} \mathrm{d}\varphi \sqrt{R^2 + z'^2} \ .$$

(b) Wir betrachten also die folgende Funktion

$$F(z, z', \varphi) = \sqrt{R^2 + z'^2} \ ,$$

die nicht von z abhängt, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, und damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z'} &= \text{const.} \\ \frac{2z'}{2\sqrt{R^2 + z'^2}} &= A \\ z'^2 &= A^2(R^2 + z'^2) \\ z'^2(1 - A^2) &= A^2R^2 \\ z' &= \pm\sqrt{\frac{A^2R^2}{(1 - A^2)}} \ . \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Zeile ist konstant und damit können wir schreiben

$$z' = C \ .$$

Nochmaliges Integrieren liefert

$$z = C\varphi + \varphi_0 \ .$$

(c) Für die Verbindungslinie zwischen Start- und Endpunkt gilt damit

$$L = \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} \mathrm{d}\varphi \sqrt{R^2 + z'^2} = \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} \mathrm{d}\varphi \sqrt{R^2 + C^2} = \sqrt{R^2 + C^2}(\varphi_E - \varphi_S) \; .$$

Jetzt bestimmen wir noch die Konstante C mit dem Start- und Endpunkt

$$\begin{aligned} z_E &= C\varphi_E + \varphi_0 \\ z_S &= C\varphi_S + \varphi_0 \\ z_E - z_S &= C(\varphi_E - \varphi_S) \\ C &= \frac{z_E - z_S}{\varphi_E - \varphi_S} \; , \end{aligned}$$

womit sich für die Verbindungslinie

$$L = \sqrt{R^2 + \left(\frac{z_E - z_S}{\varphi_E - \varphi_S}\right)^2}(\varphi_E - \varphi_S) = \sqrt{R^2(\varphi_E - \varphi_S)^2 + (z_E - z_S)^2}$$

ergibt.

Aufgabe 5: Zweilagiger Zylinder (*10 Punkte*)

Zur Bestimmung der Masse bestimmen wir zunächst die Volumina des Innen- und Außenzylinders,

$$\begin{aligned} V_i &= r^2\pi h \\ V_a &= R^2\pi h - r^2\pi h = (R^2 - r^2)\pi h \ . \end{aligned}$$

Damit ist die Masse

$$m = \rho_i V_i + \rho_a V_a = \rho_i V_i + 2\rho_i V_a = \rho_i (r^2 + 2(R^2 - r^2))\pi h \ ,$$

beziehungsweise die Dichte

$$\rho_i = \frac{m}{(2R^2 - r^2)\pi h} \ ,$$

Zur Bestimmung der Rotationsenergie benötigen wir das Element des Trägheitstensors um die z-Achse

$$\begin{aligned} \Theta_{zz} &= \int_0^R \mathrm{d}\tilde{r} \int_0^{2\pi} \tilde{r}\mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \left(\underbrace{x^2 + y^2}_{=\tilde{r}^2} \right) \\ &= h \cdot 2\pi \cdot \left(\int_0^r \mathrm{d}\tilde{r} \rho_i \tilde{r}^3 + \int_r^R \mathrm{d}\tilde{r} \underbrace{\rho_a}_{=2\rho_i} \tilde{r}^3 \right) \\ &= h \cdot 2\pi \cdot \rho_i \cdot \left(\left[\frac{1}{4}\tilde{r}^4 \right]_0^r + 2 \left[\frac{1}{4}\tilde{r}^4 \right]_r^R \right) \\ &= \frac{2m}{2R^2 - r^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2R^4 - r^4) \\ &= \frac{m}{2} \cdot \frac{2R^4 - r^4}{2R^2 - r^2} \ . \end{aligned}$$

Die Rotationsenergie ist damit

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\omega^2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{2R^4 - r^4}{2R^2 - r^2} \cdot \omega^2 \ .$$