KIT **SS 2015**

Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 1

27. Juli 2015, 16-18 Uhr

Name

Matrikelnummer *Code für Ergebnisse*

Aufgabe	Punkte	Zeichen
1	/ 10	
2	/ 22	
3	/ 10	
4	/ 15	
5	/ 13	
$\sum$	/ 70	

Hinweise

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Neue Aufgabe bitte auf neuer Seite anfangen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben!

Formelsammlung

Nützliche Integrale:

$$\int \mathrm{d}x \sin^2 ax = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$
$$\int \mathrm{d}x \sin^3 ax = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax$$
$$\int \mathrm{d}x \sin^4 ax = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax$$

$$\int \mathrm{d}x \cos^2 ax = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$
$$\int \mathrm{d}x \cos^3 ax = \frac{1}{a}\sin ax - \frac{1}{3a}\sin^3 ax$$
$$\int \mathrm{d}x \cos^4 ax = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax + \frac{1}{32a}\sin 4ax$$

$$\int \mathrm{d}x \sin^n ax \cos ax = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1} ax \qquad (n \neq -1)$$
$$\int \mathrm{d}x \sin ax \cos^n ax = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax \qquad (n \neq -1)$$

Aufgabe 1: Kurzfragen (*2+4+1+3=10 Punkte*)

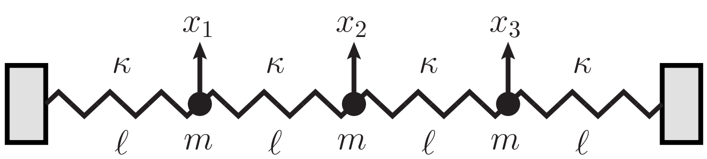
(a) Was sind Zwangsbedingungen? Nennen Sie zwei verschiedene Arten mit zugehöriger Bedingung. Welche Beziehung gilt für die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems aus N Massenpunkten und N_Z Zwangsbedingungen?

(b) Bestimmen Sie eine Bahnkurve $y(x)$ für die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten S (x_S, y_S) und E (x_E, y_E) in der x-y-Ebene. Schreiben Sie das Ergebnis als Funktion von x_S, y_S, x_E und y_E.

(c) Gegeben sei die Lagrangefunktion $L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, t) = ar^2 + m\dot{r}^2 - mr^2\dot{\varphi}^2 + br^2\omega^2 \sin^2(\omega t)$. Finden Sie eine Erhaltungsgröße (mit kurzer Begründung).

(d) Von einer Birne, deren Schwerpunkt im Ursprung des Koordinatensystems sei, sind Ihnen die Masse M sowie der Trägheitstensor Θ_A bezüglich des "Aufhängepunktes" $\vec{r}_A$ am Ast bekannt, nicht aber die exakte Massenverteilung. Berechnen Sie davon ausgehend den Trägheitstensor Θ_B der Birne bezüglich eines beliebigen anderen Punktes $\vec{r}_B$.
Unter welchem Namen ist die von Ihnen verwendete Beziehung bekannt?

Aufgabe 2: Transversaler Kettenschwinger (*5+3+10+4=22 Punkte*)



Zwischen zwei festen Wänden befinden sich drei Massenpunkte mit Masse m. In der Ruhelage befinden sich diese in einer Linie, haben Abstand ℓ voneinander, und sind untereinander und mit den Wänden jeweils mit vorgespannten Federn mit Federkonstante κ und verschwindender Ruhelänge verbunden. Die Massenpunkte sollen sich nur senkrecht zur Verbindungslinie und nur in einer Ebene bewegen können, außerdem seien die Auslenkungen klein im Vergleich zum Abstand. Es wirken keine weiteren Kräfte, insbesondere keine Gravitation.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems als Funktion der Auslenkungen x_i auf.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform auf. $\left[\textit{Teillösung: } M \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

(c) Bestimmen Sie daraus die Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des Systems.
Hinweis: Eine Lösung der kubischen charakteristischen Gleichung kann durch Probieren gefunden werden (kleine natürliche Zahl).

(d) Leiten Sie aus den Resultaten eine kurze graphische Darstellung der drei Normalschwingungen ab, zugeordnet zu ihrer jeweiligen Eigenfrequenz. Wie lautet folglich die allgemeine Lösung für die Auslenkungen x_i?
[Skizzieren Sie Ihre Erwartungen und die dazu führenden Überlegungen, falls Sie die vorherige Teilaufgabe nicht lösen konnten.]

Aufgabe 3: Hamiltonsche Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip (*10 Punkte*)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich aus dem Differential der Hamiltonfunktion und den Lagrange-Gleichungen 2. Art die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen herleiten lassen.
Zeigen Sie nun, dass diese auch äquivalent sind zum Prinzip der stationären Wirkung. Gehen Sie dazu von der Wirkung aus und drücken Sie im Integranden die Lagrangefunktion durch die Hamiltonfunktion aus. Beachten Sie, dass nun q_i und p_i unabhängig voneinander variiert und an den Grenzen festgehalten werden.

Aufgabe 4: Symmetrie des Pendels (*4+8+3=15 Punkte*)

Eine Masse m sei an einem masselosen Faden der Länge ℓ im homogenen Schwerefeld g der Erde aufgehängt. Diese schwinge in einer Ebene um seine Ruhelage, wobei die Auslenkungen als klein angenommen werden sollen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Problems auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung her.

Nun betrachten wir die folgende Transformation des Auslenkungswinkels φ mit einem konstanten α

$$\varphi \to \varphi^* = \varphi + \epsilon \cos \alpha t\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass diese Transformation die Bedingungen des (evtl. verallgemeinerten) Noether-Theorems erfüllt, falls α einen speziellen Wert besitzt. Welchen?

(c) Bestimmen Sie die zugehörige Noether-Ladung. Finden Sie eine weitere Erhaltungsgröße des Systems.

Aufgabe 5: Rollende Kugel auf schiefer Ebene (*5+5+3=13 Punkte*)

Auf einer schiefen Ebene mit Steigungswinkel α rollt im homogenen Schwerefeld g der Erde eine homogene Kugel (Masse M, Radius R), sodass sie nicht gleitet und ihr Schwerpunkt sich in der x-z-Ebene bewegt.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ der Kugel bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt S.

(b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion der Kugel als Funktion der zurückgelegten Strecke s des Schwerpunkts.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie für den Fall, dass die Kugel zur Zeit $t = 0$ bei $s = 0$ in Ruhe losgelassen wird.