1 Lösungen Aufgabe 1

1.1 Lösung (a), 5P

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot r - mr\dot\phi^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0\,, \quad [2P] \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\phi\right) = m\left(2r\dot r\dot\phi + r^2\ddot\phi\right) = 0\,, \quad [2P] \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot z} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot z + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad [1P] \tag{12}$$

1.2 Lösung (b), 5P

i), 3P: Die Koordinate ϕ ist zyklisch [da L nur von $\dot\phi$ abhängt].
ii), 2P: Deshalb ist der konjugierte Impuls $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = mr^2\dot\phi$ erhalten [in der Tat ist dies die Bewegungsgleichung für ϕ, Gleichung (11)]

1.3 Lösung (c), 5P

i), 2P: Wir benutzen das Noethetheorem in der Formelsammlung, nur $\psi_1 = 1$ ist verschieden von 0. Also ist die Erhaltungsgrösse

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{k1}\dot q_k + \frac{1}{2}\sum_l \alpha_{1l}\dot q_l = \sum_k \alpha_{k1}\dot q_k\,. \tag{13}$$

[1. Schritt 1P , 2. Schritt 1P] ii), 1P: Wi haben mit $\alpha_{kl} = m\delta_{kl}$ und $q_k = x_l$

$$Q = \sum_k \alpha_{k1}\dot q_k = \alpha_{11}\dot q_1 = m\dot x_1\,. \tag{14}$$

Q ist die x_1-Komponente des Impuls des Massenpunktes.

iii), 2P: Den kinetischen Term für Zylinderkoordinaten können wir in in Aufgabe 1 ablesen, also

$$\alpha_{11} = mr^2\,, \qquad \alpha_{22} = m\,, \qquad \alpha_{33} = m\,, \tag{15}$$

und alles anderen Komponenten sind 0. Damit ist

$$Q = \sum_k \alpha_{k1}\dot q_k = \alpha_{11}\dot q_1 = mr^2\dot\phi\,, \tag{16}$$

[1P] und ist die z-Komponente des Drehimpulses. [1P]

1.4 Lösung (d), 5P

i), 2P: Die Hauptträgheitsmomente sind die Eigenwerte von θ, also θ_{11} und

$$\theta_\pm = \theta_{22} \pm \sqrt{\theta_{22}^2 - \left(\theta_{22}^2 - \theta_{23}^2\right)} = \theta_{22} \pm \theta_{23} \tag{17}$$

Deshalb (die Anordnung ist beliebig)

$$\theta_1 = \theta_{11}\,, \qquad \theta_2 = \theta_{22} - \theta_{23}\,, \qquad \theta_3 = \theta_{22} + \theta_{23}\,. \tag{18}$$

1P (θ_1) + 1P ($\theta_{2,3}$) ii), 1P: Die Drehung um die x-Achse ist stabil, wenn das zugehörige Trägheitsmoment $\theta_{11} = \theta_1$ NICHT zwischen θ_2 und θ_3 liegt, also wegen $\theta_2 < \theta_3$ für

$$\theta_{11} \geq \theta_3 = \theta_{22} - \theta_{23} \,, \tag{19}$$

oder

$$\theta_{11} \leq \theta_2 = \theta_{22} + \theta_{23} \,. \tag{20}$$

iii), 2P:

(iiia) **KORREKT**
(iiib) **FALSCH**

2 Lösungen Aufgabe 2

2.1 Lösung (a), 8P

Das Potential V ist offensichtlich invariant, wegen $\dot{\vec{r}}_k \to \dot{\vec{r}}_k + \epsilon \vec{w}$ transformiert sich der kinetische Term wie

$$\dot{\vec{r}}_k^2 \to \dot{\vec{r}}_k^2 + 2\epsilon \dot{\vec{r}}_k \vec{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{21}$$

[2P] und deshalb

$$L \to L + \sum_k m_k \epsilon \dot{\vec{r}}_k \vec{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \,, \tag{22}$$

[2P] also

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t, \dot{\vec{r}} + \epsilon \vec{w})|_{\epsilon=0} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \vec{w} = M \dot{\vec{r}}_S \cdot \vec{w} = \frac{d}{dt} \left(M \vec{r}_S \cdot \vec{w} \right) \,, \tag{23}$$

1 Schritt 2P, 2.SChritt 2P

2.2 Lösung (b), 10P

Die erhaltene Noetherladung ist (damit V invariant ist muss über alle k summiert werden)

$$Q = \sum_i \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(k)}} \psi_i^{(k)} - F \tag{24}$$

