Klassische Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. M. Mühlleitner, Ü: Dr. M. Rauch

Klausur 2 – Lösung

22. September 2015, 12-14 Uhr

Aufgabe 1: Kurzfragen (*3+4+1+2=10 Punkte*)

(a) Die erhaltenen Größen und evtl. zyklischen Koordinaten sind jeweils
  (i) Energieerhaltung; keine zyklische Koordinate ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$)
  (ii) Drehimpuls um die zugehörige Drehachse; zykl. Koord. φ
  (iii) Impuls in x-Richtung; zykl. Koord. x.

(b) F hängt nicht von x ab, also ist $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$.
Wir betrachten die totale x-Ableitung der linken Seite

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{=0 \text{ nach Euler-Lagrange-Gl.}} \cdot y' \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$

(c) Das Noethertheorem besagt, dass es zu jeder infinitesimalen Transformation, die die Lagrangefunktion invariant lässt, eine zugehörige Erhaltungsgröße gibt.

(d) Der Zusammenhang lautet

$$H(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i(q,p,t)p_i - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)\,.$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,.$$

Aufgabe 2: Federpendel (*10+5=15 Punkte*)

(a) Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Pendelauslenkung sowie Federlänge lautet

$$x = \ell \sin\varphi \qquad \to \dot{x} = \ell\cos\varphi\dot{\varphi} + \dot{\ell}\sin\varphi$$
$$z = -\ell\cos\varphi \qquad \to \dot{z} = \ell\sin\varphi\dot{\varphi} - \dot{\ell}\cos\varphi\,.$$

Damit ergibt sich direkt für die kinetische Energie

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right)\\ &= \frac{m}{2}\left[\left(\ell\cos\varphi\,\dot{\varphi} + \dot{\ell}\sin\varphi\right)^2 + \left(\ell\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{\ell}\cos\varphi\right)^2\right]\\ &= \frac{m}{2}\left[\ell^2\cos^2\!\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\ell}^2\sin^2\!\varphi + 2\ell\dot{\ell}\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi} + \ell^2\sin^2\!\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\ell}^2\cos^2\!\varphi - 2\ell\dot{\ell}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right]\\ &= \frac{m}{2}\left(\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\ell}^2\right)\,.\end{aligned}$$

Die potentielle Energie setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der Gravitationsenergie

$$U_{\text{Grav}} = mgz = -mg\ell\cos\varphi$$

sowie der Federenergie

$$U_{\text{Feder}} = \frac{\kappa}{2}(\ell-\ell_0)^2\,.$$

Damit ergibt sich für die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}L &= T - U_{\text{Grav}} - U_{\text{Feder}}\\ &= \frac{m}{2}\left(\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\ell}^2\right) + mg\ell\cos\varphi - \frac{\kappa}{2}(\ell-\ell_0)^2\,.\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen erhält man durch Einsetzen in die Lagrangegleichungen 2. Art, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$:

ℓ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} &= m\dot{\ell} \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = m\ddot{\ell}\\ \frac{\partial L}{\partial \ell} &= ml\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi - \kappa(\ell-\ell_0)\\ \Rightarrow \ddot{\ell} &= l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi - \frac{\kappa}{m}(\ell-\ell_0)\end{aligned}$$

φ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\ell^2\dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\ddot{\varphi} + 2m\ell\dot{\ell}\dot{\varphi}\\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mg\ell\sin\varphi\\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{\ell}\sin\varphi - \frac{2}{\ell}\dot{\ell}\dot{\varphi}\,.\end{aligned}$$

(b) In der Gleichgewichtslage ξ gilt

$$\begin{aligned}
\ell &= \xi + \xi_0 \\
\dot{\ell} &= \dot{\xi} \\
\ddot{\ell} &= \ddot{\xi}\,.
\end{aligned}$$

