Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Klassische Theoretische Physik II
Theorie B, Mechanik: Klausur (Termin 2) Sommersemester 2016

Prof. Dr. Alexander Mirlin
PD Dr. Igor Gornyi, Nikolaos Kainaris

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
14.10.2016, 11:00–13:00 Uhr

---

1. Geodäte auf Rotationsparaboloid (8+12+10=30 Punkte)

Betrachten Sie zwei Punkte A und B auf einer um die z-Achse rotationssymmetrischen Fläche, die durch die Funktion $z(x,y) = x^2 + y^2$ erzeugt wird (Rotationsparaboloid). Gesucht wird die kürzeste Verbindung (Geodäte) auf dem Rotationsparaboloid zwischen A und B.

Benutzen Sie als Koordinaten eines Punktes P die Zylinderkoordinaten r, θ und z (s. Abbildung 1). Setzen Sie als A und B verbindende Kurve eine Funktion $r(\theta)$ an.

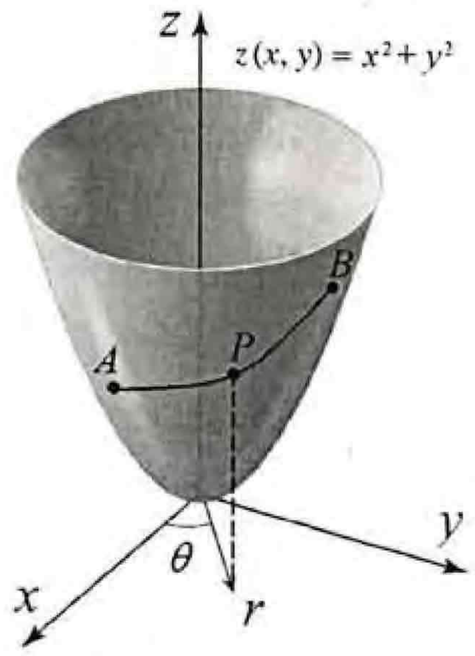

Abbildung 1.

(a) Drücken Sie das Lininienelement ds durch $d\theta$ und $dr/d\theta = r'$ aus. Bestimmen Sie die Funktion $K(r, r', \theta)$ für das Funktional

$$L[r(\theta)] = \int_{\theta_A}^{\theta_B} d\theta \; K(r, r', \theta),$$

welches die Länge der Kurve $r(\theta)$ angibt.

(b) Zeigen Sie, mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung für ein Extremum dieses Funktionals, dass die Größe

$$I = r' \frac{\partial K}{\partial r'} - K$$

konstant (d.h. unabhängig von θ) ist. Ist I positiv oder negativ? Welcher Erhaltungsgröße in der Mechanik eines Teilchens entspricht I?

(c) Verwenden Sie diesen Erhaltungssatz und schreiben Sie die Gleichung für r' auf. Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Trennung der Variablen und erhalten Sie die folgende Beziehung zwischen θ und r:

$$\theta = \theta_A + C \int_{r_A^2}^{r^2} \frac{dz}{z} \sqrt{\frac{z + 1/4}{z - C^2}},$$

wobei $r_A = r(\theta_A)$ und die Konstante C durch die Randbedingung $r(\theta_B) = r_B$ festgelegt wird.

Hinweis: Das Integral in der obigen Beziehung soll nicht berechnet werden.

...bitte wenden...

2. Sphärischer Oszillator im Magnetfeld (5+10+10+10=**35 Punkte**)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m und Ladung Q in drei Raumdimensionen im parabolischen Potential

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}^{\,2}$$

in Gegenwart eines zeitlich konstanten homogenen Magnetfeldes $\vec{B} = B\vec{e}_z = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$.

(a) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = [\vec{B} \times \vec{r}]/2$ dem gegebenen magnetischen Feld entspricht.

(b) Schreiben Sie die Lagrangefunktion des Oszillators und die Lagrange-Gleichungen in kartesischen Koordinaten auf.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Lagrange-Gleichungen für die Bahnkurve des Teilchens an.

Hinweis: Es ist hilfreich die Koordinaten $x + iy$ und $x - iy$ einzuführen.

(d) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Oszillators in kartesischen Koordinaten.

15 Bonuspunkte: Bestimmen Sie anhand der Poissonklammern, ob die z-Projektion des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße ist. Schreiben Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten auf.

3. Zylinder auf gleitendem Keil (4+6+10+15=**35 Punkte**)

Ein starrer homogener Zylinder (Masse m, Radius r und Länge l) rollt im Schwerefeld g auf einem starren homogenen Keil (Masse M, Länge L) ab, ohne dabei zu rutschen. Der Keil kann reibungsfrei entlang der horizontalen x-Achse gleiten. Die Achse des Zylinders ist horizontal, so dass sein Schwerpunkt sich in einer (x, y)-Ebene bewegt. Am Anfang befindet sich der Schwerpunkt des Zylinders in der Höhe h im Ruhezustand. Der Keil ist anfänglich auch im Ruhezustand mit der Spitze (Neigungswinkel α) im Ursprung (s. Abbildung 2).

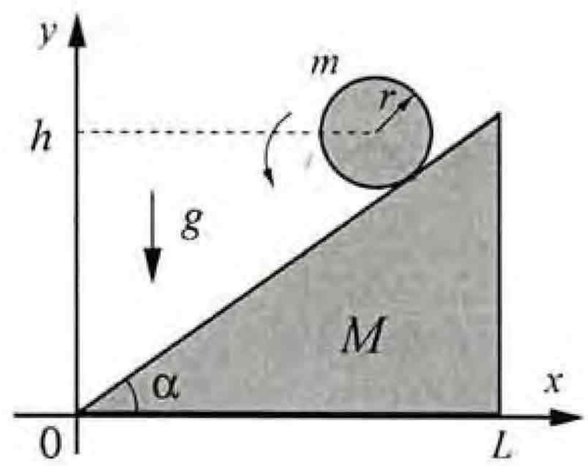

Abbildung 2.

(a) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich seiner Drehachse durch $\Theta_S = mr^2/2$ gegeben ist.

(b) Finden Sie die anfänglichen Koordinaten des Schwerpunktes des Keils in der (x, y)-Ebene.

(c) Benutzen Sie die Höhe y des Schwerpunktes des Zylinders und die x-Koordinate des Schwerpunktes des Keils als die verallgemeinerten Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

(d) Geben Sie die Bewegungsgleichung an. Berechnen Sie die Zeit, die der Zylinder braucht, um bis nach unten zu rollen.