SoSe 2019

Klassische Theoretische Physik II

Vorlesung: Prof. Dr. K. Melnikov – Übung: Dr. M. Jaquier, Dr. R. Rietkerk

Klausur 1

9. August 2019, 15:30-17:30

Vorname, Nachname :

Matrikelnummer :

Diese Punktetabelle dient der Korrektur
und soll nicht von Ihnen beschrieben werden.

Aufgabe 1	/ 16 pt
Aufgabe 2	/ 22 pt
Aufgabe 3	/ 15 pt
Aufgabe 4	/ 22 pt
Total	/ 75 pt

Hinweise zur Klausur und Formeln auf Rückseite.

Hinweise

- Legen Sie bitte Ihren Studentenausweis (oder einen anderen Lichtbildausweis) neben sich auf den Tisch.
- Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch.
- Nur ausgegebenes Papier verwenden, bei Bedarf melden.
- Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen.
- Nicht mit Bleistift oder rotem Stift schreiben.
- Die Benutzung anderer Hilfsmittel ist nicht gestattet.
- Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Bitte beachten Sie, dass immer nur einer gleichzeitig zur Toilette gehen darf.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Lösungen können bis 20 Minuten vor Ende der Bearbeitungszeit abgegeben werden. Falls Sie innerhalb der letzten 20 Minuten fertig werden, bleiben Sie bitte bis zum Ende der Bearbeitungszeit an Ihren Platz sitzen.
- Heften Sie die Klausurblätter mit Ihren Lösungen zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite.

Formeln

Noether Theorem: ist die Wirkung invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$t \to t + \epsilon\, X(\{q_j\}, t)\ , \quad q_i \to q_i + \epsilon\, \Psi_i(\{q_j\}, t)\ , \tag{1}$$

dann ist die zugehörige Erhaltungsgröße

$$K = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Psi_i - X\dot{q}_i) + L\,X\ . \tag{2}$$

Poisson Klammer:

$$\{F, G\} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\ . \tag{3}$$

Nützliches Integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{b}\,x}{\sqrt{a}}\right)\ . \tag{4}$$

Aufgabe 1: Unabhängige Fragen **16 Punkte**

Diese Aufgabe besteht aus Einzelfragen, die unabhängig voneinander beantwortet werden können.

(a) $\boxed{\text{1 pt}}$ Leiten Sie aus der Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$ das zweite Newton'sche Gesetz her.

(b) $\boxed{\text{1 pt}}$ Inwiefern können sich zwei Lagrangefunktionen unterscheiden, welche identische Bewegungsgleichungen ergeben?

(c) $\boxed{\text{2 pt}}$ Welche Komponenten des Impulses und des Drehimpulses sind für ein Teilchen im Gravitationsfeld $U(\vec{r}) = mgz$ erhalten?

(d) $\boxed{\text{2 pt}}$ Argumentieren Sie, dass die Bewegung im drei-dimensionalen Kraftfeld eines Zentralpotentials $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$ in einer zwei-dimensionalen Ebene stattfindet.

(e) $\boxed{\text{2 pt}}$ Ein Teilchen fliegt mit einem Stossparameter b entlang der z-Achse und wird an einem Potential um einem Winkel θ gestreut. Fertigen Sie eine Skizze des Streuprozesses an und bezeichnen Sie den Stossparameter und den Streuwinkel.

(f) $\boxed{\text{2 pt}}$ Ein Oszillator $\xi(t)$ welcher einer externen Kraft $F(t)$ ausgesetzt ist erfüllt die Gleichung $\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{F(t)}{m}$. Was passiert mit der Schwingungsamplitude wenn $F(t) \propto \sin(\omega t)$? Was passiert wenn Reibung dazu in Betracht genommen wird?

(g) $\boxed{\text{2 pt}}$ Skizzieren Sie die Bewegung eines Harmonischen Oszillators, welcher einer Reibungskraft proportional zu κ ausgesetzt ist. Der Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ im Stillstand und um einer Distanz d bezüglich der Ruhelage ausgelenkt. Betrachten Sie die zwei Fälle $\kappa < \omega$ und $\kappa > \omega$.

(h) $\boxed{\text{1 pt}}$ Warum ist es generell unmöglich, dass genau zwei Komponenten des Drehimpulses erhalten sind? Benutzen Sie $\{M_i, M_j\} = -\epsilon_{ijk}M_k$.