Die Bedingung für ξ_0, dass keine Kraft auf die Masse wirkt, bedeutet, dass die Masse nicht beschleunigt werden darf, $\ddot{\varphi} = \ddot{\ell} = 0$ für $\ell = \xi_0$.
In die Bewegungsgleichungen eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{g}{\xi_0}\sin\varphi \qquad \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = 0 \\
0 &= \xi_0\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi - \frac{\kappa}{m}(\xi_0 - \ell_0) \\
&= g - \frac{\kappa}{m}(\xi_0 - \ell_0) \\
\xi_0 &= \frac{mg}{\kappa} + \ell_0\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi} &= (\xi + \xi_0)\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi - \frac{\kappa}{m}\left(\xi + \frac{mg}{\kappa} + \ell_0 - \ell_0\right) \\
&= (\xi + \xi_0)\dot{\varphi}^2 - \frac{\kappa}{m}\xi - g(1 - \cos\varphi)\,, \\
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{\xi + \xi_0}\sin\varphi - \frac{2}{\xi + \xi_0}\dot{\xi}\dot{\varphi}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Ruckmechanik (*8+2=10 Punkte*)

(a) Nach dem Hamiltonschen Prinzip muss die Wirkung stationär sein, bzw. die Variation der Wirkung verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \delta \ddot{q}_i \right) . \end{aligned}$$

Die Variation der Ableitungen von q kann mittels partieller Integration jeweils auf die Variation von q zurückgeführt werden:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \delta \ddot{q}_i &= \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_i \\ &= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \delta \dot{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \delta q_i . \end{aligned}$$

Dabei haben wir eingesetzt, dass die Variation sowohl von q_i als auch $\dot{q}_i$ an den Endpunkten verschwindet: $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = \delta \dot{q}_i(t_1) = \delta \dot{q}_i(t_2) = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \; \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \delta q_i .$$

Dies muss für alle Variationen δq_i gelten, also muss der Ausdruck innerhalb der Klammer verschwinden, und zwar für jede verallgemeinerte Koordinate separat, was n Gleichungen liefert

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \qquad i = 1, \dots, n .$$

(b) Aus der Lagrangefunktion folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} &= -\frac{m}{2} q \quad \rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} &= -\frac{m}{2} \ddot{q} , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= 0 , & \frac{\partial L}{\partial q} &= -\frac{m}{2} \ddot{q} - kq . \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt sich also

$$-\frac{m}{2} \ddot{q} - \frac{m}{2} \ddot{q} - kq = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{k}{m} q ,$$

die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator.

Aufgabe 4: Geodäte auf Kreiskegelmantel (*4+8+5=17 Punkte*)

(a) Die Parametrisierung lässt sich z.B. finden, indem wir in einem Zwischenschritt zunächst Zylinderkoordinaten einführen:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Der Ursprung, P und der z-Achsenabschnitt von P bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α, Kathete ρ, Ankathete z und Hypotenuse r, also $\cos\alpha = \frac{z}{r}$ und $\sin\alpha = \frac{\rho}{r}$.
Damit folgt für die Parametrisierung und folglich die Infinitesimalelemente

$$\begin{aligned} x &= r\sin\alpha\cos\varphi & \mathrm{d}x &= \sin\alpha\cos\varphi\ \mathrm{d}r - r\sin\alpha\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi \\ y &= r\sin\alpha\sin\varphi & \mathrm{d}y &= \sin\alpha\sin\varphi\ \mathrm{d}r + r\sin\alpha\cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi \\ z &= r\cos\alpha & \mathrm{d}z &= \cos\alpha\ \mathrm{d}r\,. \end{aligned}$$

Damit gilt für das Linienelement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= \sin^2\alpha\cos^2\varphi\ \mathrm{d}r^2 + r^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi\ \mathrm{d}\varphi^2 \\ &\quad + \sin^2\alpha\sin^2\varphi\ \mathrm{d}r^2 + r^2\sin^2\alpha\cos^2\varphi\ \mathrm{d}\varphi^2 \\ &\quad + \cos^2\alpha\ \mathrm{d}r^2 \\ \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}r^2 + r^2\sin^2\alpha\ \mathrm{d}\varphi^2\,. \end{aligned}$$

(b) Für die Länge L gilt

$$\begin{aligned} L = J[r] &= \int_S^E \mathrm{d}s \\ &= \int_{\varphi_S}^{\varphi_E} \mathrm{d}\varphi\ \sqrt{r^2\sin^2\alpha + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2} = \text{minimal}\,. \\ \Rightarrow F &= \sqrt{r^2\sin^2\alpha + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2} \end{aligned}$$

