SoSe 2018

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. H. Frellesvig, Dr. R. Rietkerk

Klausur 2

10. Oktober 2018, 11:00-13:00

Name (*in Großbuchstaben*)

Matrikelnummer

Aufgabe 1	/ 22 pt
Aufgabe 2	/ 26 pt
Aufgabe 3	/ 26 pt
Aufgabe 4	/ 26 pt
Total	/ 100 pt

Diese Punktetabelle dient der Korrektur und soll nicht von Ihnen beschrieben werden.

Hinweise

- Legen Sie bitte Ihren Studentenausweis (oder einen anderen Lichtbildausweis) neben sich auf den Tisch.
- Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch.
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben.
- Hilfsmittel: ein (1) beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.
- Die Benutzung anderer Hilfsmittel ist nicht gestattet.
- Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Bitte beachten Sie, dass immer nur einer gleichzeitig zur Toilette gehen darf.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Lösungen können bis 20 Minuten vor Ende der Bearbeitungszeit abgegeben werden. Falls Sie innerhalb der letzten 20 Minuten fertig werden, bleiben Sie bitte bis zum Ende der Bearbeitungszeit an Ihren Platz sitzen.
- Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite.

Aufgabe 1: Unabhängige Fragen **22 Punkte**

Diese Aufgabe besteht aus Einzelfragen, die unabhängig voneinander beantwortet werden können.

(a) $\boxed{\text{2 pt}}$ Welche der folgenden Lagrange-Funktionen führen zur selben Bewegungsgleichung wie $L(x, \dot{x})$?

$$L_1(x, \dot{x}) = C\, L(x, \dot{x}) \ , \tag{1}$$
$$L_2(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) + F(x) \ , \tag{2}$$
$$L_3(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}) + dF(x)/dt \ , \tag{3}$$

wobei C eine beliebige Konstante und F eine beliebige Funktion ist.

(b) $\boxed{\text{2 pt}}$ Die Bewegung eines Teilchens ist auf die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R eingeschränkt. Beschreiben Sie zwei Methoden diese Einschränkung im Lagrange Formalismus zu berücksichtigen.

(c) $\boxed{\text{1 pt}}$ Gegeben sei eine Lagrange-Funktion welche invariant ist unter einer infinitesimalen Transformation $r_i \to r_i + \epsilon\, \epsilon_{ijk} n_j r_k$, wobei ϵ als klein zu betrachten ist und $\vec{n}$ ein bekannter konstanter Vektor ist. Was ist die zugehörige Erhaltungsgröße?

(d) $\boxed{\text{1 pt}}$ Geben Sie die Formel für den Virialsatz an.

(e) $\boxed{\text{1 pt}}$ Was ist der Wert des totalen Wirkungsquerschnitts für die Rutherford-Streuung?

(f) $\boxed{\text{1 pt}}$ Gegeben seien zwei explizit zeitunabhängige Größen I_1 und I_2. Was können Sie über die Poisson-Klammer $\{I_1, I_2\}$ sagen?

(g) $\boxed{\text{1 pt}}$ Zeichnen Sie den Pfad im Phasenraum für ein Teilchen der Masse m, welches am Anfang im Ursprung in Ruhe ist und eine konstante Beschleunigung in einer Dimension erfährt.

(h) $\boxed{\text{1 pt}}$ Wie viele *verschiedene* Hauptträgheitsmomente hat ein symmetrischer Kreisel?

(i) $\boxed{\text{1 pt}}$ Nach einer kanonischen Transformation von Koordinaten $\vec{q}$ und deren konjugierten Impulsen $\vec{p}$ zu neuen Variablen $\vec{Q}$ und $\vec{P}$, was ist das Resultat für die Poisson-Klammer $\{P_i, Q_j\}$?

(j) $\boxed{\text{3 pt}}$ Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer homogenen dünnen Stange der Masse m und Länge ℓ um eine Achse senkrecht zu der Stange die durch den Mittelpunkt der Stange geht.

(k) $\boxed{\text{4 pt}}$ Ein Oszillator erfüllt die Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega^2 x = 0$. Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $x(t) = Ae^{i\lambda t}$ und bestimmen Sie die Frequenzen λ. Zeichnen Sie die Lösung $x(t)$ unter der Annahme, dass $\kappa < \omega$.

(l) $\boxed{\text{4 pt}}$ Die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - U(x_1 - x_2)$ beschreibt ein Zweiteilchensystem in einer Dimension. Welche Größe ist aufgrund der Symmetrietransformation $x_i \to x_i + \epsilon$ mit $i = 1, 2$ erhalten? Schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der Position des Massenmittelpunktes $R = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$ und des relativen Abstandes $r = x_1 - x_2$.

Aufgabe 2: Kepler-Problem **26 Punkte**

Das Kepler-Problem wird durch das Zentralpotenzial

$$U(r) = -\frac{k}{r} \,, \quad \text{mit } k = GMm > 0 \tag{1}$$

beschrieben.

(a) $\boxed{4\text{ pt}}$ Reduzieren Sie das dreidimensionale Kepler-Problem zu einem eindimensionalen Problem.

(b) $\boxed{5\text{ pt}}$ Geben Sie das dazugehörige effektive Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ an. Zeichnen Sie das effektive Potenzial und beschreiben Sie jeweils qualitativ die Umlaufbahn für die folgenden Fälle:

$$\begin{aligned} \text{(i) } & E = U_{\min} < 0 \,; \\ \text{(ii) } & U_{\min} < E < 0 \,; \\ \text{(iii) } & E > 0 \,. \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion für das Kepler-Problem ist durch

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \tag{2}$$

gegeben. Der Runge-Lenz-Vektor ist durch

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{M} - \frac{mk}{r}\vec{r} \tag{3}$$

gegeben, wobei $\vec{M}$ der Drehimpuls ist.

