KIT **SS 2014**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 2 – Lösung

07. Oktober 2014, 11-13 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen (*3+4+3=10 Punkte*)

(a) Die Bedingung für zyklische Koordinaten q lautet, dass die Lagrangefunktion L nicht von ihnen abhängt: $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$. Damit lässt sich direkt an der Lagrangefunktion ablesen, dass nur φ zyklisch ist. Der zugehörige kanonische Impuls lautet: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot\varphi$.

(b) F hängt nicht von x ab, also ist $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.
Wir betrachten die totale x-Ableitung der linken Seite

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{=0 \text{ nach Euler-Lagrange-Gl.}} \cdot y' \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$

(c) Eulerwinkel beschreiben den Übergang von einem Koordinatensystem in ein dazu beliebig gedrehtes. Es gibt 3 verschiedene Eulerwinkel.
Eine mögliche Konvention ist:

- $\vec r \to \vec r\,'$: Drehung um die z-Achse: φ
- $\vec r\,' \to \vec r\,''$: Drehung um die x'-Achse: ϑ
- $\vec r\,'' \to \vec r\,'''$: Drehung um die z''-Achse: ψ

Aufgabe 2: Kabeltrommel *(5+6+9=20 Punkte)*

(a) Zunächst berechnen wir das Trägheitsmoment des Zylinders.
Das Volumen des Zylinders ist gegeben durch $V = R^2\pi H$.
Damit ist die Dichte des Zylinders $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{R^2\pi H}$.
Da die Drehung des Zylinders um die z-Achse stattfindet, benötigen wir lediglich das zz-Element des Trägheitstensors:

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz} &= \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mathrm{d}z\ \rho \underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{=r^2} \\
&= \frac{m}{R^2\pi H} \cdot 2\pi \cdot H \cdot \int_0^R \mathrm{d}r\ r^3 \\
&= \frac{2m}{R^2} \cdot \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \\
&= \frac{m}{2}R^2\ .
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Rotationsenergie des Zylinders

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{4}R^2\dot{\varphi}^2\ .$$

(b) Die kinetische Energie des Seils ist gegeben durch

$$T_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\dot{l}^2\ .$$

Nun müssen wir als nächsten Schritt die Rotationsenergie des Zylinders ebenfalls durch die Länge des abgerollten Seils ausdrücken. Die Beziehung hierfür ist $R\varphi = l$ bzw. $R\dot{\varphi} = \dot{l}$, also $T_{\text{rot}} = \frac{m}{4}\dot{l}^2$.
Die potentielle Energie des Körpers ist dann

$$U = \frac{m}{2}g(-l)\ ,$$

wobei wir den Nullpunkt bei $l = 0$ gewählt haben, was der Drehachse des Zylinders entspricht. Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned}
L &= T_{\text{rot}} + T_{\text{kin}} - U \\
&= \frac{m}{4}\dot{l}^2 + \frac{m}{4}\dot{l}^2 + \frac{m}{2}gl \\
&= \frac{m}{2}\dot{l}^2 + \frac{m}{2}gl\ .
\end{aligned}$$

(c) Die Bewegungsgleichungen erhält man über die Lagrangegleichung 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial L}{\partial l} = 0$$
$$m\ddot{l} - \frac{m}{2}g = 0$$
$$\ddot{l} = \frac{g}{2}\,.$$

Einmaliges Integrieren liefert

$$\dot{l} = \frac{g}{2}t + \dot{l}_0$$

und nochmals Integrieren ergibt

$$l = \frac{g}{4}t^2 + \dot{l}_0 t + l_0\ .$$

Mit den Anfangsbedingungen $l_0 = \dot{l}_0 = 0$ lautet also die Lösung

$$l = \frac{g}{4}t^2\ .$$

Vergleichen wir mit dem freien Fall, welcher die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{4}\dot{l}^2 + \frac{m}{2}gl$$

besitzt, erhält man für die Bewegungsgleichung

$$\frac{m}{2}\ddot{l} - \frac{m}{2}g = 0$$
$$\ddot{l} = g$$

und damit als Lösung

$$l = \frac{g}{2}t^2\ .$$

Der Fall ist also durch den Zylinder verzögert. Gegenüber dem freien Fall legt der Körper in derselben Zeit nur die halbe Wegstrecke zurück.