F hängt nicht explizit von φ ab, damit kann direkt die integrierte Form benutzt werden:

$$
\begin{aligned}
F - r' \frac{\partial F}{\partial r'} &= \text{const.} \\
\sqrt{r^2 \sin^2 \alpha + r'^{\,2}} - r' \frac{2r'}{2\sqrt{r^2 \sin^2 \alpha + r'^{\,2}}} &= C \\
r^2 \sin^2 \alpha &= C \sqrt{r^2 \sin^2 \alpha + r'^{\,2}} \\
r^4 \sin^4 \alpha &= C^2 \left(r^2 \sin^2 \alpha + r'^{\,2} \right) \\
r'^{\,2} &= \frac{r^4 \sin^4 \alpha}{C^2} - r^2 \sin^2 \alpha \\
r' &= \pm \sqrt{\frac{r^4 \sin^4 \alpha}{C^2} - r^2 \sin^2 \alpha} \\
r' &= \frac{r \sin \alpha}{C} \sqrt{r^2 \sin^2 \alpha - C^2} \,.
\end{aligned}
$$

In der letzten Zeile haben wir dabei das Vorzeichen in die noch zu bestimmende Konstante C absorbiert.

(c) Nochmaliges Integrieren via Separation der Variablen liefert dann:

$$
\begin{aligned}
r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} &= \frac{r \sin \alpha}{C} \sqrt{r^2 \sin^2 \alpha - C^2} \\
\mathrm{d}\varphi &= \mathrm{d}r \ \frac{C}{\sin \alpha} \frac{1}{r\sqrt{r^2 \sin^2 \alpha - C^2}} \\
\int \mathrm{d}\varphi &= \int \mathrm{d}r \ \frac{C}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{r\sqrt{r^2 - \frac{C^2}{\sin^2 \alpha}}} \\
\varphi + D &= \frac{C}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{\sin \alpha}{C} \arccos \left(\frac{C}{\sin \alpha r} \right) \right] \\
\varphi + D &= \frac{1}{\sin \alpha} \arccos \left(\frac{C}{\sin \alpha r} \right) \,.
\end{aligned}
$$

Dies lösen wir schließlich nach r auf:

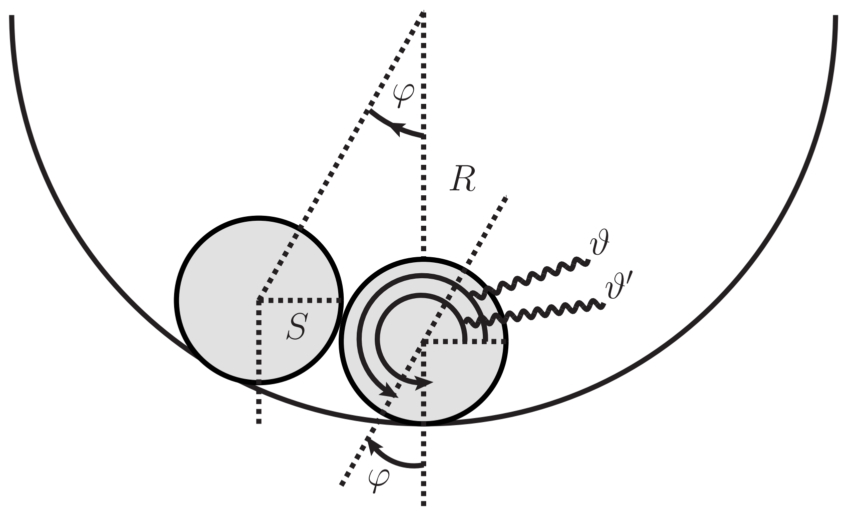
$$
\begin{aligned}
\sin \alpha \, (\varphi + D) &= \arccos \left(\frac{C}{\sin \alpha r} \right) \\
\frac{C}{\sin \alpha r} &= \cos \left(\sin \alpha \, (\varphi + D) \right) \\
r(\varphi) &= \frac{C}{\sin \alpha} \ \frac{1}{\cos \left(\sin \alpha \, (\varphi + D) \right)} \,.
\end{aligned}
$$

Die beiden Konstanten C und D erhält man schließlich durch Einsetzen des Anfangs- und Endpunkts:

$$
r_S = \frac{C}{\sin \alpha} \ \frac{1}{\cos \left(\sin \alpha \, (\varphi_S + D) \right)}
$$

und analog für (r_E, φ_E).

