Karlsruher Institut für Technologie

SoSe 2018

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Klausur 1

1. August 2018, 14:00-16:00

Name (*in Großbuchstaben*)

Matrikelnummer

Aufgabe 1	/ 20 pt
Aufgabe 2	/ 28 pt
Aufgabe 3	/ 30 pt
Aufgabe 4	/ 22 pt
Total	/ 100 pt

Diese Punktetabelle dient der Korrektur und soll nicht von Ihnen beschrieben werden.

Hinweise

- Legen Sie bitte Ihren Studentenausweis (oder einen anderen Lichtbildausweis) neben sich auf den Tisch.
- Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch.
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben.
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.
- Die Benutzung anderer Hilfsmittel ist nicht gestattet.
- Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Bitte beachten Sie, dass immer nur einer gleichzeitig zur Toilette gehen darf.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Lösungen können bis 20 Minuten vor Ende der Bearbeitungszeit abgegeben werden. Falls Sie innerhalb der letzten 20 Minuten fertig werden, bleiben Sie bitte bis zum Ende der Bearbeitungszeit an Ihren Platz sitzen.
- Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite.

Aufgabe 1: Unabhängige Fragen **20 Punkte**

Diese Aufgabe besteht aus Einzelfragen, die unabhängig voneinander beantwortet werden können.

(a) $\boxed{\text{1 pt}}$ Die Lagrange-Funktion eines gegebenen physikalischen Systems sei zeitunabhängig. Welche Größe ist erhalten?

(b) $\boxed{\text{1 pt}}$ Ein Teilchen bewege sich in zwei Dimensionen, beschrieben durch die kartesischen Koordinaten x und y. Welche Eigenschaft muss die Lagrange-Funktion haben, wenn der Impuls des Teilchens in x-Richtung erhalten ist?

(c) $\boxed{\text{1 pt}}$ Ein harmonischer Oszillator mit der Eigenfrequenz ω ist einer Kraft der Form $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ ausgesetzt. Was passiert qualitativ mit der Amplitude der Oszillation, wenn Ω sich an ω annähert?

(d) $\boxed{\text{1 pt}}$ Geben Sie ein Beispiel für ein physikalisches System, das durch folgende Lagrange-Funktion beschrieben werden kann: $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{k}{r}$.

(e) $\boxed{\text{2 pt}}$ Was besagt der Satz von Liouville in Worten?

(f) $\boxed{\text{2 pt}}$ Welche Differenzialgleichung muss eine Funktion f erfüllen, wenn $\delta \int_{t_1}^{t_2} f(q, \dot{q}, t)dt = 0$, mit festgehaltenem q zu den Zeiten t_1 und t_2?

(g) $\boxed{\text{2 pt}}$ Eine kanonische Transformation der Koordinaten (q, p) zu den Koordinaten (Q, P) ist gegeben durch eine erzeugende Funktion $F(q, Q) = q\,Q$. Welche Transformation wird erzeugt?

(h) $\boxed{\text{3 pt}}$ Auf einer masselosen quadratischen Platte seien Teilchen der Masse m an den vier Ecken befestigt, siehe Abbildung 1. Die Platte befinde sich in der x, y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung. Was sind die Trägheitsmomente der Platte im Bezug zur z-Achse und im Bezug zu einer diagonalen Achse, verlaufend durch den Ursprung und den Punkt $(a, a, 0)$?

(i) $\boxed{\text{3 pt}}$ Die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$ beschreibe ein Teilchen der Masse m in einer Dimension. Zur Zeit $t = 0$ sei das Teilchen an der Stelle x_1. Zu welcher Zeit t befindet sich das Teilchen an der Stelle x_2? Leiten sie die Integralform des Ergebnisses her.

(j) $\boxed{\text{4 pt}}$ Ein harmonischer Oszillator habe die Masse m und die Eigenfrequenz ω. Er ist einer konstanten Kraft ausgesetzt, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschalten wird, sodass $F(t) = F_0\vartheta(t)$. (Die Funktion $\vartheta(t)$ ist die Heaviside-Funktion, die 0 für $t < 0$ und 1 für $t > 0$ ist). Was ist $x(t)$ für $t > 0$, wenn sich der Oszillator in Ruhe befindet für $t < 0$?