Aufgabe 3: Unruhiges Pendel (*9+6=15 Punkte*)

(a) Zunächst bestimmen wir die Position des Massenpunkts als Funktion von x_A und ϑ:

$$\begin{aligned} & x = x_A + l\sin\vartheta & & y = -l\cos\vartheta \\ \Rightarrow\quad & \dot{x} = \dot{x}_A + l\cos\vartheta\dot{\vartheta} & & \dot{y} = l\sin\vartheta\dot{\vartheta}\ . \end{aligned}$$

Die kinetische Energie lässt sich damit direkt aufschreiben

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_A^2 + 2\dot{x}_A l\cos\vartheta\dot{\vartheta} + l^2\cos^2\vartheta\dot{\vartheta}^2 + l^2\sin^2\vartheta\dot{\vartheta}^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_A^2 + 2\dot{x}_A l\cos\vartheta\dot{\vartheta} + l^2\dot{\vartheta}^2\right)\ . \end{aligned}$$

Die potentielle Energie besteht aus zwei Termen, zum einen der Höhenenergie des Pendels

$$U_{\text{Höhe}} = mgy = -mgl\cos\vartheta\ ,$$

zum anderen der Energie aus der Auslenkung der beiden Federn

$$U_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}\frac{\kappa}{2}x_A^2 + \frac{1}{2}\frac{\kappa}{2}x_A^2 = \frac{\kappa}{2}x_A^2\ .$$

Damit ergibt sich insgesamt für die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L &= T - U_{\text{Höhe}} - U_{\text{Feder}} \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_A^2 + 2\dot{x}_A l\cos\vartheta\dot{\vartheta} + l^2\dot{\vartheta}^2\right) + mgl\cos\vartheta - \frac{\kappa}{2}x_A^2\ . \end{aligned}$$

(b) Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. Damit ergibt sich

- $q = x_A$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_A} &= -\kappa x_A \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} &= m\dot{x}_A + ml\cos\vartheta\dot{\vartheta} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} &= m\ddot{x}_A + ml\cos\vartheta\ddot{\vartheta} - ml\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 \\ \Rightarrow\ m\ddot{x}_A + ml\cos\vartheta\ddot{\vartheta} &- ml\sin\vartheta\dot{\vartheta}^2 + \kappa x_A = 0\ , \end{aligned}$$

- $q = \vartheta$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= m\dot{x}_A l\dot{\vartheta}(-\sin\vartheta) - mgl\sin\vartheta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= ml^2\dot{\vartheta} + m\dot{x}_A l\cos\vartheta \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} &= ml^2\ddot{\vartheta} + m\ddot{x}_A l\cos\vartheta + m\dot{x}_A l(-\sin\vartheta)\dot{\vartheta} \\
&\Rightarrow \; ml^2\ddot{\vartheta} + m\ddot{x}_A l\cos\vartheta + mgl\sin\vartheta = 0 \\
&\Rightarrow \; l\ddot{\vartheta} + \ddot{x}_A\cos\vartheta + g\sin\vartheta = 0 \; .
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Lichtwellenleiter *(5+4+11=20 Punkte)*

(a) Für die Geschwindigkeit des Lichtstrahls gilt

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\ \Rightarrow \quad (\mathrm{d}t)^2 &= \frac{1}{v^2}\left((\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2\right) \end{aligned}$$

Nach dem Fermatschen Prinzip nimmt Licht die Bahnkurve mit der kürzesten Laufzeit:

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_S^E \mathrm{d}t \\ &= \int_S^E \frac{1}{v}\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} \\ &= \int_0^a \mathrm{d}x \frac{n(y)}{c}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \\ &= \min \ . \end{aligned}$$

(b) Wir haben es also mit einem Variationsproblem (ohne Nebenbedingungen) zu tun mit

$$F = \frac{n(y)}{c}\sqrt{1 + y'^2} \ .$$

F hängt nicht explizit von x ab, damit können wir direkt die integrierte Form der Euler-Lagrange-Gleichungen benutzen:

$$\begin{aligned} F - y'\frac{\partial F}{\partial y} &= \text{const.} \\ \frac{n}{c}\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{n}{c}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} &= \frac{A}{c} \qquad \Big| \cdot \sqrt{1+y'^2} \\ \frac{n}{c}\left(1 + y'^2 - y'^2\right) &= \frac{A}{c}\sqrt{1+y'^2} \\ \frac{n}{A} &= \sqrt{1+y'^2} \\ y' &= \pm\sqrt{\left(\frac{n}{A}\right)^2 - 1} \ . \end{aligned}$$

(c) Jetzt setzen wir $n(y) = \frac{n_0}{\sqrt{1+by}}$ in die integrierte Euler-Lagrange-Gleichung ein:

$$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{A^2}{n_0^2}(1+by)} - 1} \ .$$

Aus der Skizze kann man sofort ablesen, dass die Bahnkurve von S nach E ansteigen muss, wir also das positive Vorzeichen benötigen.
Nochmaliges Integrieren ergibt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1 - \frac{A^2}{n_0^2}(1+by)}{\frac{A^2}{n_0^2}(1+by)}}$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x^* = \int_0^y \mathrm{d}y^* \sqrt{\frac{\frac{A^2}{n_0^2}(1+by^*)}{1 - \frac{A^2}{n_0^2}(1+by^*)}}$$

