KIT **SS 2014**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 2

07. Oktober 2014, 11-13 Uhr

Name

Matrikelnummer *Code für Ergebnisse*

Aufgabe	Punkte	Zeichen
1	/ 10	
2	/ 20	
3	/ 15	
4	/ 20	
5	/ 15	
$\sum$	/ 80	

Hinweise

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Neue Aufgabe bitte auf neuer Seite anfangen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

Formelsammlung

Integrierte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen:

Für $F = F(y, y')$ gilt: $$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Für $F = F(x, y')$ gilt: $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

Aufgabe 1: Kurzfragen (*3+4+3=10 Punkte*)

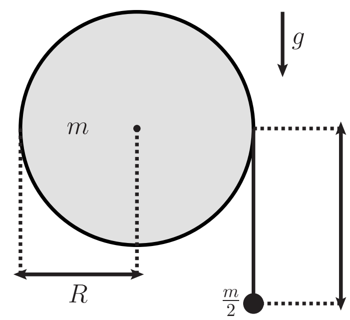
(a) Gegeben ist die Lagrangefunktion
$L(r,\vartheta,\varphi,\dot r,\dot\vartheta,\dot\varphi,t) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot\varphi^2) - V(r)$.
Welche Variablen sind zyklisch? Was sind die zugehörigen kanonischen Impulse?

(b) Häufig hängt die Funktion $F(y,y')$ der Euler-Lagrange-Gleichungen nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:
$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}\ .$$

(c) Was beschreibt der oder die Eulerwinkel? Wie viele gibt es?

Aufgabe 2: Kabeltrommel (*5+6+9=20 Punkte*)

Auf eine Trommel (homogener, massiver Zylinder) mit Radius R, Länge H und Masse m ist ein masseloses, undehnbares Seil gewickelt, an dem ein punktförmiger Körper mit Masse $\frac{m}{2}$ im homogenen Schwerefeld g der Erde hängt. Es wirken keine weiteren Kräfte.



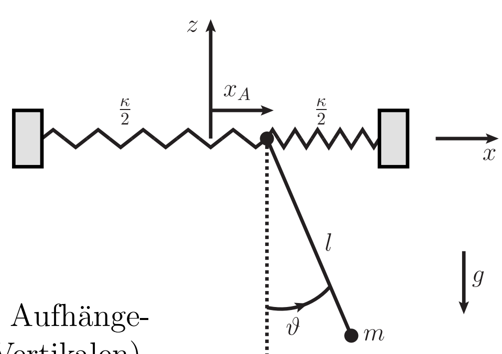
(a) Wie lautet die kinetische Energie T_{rot} der Trommel? Berechnen Sie dafür benötigte Elemente des Trägheitstensors explizit, ohne auf evtl. bekannte Ergebnisse aus den Übungen zurückzugreifen.

(b) Formulieren Sie die Lagrangefunktion des Systems aus Trommel und Körper, ausgedrückt durch die abgerollte Seillänge $l(t)$ und die dazugehörige Geschwindigkeit.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung $l(t=0) = \dot l(t=0) = 0$. Vergleichen Sie mit dem freien Fall des Körpers.

Aufgabe 3: Unruhiges Pendel (*9+6=15 Punkte*)

Der masselose Aufhängepunkt A eines Pendels der Masse m und fester Länge l bewegt sich in horizontaler Richtung im homogenen Schwerefeld g der Erde reibungsfrei auf einer Stange entlang der x-Achse. Zwei Federn mit Federkonstante $\frac{\kappa}{2}$ üben auf diesen Punkt eine Rückstellkraft in die Ruhelage aus, in welcher beide Federn vollkommen entspannt sind.