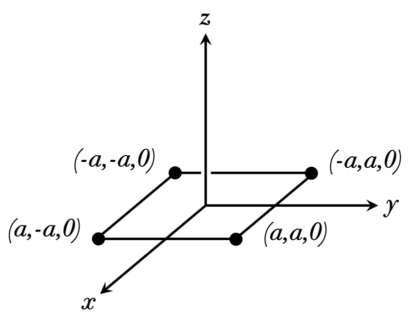

Abbildung 1: Masselose quadratische Platte mit vier Teilchen der Masse m an den Ecken.

Aufgabe 2: Teilchen im Zentralpotential **28 Punkte**

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m mit Ortsvektor $\vec{r}$ im dreidimensionalen Raum. Das Teilchen befindet sich in einem Zentralpotential $U(r)$. Die zugehörige Lagrange-Funktion ist durch

$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r) \ , \quad r = |\vec{r}\,| \ . \tag{1}$$

gegeben.

(a) $\boxed{\text{4 pt}}$ Geben Sie die Symmetrien der Lagrange-Funktion und die zugehörigen erhaltenen Größen an.

(b) $\boxed{\text{3 pt}}$ Skizzieren Sie grob, wie mit Hilfe einer der erhaltenen Größen das dreidimensionale Problem zu einem zweidimensionalen Problem reduziert werden kann.

(c) $\boxed{\text{3 pt}}$ Geben Sie einen Ausdruck für die Energie des Teilchens an und bringen Sie diesen in die Form

$$E = \tfrac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \ . \tag{2}$$

Wir betrachten die Situation in der das Potential im Unendlichen verschwindet und das Teilchen aus dem Unendlichen mit Energie E und Stoßparameter ρ kommt.

(d) $\boxed{\text{3 pt}}$ Zeigen Sie, dass das effektive Potential in die Form

$$U_{\text{eff}}(r) = E \frac{\rho^2}{r^2} + U(r) \ , \tag{3}$$

gebracht werden kann.

Wir betrachten nun das explizite Potential

$$U(r) = \frac{b}{r^2} - \frac{c}{r^4} \ , \tag{4}$$

mit **positiven** Konstanten b und c.

(e) $\boxed{\text{4 pt}}$ Skizzieren Sie das zugehörige effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$. Beschreiben Sie qualitativ und mit wenigen Worten welche verschiedenen Arten von Bewegungen dieses Potential zulässt.

(f) $\boxed{\text{4 pt}}$ Berechnen Sie das Maximum des effektiven Potentials U_{max}.

(g) $\boxed{\text{7 pt}}$ Berechnen Sie den totalen Einfangquerschnitt σ_{tot} für ein Teilchen das aus dem Unendlichen kommt und das Zentrum des Zentralpotentials erreicht.

Aufgabe 3: Feder-Pendel System **30 Punkte**

Betrachten Sie das System in Abbildung 2: Ein Block der Masse M bewegt sich reibungslos auf einer horizontalen Ebene und ist an einer Feder der Federhärte k angebracht. Die Auslenkung der Feder ist x. An dem Block ist ein Pendel angebracht, das aus einem masselosen Stab der Länge ℓ und einer Masse m am Ende des Stabs besteht. Die Schwerkraft wirkt in vertikaler Richtung.

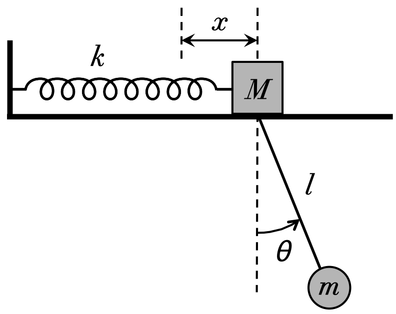

Abbildung 2: Feder-Pendel System.