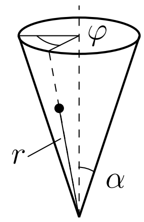
(i) $\boxed{\text{1 pt}}$ Was ist nicht invariant unter kanonischen Transformationen?

a) Poisson-Klammern
b) Hamilton'sche Funktion
c) Phasenraumvolumen

(j) $\boxed{\text{2 pt}}$ Betrachten Sie ein Ball der Masse m, welches sich zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einer Höhe h über dem Boden im Stillstand befindet. Der Ball fällt unter dem Einfluss der Schwerkraft nach unten und prallt am Boden ab, ohne dadurch an Energie zu verlieren. Nach einer Zeit T befindet sich der Ball wieder auf der Höhe h. Bestimmen Sie die Abhängigkeit zwischen z und p_z und skizzieren Sie die Bahn des Balls als eine Kurve im Phasenraum.
Hinweis : Was passiert mit dem Vorzeichen des Impulses beim Aufprall?

Aufgabe 2: Teilchen in einem Kegel — 22 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Innenseite eines Kegels bewegt. Die Bewegung des Teilchens ist auf dieser Fläche eingeschränkt, es springt oder prallt nicht von der Kegelwand ab. Die Geometrie des Kegels ist durch den Öffnungswinkel α zwischen der Kegelwand und Kegelachse festgelegt.



(a) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Konstruieren Sie die Lagrangefunktion des Teilchens in Abhängigkeit der Koordinaten r und φ (siehe Skizze). Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen.

(b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Bestimmen Sie die Energie des Teilchens und argumentieren Sie, dass diese erhalten ist. Welche Größe, im Folgenden mit K bezeichnet, ist außerdem noch erhalten? Was ist die Physikalische Bedeutung dieser Größe?

(c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Verwenden Sie die Erhaltungsgröße K, um die Bewegung des Teilchens auf einer eindimensionalen Bewegung zurückzuführen. Zeigen Sie, dass die Energie als $E = T + U_{\text{eff}}(r)$ geschrieben werden kann, wobei T nur von $\dot{r}$ abhängt und $U_{\text{eff}}(r)$ gegeben ist durch

$$U_{\text{eff}}(r) = mgr\cos(\alpha) + \frac{K^2}{2mr^2\sin^2(\alpha)}. \tag{1}$$

(d) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Bestimmen Sie den Radius r_0 sodass die Kreisförmige Bahn mit konstantem Radius r_0 eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist.

(e) $\boxed{4 \text{ pt}}$ Argumentieren Sie, dass für kleine Abweichungen von r_0 das Teilchen eine Schwingungsbewegung um r_0 ausführt: $r(t) = r_0 + \xi(t)$. Skizzieren Sie die Bahn des Teilchens in diesem Fall. Entwickeln Sie die Bewegungsgleichungen in der Näherung kleiner Abweichungen $\xi(t)$ und bestimmen Sie die Frequenz, mit der das Teilchen um r_0 oszilliert, in Abhängigkeit von g, α und r_0.

Betrachten Sie nun die gleiche Situation im Weltraum, so dass keine Schwerkraft auf das Teilchen wirkt. Die Bewegung des Teilchens ist immer noch so eingeschränkt, dass es sich nur entlang der Kegelwand fortbewegt und nicht weg davon.

(f) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Skizzieren Sie erneut das effektive Potential, und beschreiben Sie die möglichen Arten der Bewegung. Ist es für das Teilchen möglich, die Kegelspitze zu erreichen? Wenn ja, unter welchen Umständen, wenn nein, weshalb nicht?

(g) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Verwenden Sie die in Teilaufgabe (b) bestimmten Erhaltungsgrößen um einen Ausdruck für $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$ zu finden. Zeigen Sie damit, dass die Änderung des Winkels φ wenn das Teilchen vom Radius r_A nach r_B geht gegeben ist durch

$$\Delta\varphi = \frac{K}{m\sin^2(\alpha)} \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))}}. \tag{2}$$

(h) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Betrachten Sie nun die Bahn, bei der das Teilchen von $r = \infty$ und $\varphi = \varphi_1$ kommt mit Geschwindigkeiten $\dot{r} < 0$ und $\dot{\varphi} > 0$, sich entlang der Kegelwand bewegt bis es wieder asymptotisch nach $r = \infty$ mit einer Winkelkoordinate φ_2 geht. Bestimmen Sie die gesamte Winkelverschiebung $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ während dieser Bewegung. Was passiert in den Grenzfällen $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ und $\alpha \to 0$ für den Öffnungswinkel α des Kegels? Entspricht das Ihren Erwartungen?
Hinweis : die Substitution $z = \frac{1}{r}$ kann hilfreich sein.