[4P] mit

$$\psi_i^{(k)} = w_i t \,, \qquad\qquad F = M \vec{r}_S \cdot \vec{w} \,. \tag{25}$$

Also

$$Q = \sum_i \sum_k m_k \dot{x}_i^{(k)} w_i t - M \vec{r}_S \cdot \vec{w} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{w} t - M \vec{r}_S \cdot \vec{w} = \vec{P} \cdot \vec{w} t - M \vec{r}_S \cdot \vec{w} \,. \tag{26}$$

1 .Schritt 2P, 2. Schritt 2P Dies gilt für alle $\vec{w}$, also ist der gesamte Vektor $\vec{Q}$ erhalten:

$$\vec{Q} = \vec{P} t - M \vec{r}_S \,. \tag{27}$$

[2 P]

2.3 Lösung (c), 2P

Wir haben mit $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_S$

$$M\dot{\vec{r}}_S t = \vec{Q} + M\vec{r}_S(t) = M\left(\vec{r}_S(t) - \vec{r}_S(0)\right) , \tag{28}$$

[1P] wobei wir $\vec{Q} = \vec{Q}(0) = -M\vec{r}_S(0)$ benutzt haben. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\vec{r}_S(t) = \dot{\vec{r}}_S(0)t + \vec{r}_S(0)\,, \tag{29}$$

[1P] also bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig. Volle Punkte gibt es auch wenn $P = \text{const}$ benutzt wurde

3 Lösungen Aufgabe 3

3.1 Lösung (a), 5P

Für die Gesamtzeit T gilt

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)}\,, \tag{30}$$

[3P] also

$$F(y'(x), y(x), x) = F(y'(x), x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)}\,. \tag{31}$$

[2P]

3.2 Lösung (b), 5P

Allgemein gilt für die Lösung des Variationsproblems

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \tag{32}$$

also hier da F nicht explizit von y abhängt

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,, \tag{33}$$

[3P] und deshalb

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c\,, \tag{34}$$

mit eine Konstanten c. Wir haben explizit

$$c = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}}\,, \tag{35}$$

also aufgelöst

$$y'^2 = \frac{c^2 v^2}{1 - c^2 v^2}\,, \qquad y' = \frac{cv}{\sqrt{1 - c^2 v^2}}\,. \tag{36}$$

[2P]

3.3 Lösung (c), 5P

Wir haben

$$T = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v\sqrt{1 - c^2 v^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b/x\sqrt{1 - b^2c^2/x^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx x^2}{b^2 c\sqrt{x^2/(b^2c^2) - 1}} \tag{37}$$

1. Schritt 1P, letzter Schritt 2P/ Mit der Variablensubstitution $z = x/(bc), dz = dx/(bc)$ ist mit dem angegeben Integral

$$
\begin{aligned}
T &= bc^2 \int_{x_1/(bc)}^{x_2/(bc)} \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} dz \\
&= \frac{bc^2}{2} \left[z\sqrt{z^2-1} + \ln\left(\sqrt{z^2-1}+z\right)\right]_{x_1/(bc)}^{x_2/(bc)} \\
&= \frac{bc^2}{2} \left[\frac{x_2}{bc}\sqrt{x_2^2/(b^2c^2)-1} - \frac{x_1}{bc}\sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1} + \ln \frac{\sqrt{x_2^2/(b^2c^2)-1}+x_2/(bc)}{\sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1}+x_1/(bc)}\right]
\end{aligned}
\tag{38}
$$

1. Schritt 1P, Ergebnis 1P

3.4 Lösung (d), 5P

Wir müssen die folgende DGL lösen:

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{bc/x}{\sqrt{1-b^2c^2/x^2}}
\tag{39}
$$

[2P] also

$$
\int_{y(x_1)}^{y} dy = \int_{x_1}^{x} \frac{bc}{x\sqrt{1-b^2c^2/x^2}} dx = \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2/(b^2c^2)-1}} \, .
\tag{40}
$$

[1P] Mit der Variablensubstitution $z = x/(bc), dz = dx/(bc)$ und $y(x_1) = 0$ ist

$$
\begin{aligned}
y(x) &= bc \int_{x_1/(bc)}^{x/(bc)} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \\
&= bc \ln \frac{x/(bc) + \sqrt{x^2/(b^2c^2)-1}}{x_1/(bc) + \sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1}} \, .
\end{aligned}
\tag{41}
$$