(a) $\boxed{\text{4 pt}}$ Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems, ausgedrückt durch x, θ und deren Ableitungen, an.

(b) $\boxed{\text{4 pt}}$ Bestimmen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen des Systems.

(c) $\boxed{\text{3 pt}}$ Betrachten Sie den Fall gleicher Massen, $M = m$, und nehmen Sie an, dass die Federhärte k durch $g = k\ell/(2m)$ gegeben ist. Entwickeln Sie die **Lagrange-Funktion** um die Gleichgewichtslage und schreiben Sie sie als

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\dot{q}_i \hat{m}_{ij} \dot{q}_j - q_i \hat{k}_{ij} q_j \right) + \mathcal{O}(q^3, q\dot{q}^2) \ , \tag{1}$$

hier sind $q_1 = x$ und $q_2 = \ell\theta$. Verifizieren Sie, dass die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ durch

$$\hat{m} = m \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{k} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

gegeben sind.

(d) $\boxed{\text{4 pt}}$ Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen kleiner Oszillationen.

(e) $\boxed{\text{4 pt}}$ Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Eigenmoden der kleinen Oszillationen.

(f) $\boxed{\text{3 pt}}$ Beschreiben Sie die Bewegung jeder Eigenmode qualitativ und machen Sie eine kleine Skizze.

(g) $\boxed{\text{4 pt}}$ Erklären Sie (ohne Rechnung), wie man mit Hilfe der Eigenvektoren die allgemeinen Lösungen für $x(t)$ und $\theta(t)$ finden kann.

Die allgemeinen Lösungen sind durch

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \ , \\ \theta(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\ell} \Big[- C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \Big] \ . \end{aligned} \tag{3}$$

gegeben.

(h) $\boxed{\text{4 pt}}$ Für $t < 0$ befindet sich das System in Ruhe in der Gleichgewichtslage. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Pendel leicht angestoßen, so dass es instantan (d.h. ohne Verzögerung) die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}(t = 0) = v_0/\ell$ erhält. Bestimmen Sie $\theta(t)$ und $x(t)$ für $t > 0$.

Aufgabe 4: Hamiltonsche Mechanik — 22 Punkte

Ein freies relativistisches Teilchen der Ruhemasse m bewegt sich im eindimensionalen Raum. Die Lagrange-Funktion ist durch

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ , \tag{1}$$

gegeben, wobei $v = \dot{x}$.

(a) $\boxed{\text{4 pt}}$ Zeigen Sie, dass die Hamilton-Funktion für die relativistische Lagrange-Funktion in Gleichung (1) durch $H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ gegeben ist.

(b) $\boxed{\text{5 pt}}$ Berechnen Sie die Poisson-Klammern $\{p, H\}$ und $\{x, H\}$. Verwenden Sie diese Ergebnisse, um die explizite Zeitabhängigkeit von $x(t)$ zu bestimmen.

Durch Entwicklung der Hamilton-Funktion in Teilaufgabe (a) um den nichtrelativistischen Limes lassen sich relativistische Korrekturen berechnen. Durch Addition eines Potentials lassen sich auf ähnliche Weise relativistische Korrekturen zum harmonischen Oszillator berechnen. Nach einer aufwendigen kanonischen Transformation lässt sich die resultierende Hamilton-Funktion als

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2\right)^2 \tag{2}$$

schreiben.

(c) $\boxed{\text{3 pt}}$ Bestimmen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die Hamilton-Funktion in Gleichung (2).

(d) $\boxed{\text{3 pt}}$ Zeigen Sie, unter Verwendung von Poisson-Klammern, dass

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \tag{3}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

(e) $\boxed{\text{3 pt}}$ Verwenden Sie das Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe um zu zeigen, dass x der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\ , \tag{4}$$

genügt, wobei $\omega = \omega_0\,(1 + 2\lambda H_0)$.

(f) $\boxed{\text{4 pt}}$ Lösen Sie die Differentialgleichung in Gleichung (4). Drücken Sie ω durch λ, m, ω_0 und die Amplitude der Oszillation A aus.