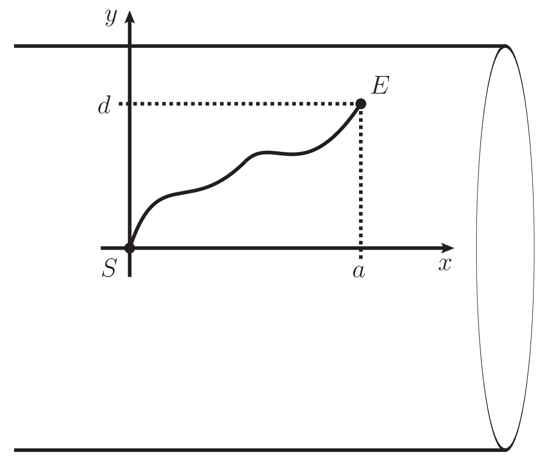


(a) Verwenden Sie die Koordinaten x_A (Auslenkung des Aufhängepunktes) und ϑ (Ablenkwinkel des Pendel aus der Vertikalen), um die Lagrangefunktion aufzustellen.
Lösung: $L = \frac{m}{2}\left(\dot x_A^2 + l^2\dot\vartheta^2 + 2l\cos\vartheta\,\dot x_A\dot\vartheta\right) + mgl\cos\vartheta - \frac{\kappa}{2}x_A^2$

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems daraus ab.

Aufgabe 4: Lichtwellenleiter (*5+4+11=20 Punkte*)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen Lichtstrahl, der sich in einem zylinderförmigen Lichtwellenleiter bewegt. Der zurückgelegte Weg ist durch das Fermatsche Prinzip festgelegt, welches besagt, dass Licht die Bahnkurve mit der kürzesten Laufzeit nimmt. Die Lichtgeschwindigkeit im Medium am Punkt (x, y) ist gegeben durch $v(x, y) = \frac{c}{n(x,y)}$, wobei $c \simeq 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ die Vakuumlichtgeschwindigkeit und $n(x, y) > 0$ den Brechungsindex bezeichnet. Der Lichtwellenleiter sei rotationssymmetrisch um die Zylinderachse, sodass es genügt, das Problem in der (x, y)-Ebene zu betrachten (s. Skizze). Außerdem hänge der Brechungsindex nur vom Abstand zur Zylinderachse ab, also $n = n(y)$. Der Startpunkt S des Lichtstrahls befinde sich bei $(0, 0)$, der Endpunkt E bei (a, d).



(a) Stellen Sie die Bedingung an die Bahnkurve als Gleichung auf.

(b) Finden Sie die integrierte Form der Bewegungsgleichungen. Definieren Sie dazu die Integrationskonstante als $\frac{A}{c}$, ihr Wert soll hier nicht bestimmt werden.
Lösung: $y' = \pm\sqrt{\left(\frac{n}{A}\right)^2 - 1}$

Der Brechungsindex habe jetzt die Form $n(y) = \frac{n_0}{\sqrt{1+by}}$ mit Konstanten n_0 und b.

(c) Integrieren Sie die in der vorherigen Aufgabe gefundene Differentialgleichung nochmals. Begründen Sie Ihre Wahl des Vorzeichens.
Das auftretende Integral $\int \mathrm{d}\tilde{y}\sqrt{\frac{\tilde{y}}{1-\tilde{y}}}$ kann durch Substitution mit $\tilde{y} = \sin^2\frac{\varphi}{2} \equiv \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$ gelöst werden, wobei $0 \le \varphi \le \pi$ angenommen werden darf. Schreiben Sie die Bahnkurve in parametrischer Form, geben Sie also $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ an.

Aufgabe 5: Noether-Theorem (*3+7+5=15 Punkte*)

Gegeben ist ein Teilchen der Masse m im Potential $U(\vec{r}) = \frac{U_0}{\vec{r}^2}$, wobei U_0 konstant ist. Zur Zeit $t = 0$ befinde es sich am Ort $\vec{r}_0$ mit Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_0$.

(a) Begründen Sie, dass die Energie des Teilchens erhalten ist, und berechnen Sie diese.

Betrachten Sie nun die folgende Transformation mit infinitesimalem ϵ:

$$\vec{r} \to \vec{r}^* = (1+\epsilon)\,\vec{r} \qquad\qquad t \to t^* = (1+\epsilon)^2\,t\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass diese Transformation die Bedingungen des (evtl. verallgemeinerten) Noether-Theorems erfüllt.

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Noether-Ladung.