[1P] wobei wir das angegebene Integral benutzt haben. Wir haben noch die Randbedingung $y(x_2) = y_2$ die wir benutzen können um c durch y_2 auszudrücken. Die bestimmende (transzendente) Gleichung ist

$$
y_2 = bc \ln \frac{x_2/(bc) + \sqrt{x_2^2/(b^2c^2)-1}}{x_1/(bc) + \sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1}} \, .
\tag{42}
$$

[1P]

4 Lösungen Aufgabe 4

4.1 Lösung (a), 2P

Das Trägheitsmoment f ur Drehungen um den Schwerpunkt ist

$$\theta = A\rho \int_{-l}^{l} dz\, z^2 = A\rho \frac{2}{3} l^3 = \frac{m}{3} l^2 \,,$$

[1P] mit der Masse $m = 2A\rho l$. Die zugehörige Rotationsenergie ist

$$T_{\text{rot}} = \frac{m}{6} l^2 \dot{\phi}^2 \,. \tag{43}$$

[1P]

4.2 Lösung (b), 3P

Die Schwerpunktskoordinaten sind

$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} l \sin\phi \\ 0 \\ l\cos\phi \end{pmatrix} , \qquad \dot{\vec{r}}_S = \begin{pmatrix} l\dot{\phi}\cos\phi \\ 0 \\ -l\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} , \tag{44}$$

[1P] also ist die kinetische Energie T_S aus der Schwerpunktsbewegung

$$T_S = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_S^{\,2} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 \,, \tag{45}$$

[1P] und die gesamte kinetische Energie

$$T = T_{\text{rot}} + T_S = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 \,. \tag{46}$$

[1P]

4.3 Lösung (c), 2P

Die potentielle Energie ist (normiert auf $V(z = 0) = 0$)

$$V = mgz = mgl\cos\phi \,, \tag{47}$$

also ist die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 - mgl\cos\phi \,. \tag{48}$$

[1P] Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m l^2 \dot{\phi} \,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi} = mgl\sin\phi \,, \tag{49}$$

ist die Bewegungsgleichung

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\phi} - mgl\sin\phi = 0 \,. \tag{50}$$

[1P]

4.4 Lösung (d), 3P

Die Energie $E = T + V$ ist erhalten da L nicht explizit von der Zeit abhängt. Mit der gegeben Anfangsbedingung $E = mgl$ ist

$$E = \frac{2}{3} ml^2 \dot{\phi}^2 + mgl \cos\phi = mgl \,, \tag{51}$$

[1P] also ($\dot{\phi} > 0$)

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3g}{2l} \left(1 - \cos\phi\right) \,, \qquad \dot{\phi} = \frac{1}{T}\sqrt{1-\cos\phi} \,, \qquad T = \sqrt{\frac{2l}{3g}} \,. \tag{52}$$

[2P]

4.5 Lösung (e), 3P

Integrieren mit der Anfangsbedingung $\phi(0) = \phi_0$ gibt

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\cos\phi}} = \int_0^t \frac{dt}{T} = \frac{t}{T} \,, \tag{53}$$

[2P] und mit dem angegebenen Integral ist

$$\frac{t}{T} = \sqrt{2} \ln \frac{\tan\frac{\phi}{4}}{\tan\frac{\phi_0}{4}} \,, \tag{54}$$

oder schließlich

$$\phi(t) = 4 \arctan\left[\tan\frac{\phi_0}{4} e^{\frac{t}{\sqrt{2}T}}\right] \,. \tag{55}$$

[1P]

4.6 Lösung (f), 3P

Die x-Komponente der Zwangskraft ist

$$F_x = m\ddot{x} = ml\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2 \sin\phi\right) \,, \tag{56}$$

[1P] und mit der Bewegunsgleichung und Gleichung (50)

$$F_x = ml\left[\cos\phi\left(\frac{3g}{4l}\sin\phi\right) - \sin\phi\left(\frac{3g}{2l}(1-\cos\phi)\right)\right] = \frac{9gm}{4}\sin\phi\left(\cos\phi - 2/3\right) \,. \tag{57}$$