Aufgabe 5: Rollender Zylinder (*4+8+6=18 Punkte*)



(a) Für das Trägheitsmoment des Zylinders berechnen wir zunächst seine Masse als Funktion der Dichte $\rho = \rho_0(S^2 - r^2)$ und des Volumens:

$$\begin{aligned}
m &= \int_V \mathrm{d}^3 r \rho \\
&= \int_0^S \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mathrm{d}z r \rho_0 (S^2 - r^2) \\
&= 2\pi\rho_0 H \int_0^S \mathrm{d}r (rS^2 - r^3) \\
&= 2\pi\rho_0 H \left(S^2 \frac{S^2}{2} - \frac{S^4}{4} \right) \\
m &= \frac{\pi}{2}\rho_0 H S^4 \,.
\end{aligned}$$

Das benötigte Trägheitsmoment ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz} &= \int_V \mathrm{d}^3 r \rho (x^2 + y^2) \\
&= \int_0^S \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \mathrm{d}z r \rho_0 (S^2 - r^2) r^2 \\
&= 2\pi\rho_0 H \int_0^S \mathrm{d}r (r^3 S^2 - r^5) \\
&= m \frac{4}{S^4} \left(S^2 \frac{S^4}{4} - \frac{S^6}{6} \right) \\
\Theta_{zz} &= \frac{m}{3} S^2 \,.
\end{aligned}$$

(b) Die abgerollte Länge auf dem Außenzylinder und dem Rollzylinder muss gleich groß sein:

$$R\varphi = S\vartheta' .$$

Der hier verwendete Winkel ϑ' entspricht allerdings noch nicht dem für die Rotationsenergie benötigten Winkel ϑ. Hier muss zusätzlich noch berücksichtigt werden, dass sich durch die Krümmung des Außenzylinders der Auflagepunkt um den Winkel φ verschoben hat. Die abgerollte Strecke ist also länger als eigentlich durch die Drehung verursacht, also $\vartheta' = \vartheta + \varphi$.
Also gilt für die Relation

$$\begin{aligned} R\varphi &= S(\vartheta + \varphi) \\ \vartheta &= \frac{R-S}{S}\varphi \\ \dot{\vartheta} &= \frac{R-S}{S}\dot{\varphi} . \end{aligned}$$

Für die Rotationsenergie verschieben wir den Trägheitstensor mit dem Satz von Steiner in den Auflagepunkt am Rand des Rollzylinders:

$$\Theta = \Theta_{zz} + mS^2 = \frac{4}{3}mS^2 .$$

Damit folgt für die Rotationsenergie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\Theta\dot{\vartheta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{4}{3}mS^2\frac{(R-S)^2}{S^2}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{2}{3}m(R-S)^2\dot{\varphi}^2 . \end{aligned}$$

Alternativ führt die Berechnung als Rotation um den Schwerpunkt plus Translation des Schwerpunkts auf dasselbe Ergebnis.
Für die potentielle Energie reicht es, den Schwerpunkt des Rollzylinders zu betrachten:

$$U = mgh = mg(R-S)(1-\cos\varphi) .$$

Damit folgt für die Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{2}{3}m(R-S)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-S)(1-\cos\varphi) .$$

(c) Einsetzen in die Lagrange-Gleichungen 2. Art liefert dann die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} &= 0 \\ \frac{4}{3}m(R-S)^2\ddot{\varphi} + mg(R-S)\sin\varphi &= 0 . \end{aligned}$$

Im Grenzfall kleiner Auslenkungen gilt $\sin\varphi \sim \varphi$ und damit

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{4}\frac{g}{R-S}\varphi\,.$$

Dies ist die Differentialgleichung für einen harmonischen Oszillator und wir können einen Schwingungsansatz machen:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_S)\,.$$

Einsetzen in die Bewegungslgeichung bestimmt die Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{R-S}}\,.$$

Mit den Startbedingungen

$$\begin{gathered}
\varphi(t=0) = \varphi_0 = A\cos(\varphi_S) \\
\dot{\varphi}(t=0) = 0 = -A\omega\sin(\varphi_S) \\
\Rightarrow \varphi_S = 0\,, \quad A = \varphi_0
\end{gathered}$$

ergibt sich dann als Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}\frac{g}{R-S}}t\right)\,.$$