(c) $\boxed{5\text{ pt}}$ Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{H, A_i\}$. Interpretieren Sie ihr Ergebnis physikalisch.

(d) $\boxed{2\text{ pt}}$ Argumentieren Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor in der selben Ebene wie die Umlaufbahn liegt.

(e) $\boxed{4\text{ pt}}$ Zeichnen Sie die elliptische Umlaufbahn eines Planeten um die Sonne. Zeichnen Sie auch die Richtung des Runge-Lenz-Vektors an verschiedenen Punkten der Umlaufbahn.

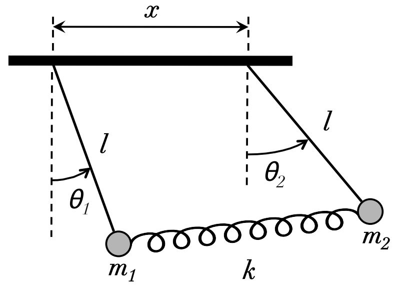
(f) $\boxed{6\text{ pt}}$ Verwenden Sie den Runge-Lenz-Vektor um die Form der Umlaufbahn $r(\phi)$ zu bestimmen, wobei ϕ den Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{A}$ darstellt. Vergleichen Sie das Ergebnis mit

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\phi)} \tag{4}$$

und bestimmen Sie den Ausdruck für die Exzentrizität der Umlaufbahn ϵ als Funktion von A, m und k.

Aufgabe 3: Gekoppelte Pendel **26 Punkte**

Betrachten Sie das System aus der Abbildung. Zwei Pendel mit gleicher Länge ℓ aber unterschiedlichen Massen m_1 und m_2 sind in einem Abstand x voneinander aufgehängt. Die zwei Massen sind durch eine masselose Feder mit Federkonstante k miteinander verbunden. Die Länge der Feder in Ruhe ist x. Die Schwerkraft wirkt in vertikale Richtung.



(a) $\boxed{4\text{ pt}}$ Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems, als Funktion von θ_1, θ_2 sowie deren zeitlichen Ableitungen, auf.

(b) $\boxed{4\text{ pt}}$ Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf.

(c) $\boxed{4\text{ pt}}$ Setzen Sie die Massen gleich, $m_1 = m_2 = m$, und parametrisieren Sie die Federkonstante durch

$$k = \frac{mg}{2\ell}\eta \ , \tag{1}$$

wobei η ein dimensionsloser Parameter ist. Schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Taylor-Reihe um den Gleichgewichtspunkt:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left(\dot{q}_i\hat{m}_{ij}\dot{q}_j - q_i\hat{k}_{ij}q_j\right) + \mathcal{O}(q^3, q\dot{q}^2) \ , \tag{2}$$

wobei $q_1 = \ell\theta_1$ und $q_2 = \ell\theta_2$. Überprüfen Sie, dass die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{k}$ durch

$$\hat{m} = m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \ , \quad \hat{k} = \frac{mg}{\ell}\begin{bmatrix}1+\eta & -\eta\\ -\eta & 1+\eta\end{bmatrix} \tag{3}$$

gegeben sind.

(d) $\boxed{4\text{ pt}}$ Leiten Sie die Eigenfrequenzen für kleine Oszillationen her.

(e) $\boxed{4\text{ pt}}$ Leiten Sie die Vektoren, die zu den zwei Eigenmoden gehören, her.

(f) $\boxed{3\text{ pt}}$ Zeichnen Sie beide Eigenmoden und geben Sie zu jeder die zugehörige Eigenfrequenz an.

(g) $\boxed{3\text{ pt}}$ Erklären Sie (ohne Rechnung) wie die Eigenvektoren verwendet werden können um die allgemeinen Lösungen für $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$ zu finden.

Aufgabe 4: Hamilton-Funktion 26 Punkte

Betrachten Sie die Hamilton-Funktion

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \gamma\,\vec{M}\cdot\vec{B} \tag{1}$$

für ein Teilchen der Masse m, mit positiver Kopplungskonstante γ, $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{p}$, und zeitunabhängigem Vektor $\vec{B}$.

(a) $\boxed{\text{4 pt}}$ Zeigen Sie, dass die Hamilton-Bewegungsgleichungen durch

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} + \gamma\,\vec{r}\times\vec{B}\ , \quad \dot{\vec{p}} = \gamma\,\vec{p}\times\vec{B} \tag{2}$$

gegeben sind.

(b) $\boxed{\text{6 pt}}$ Zeigen Sie, dass die zeitliche Ableitung des Drehimpulses durch

$$\dot{\vec{M}} = \gamma\,\vec{M}\times\vec{B} \tag{3}$$

gegeben ist.

Nehmen Sie für den Rest der Aufgabe an, dass der Vektor $\vec{B}$ raum- und zeitunabhängig ist.

(c) $\boxed{\text{4 pt}}$ Zeichnen Sie alle drei Vektoren aus Gleichung (3) in das selbe Koordinatensystem. Wählen Sie die Achsen des Koordinatensystems so, dass $\vec{B}$ in z-Richtung zeigt und $\vec{M}$ in der y, z–Ebene liegt. Argumentieren Sie, dass $\vec{M}$ um die Richtung von $\vec{B}$ präzediert.

(d) $\boxed{\text{6 pt}}$ Bestimmen Sie die explizite Lösung von Gleichung (3) für die Randbedingung $\vec{M}(t=0) = \vec{M}_0$.

(e) $\boxed{\text{6 pt}}$ Konstruieren Sie die zur Hamilton-Funktion aus Gleichung (1) zugehörige Lagrange-Funktion. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Komponenten von $\vec{r}$ her.