[1P] Die Leiter löst sich bei $F_x = 0$, also

$$\cos\phi_{\text{krit}} = \frac{2}{3} \,, \tag{58}$$

[1P] oder mit der angegebenen Formelsammlung

$$\phi_{\text{krit}} = 48.2^\circ \,. \tag{59}$$

4.7 Lösung (g), 2P

Die Winkelgeschwindigkeit beim Ablösen $\dot{\phi}_{\mathrm{krit}}$ ist mit (52)

$$\dot{\phi}_{\mathrm{krit}} = \frac{1}{T}\sqrt{1-\cos\phi_{\mathrm{krit}}} = \frac{1}{\sqrt{3}T} = \sqrt{\frac{g}{2l}}\,. \tag{60}$$

[2P]

4.8 Lösung (h), 2P

Für $\phi \geq \phi_{\mathrm{krit}}$ bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig in x-Richtung da es keine Zwangskraft gibt: $m\ddot{x} = 0$. [1P] Also

$$x(t) = \dot{x}_{\mathrm{krit}} t + x_{\mathrm{krit}}\,, \tag{61}$$

mit ($\sin\phi_{\mathrm{krit}} = \sqrt{5}/3$ laut Formelsammlung)

$$x_{\mathrm{krit}} = l\sin\phi_{\mathrm{krit}} = l\sqrt{5}/3\,, \qquad \dot{x}_{\mathrm{krit}} = l\cos\phi_{\mathrm{krit}}\dot{\phi}_{\mathrm{krit}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{gl}{2}} = \frac{2}{3}\frac{l}{\sqrt{3}T}\,. \tag{62}$$

[1P]

5 Lösungen Aufgabe 5

5.1 Lösung (a), 3P

Wir haben als Funktion der generalisierten Koordinate x

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (x_0 - x)\tan\phi \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ -\dot{x}\tan\phi \end{pmatrix}, \tag{63}$$

also die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \tan^2\phi\right) . \tag{64}$$

[1P] Mit der potentiellen Energie

$$V = mgz = -mg(x - x_0)\tan\phi\,, \tag{65}$$

[1P] ist schließlich die Lagrangefunktion

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left(1 + \tan^2\phi\right) + mg(x - x_0)\tan\phi\,. \tag{66}$$

[1P]

5.2 Lösung (b), 3P

Wir haben

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan\phi \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_R = -\alpha\begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ -\dot{x}\tan\phi \end{pmatrix}, \tag{67}$$

[1P] also für die generalisierte Reibungskraft

$$Q = -\alpha\dot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right) . \tag{68}$$

[2P]

5.3 Lösung (c), 7P

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right) , \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg\tan\phi\,, \tag{69}$$

lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right) - mg\tan\phi = -\alpha\dot{x}\left(1 + \tan^2\phi\right) , \tag{70}$$

[2P] oder

$$\ddot{x} = \frac{g\tan\phi}{1 + \tan^2\phi} - \frac{\alpha}{m}\dot{x}\,. \tag{71}$$

Die Lösung erhalten wir wenn wir die allg. Lösung der homogenen Gleichugn zur speziellen Lösung der inhomogenen addieren (volle Punkte gibt es auch wenn die Lösung in Gleichung (76) direkt hingeschrieben wird oder die Bewegungsgleichung 2x integriert wird). Die allg. Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha}{m}\dot{x}\,. \tag{72}$$

[1P] lautet

$$x_{\text{hom}}(t) = Ae^{-\alpha/mt} + B\,, \tag{73}$$

[1P] eine spezielle Lösung der inhomogenen ist

$$x_{\text{inh}} = \frac{mg\tan\phi}{\alpha(1+\tan^2\phi)}t\,. \tag{74}$$

[1P] Die Randbedingungen fixieren

$$B = -A = -\frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{m^2}{\alpha^2}\,, \tag{75}$$

also insgesamt

$$x(t) = \frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{m^2}{\alpha^2}\left[e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t\right]\,. \tag{76}$$

[2P]

5.4 Lösung (d), 5P

Für kleine α ist

$$e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t \to \frac{\alpha^2}{2m^2}t^2 + \mathcal{O}(\alpha^3)\,, \tag{77}$$

[2P] also in diesem Fall

$$x(t) \to \frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{t^2}{2}\,, \tag{78}$$

[3P] was in der Tat die Lösung der Bewegungsgleichung (17) mit $\alpha = 0$ ist.

5.5 Lösung (e), 2P

Für große α ist

$$e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t \to \frac{\alpha}{m}t\,, \tag{79}$$

[1P] also in diesem Fall

$$x(t) \to \frac{g\tan\phi}{1+\tan^2\phi}\frac{m}{\alpha}t\,. \tag{80}$$

[1P] Punkte gibts auch wenn der -1 Term mitgenommen wurde