Substitution mit

$$\tilde{y} = \frac{A^2}{n_0^2}(1+by^*)$$

$$\mathrm{d}\tilde{y} = \frac{A^2}{n_0^2} b\mathrm{d}y^*$$

rechts liefert

$$x = \frac{n_0^2}{A^2 b} \int_{\frac{A^2}{n_0^2}}^{\frac{A^2}{n_0^2}(1+by)} \mathrm{d}\tilde{y} \sqrt{\frac{\tilde{y}}{1-\tilde{y}}}$$

Nun substituieren wir nochmal mit

$$\tilde{y} = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\mathrm{d}\tilde{y} = 2 \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \frac{1}{2} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \mathrm{d}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{n_0^2}{A^2 b} \int_{\varphi_S}^{\varphi} \mathrm{d}\tilde{\varphi} \sin\frac{\tilde{\varphi}}{2} \cos\frac{\tilde{\varphi}}{2} \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2}}{1 - \sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2}}}$$

$$= \frac{n_0^2}{A^2 b} \int_{\varphi_S}^{\varphi} \mathrm{d}\tilde{\varphi} \sin^2\frac{\tilde{\varphi}}{2}$$

$$= \frac{n_0^2}{A^2 b} \int_{\varphi_S}^{\varphi} \mathrm{d}\tilde{\varphi} \frac{1}{2}(1 - \cos\tilde{\varphi})$$

$$= \frac{n_0^2}{2A^2 b} [\tilde{\varphi} - \sin\tilde{\varphi}]_{\varphi_S}^{\varphi}$$

$$x = \frac{n_0^2}{2A^2 b} (\varphi - \sin\varphi - \varphi_S + \sin\varphi_S)$$

mit

$$\frac{A^2}{n_0^2} = \sin^2 \frac{\varphi_S}{2} \ ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{A^2}{n_0^2}\,(1+by) &= \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\
y &= \frac{1}{b}\left(\frac{n_0^2}{A^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) \\
&= \frac{n_0^2}{2A^2b}\left(2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \frac{2A^2}{n_0^2}\right) \\
y &= \frac{n_0^2}{2A^2b}\left(1 - \frac{2A^2}{n_0^2} - \cos\varphi\right) \ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Noether-Theorem *(3+7+5=15 Punkte)*

Die Lagrangefunktion des Problems ist gegeben durch

$$L = T - U = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{U_0}{\vec{r}^2} \; .$$

(a) Da die Lagrangefunktion nicht explizit von der Zeit abhängt, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, ist die Energie eine Erhaltungsgröße. Es gilt

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{U_0}{\vec{r}^2} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{U_0}{\vec{r}_0^2} \; .$$

In der letzten Zeile haben wir die gegebenen Werte für $t = 0$ eingesetzt. Da E erhalten ist, gilt dies für alle Zeiten.

(b) Bei der Transformation von $\dot{\vec{r}}$ ist zu beachten, dass sowohl der Ortsvektor als auch die Zeit transformiert werden:

$$\dot{\vec{r}}^* \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}^*}{\mathrm{d}t^*} = \frac{1+\epsilon}{(1+\epsilon)^2}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1+\epsilon}\dot{\vec{r}} \; .$$

Damit lautet die transformierte Lagrangefunktion

$$L^* = \frac{m}{2}\frac{\dot{\vec{r}}^2}{(1+\epsilon)^2} - \frac{U_0}{\vec{r}^2(1+\epsilon)^2} = \frac{L}{(1+\epsilon)^2} \; .$$

Außerdem benötigen wir

$$\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t} = (1+\epsilon)^2 \; .$$

Eingesetzt in die Bedingung für das Noether-Theorem erhält man

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(L^*\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}t}\right)\right]_{\epsilon=0} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left(\frac{L}{(1+\epsilon)^2}(1+\epsilon)^2\right)\right]_{\epsilon=0} \\
&= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}L\right]_{\epsilon=0} \\
&= 0 \; .
\end{aligned}$$

Also ist die Bedingung des Noether-Theorems erfüllt.

(c) Mit den gegebenen Transformationen findet man

$$\begin{aligned}
x \to x^* &= x + \epsilon x & &\Rightarrow & \psi_x &= x \\
y \to y^* &= y + \epsilon y & &\Rightarrow & \psi_y &= y \\
z \to z^* &= z + \epsilon z & &\Rightarrow & \psi_z &= z \\
t \to t^* &= t + 2\epsilon t & &\Rightarrow & \varphi &= 2t \; .
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Noether-Ladung

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\psi_i + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\right)\varphi \\
&= m\left(\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z\right) + \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{U_0}{\vec{r}^{\,2}} - m\dot{\vec{r}}^{\,2}\right)2t \\
&= m\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r} + \underbrace{\left(-\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{U_0}{\vec{r}^{\,2}}\right)}_{=-E}2t \\
&= m\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r} - 2Et \\
Q &\overset{t=0}{=} m\,\dot{\vec{r}}_0\cdot\vec{r}_0\ .
\end{aligned}$$