Aufgabe 3: Gekoppelte harmonische Oszillatoren **15 Punkte**

Betrachten Sie ein System aus zwei harmonischen Oszillatoren mit Masse m und Federkonstante k, welche an zwei gegenüberliegenden Wänden befestigt sind. Die Oszillatoren sind zusätzlich durch eine weitere Feder mit Federkonstante $k_{12} \neq k$ miteinander verbunden.

Abbildung 1: Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren

(a) $\boxed{\text{2 pt}}$ Verwenden Sie die Abweichungen ξ_1 bzw. ξ_2 der beiden Massen von ihrer jeweiligen Gleichgewichtslage, um das System zu beschreiben. Fassen Sie diese als ein Vektor $\vec{\xi} = (\xi_1 \;\; \xi_2)^{\mathrm{T}}$ zusammen und schreiben Sie die Lagrangefunktion des Systems anhand von Matrizen, welche auf $\vec{\xi}$ beziehungsweise dessen Zeitableitungen wirken.

(b) $\boxed{\text{3 pt}}$ Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen und schreiben Sie diese ebenfalls in Abhängigkeit der in der vorherigen Teilaufgabe bestimmte Matrizen hin. Verwenden Sie einen Ansatz für die Lösung $\vec{\xi}$ und setzen Sie diesen in die Bewegungsgleichungen ein. Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass die sich daraus ergebenden Gleichungen eine nichttriviale Lösung haben.

(c) $\boxed{\text{2 pt}}$ Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen ω_s^2 des Systems.

(d) $\boxed{\text{5 pt}}$ Bestimmen Sie für jede Eigenfrequenz ω_s^2 die zugehörige Schwingungsamplitude $\vec{a}^{(s)}$ und normieren Sie diese nach der Bedingung $a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = \delta^{s's}$. Fertigen Sie jeweils eine Skizze der Bewegung an.

(e) $\boxed{\text{3 pt}}$ Geben Sie die Allgemeine Form der Lösung $\vec{\xi}(t)$ an. Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen vorgegeben:

$$\vec{\xi}(t) = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{\xi}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit einer beliebigen Konstante A. Bestimmen Sie daraus alle freie Parameter der Lösung $\vec{\xi}(t)$.

Aufgabe 4: Symmetrie und Hamiltonfunktion **22 Punkte**

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem dreidimensionalen Potential, sodass

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

wobei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor ist.

(a) $\boxed{\text{2 pt}}$ Argumentieren Sie, dass die Energie des Teilchens erhalten ist, und bestimmen Sie den Ausdruck für E.

(b) $\boxed{\text{2 pt}}$ Zeigen Sie, dass die Wirkung invariant ist unter die Transformation

$$\vec{r} \to \lambda\,\vec{r}\,, \qquad t \to \lambda^2\,t\,. \tag{2}$$

(c) $\boxed{\text{2 pt}}$ Zeigen Sie mithilfe des Noether Theorems, dass die zur Symmetrietransformation in Gleichung (2) gehörige Erhaltungsgröße durch

$$K = m\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} - 2Et \tag{3}$$

gegeben ist.

(d) $\boxed{\text{2 pt}}$ Leiten Sie aus Gleichung (3) her, dass

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}t^2 + \frac{2K}{m}t + C}\,, \tag{4}$$

wobei C eine Integrationskonstante ist.

Wir beschreiben nun dieses Problem im Hamilton Formalismus.

(e) $\boxed{\text{3 pt}}$ Berechnen Sie den kanonischen Impuls $\vec{p}$ aus Gleichung (1) und zeigen Sie, dass die Hamiltonfunktion durch

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{5}$$

gegeben ist. Was ist das Verhältnis zwischen H und E?

(f) $\boxed{\text{1 pt}}$ Was ist das Verhältnis zwischen der totalen Zeitableitung einer beliebigen Funktion $f(\vec{r},\vec{p},t)$ und den Poisson-Klammern?

(g) $\boxed{\text{2 pt}}$ Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\left\{H\,,\,\vec{r}\cdot\vec{p}\right\}$.

(h) $\boxed{\text{2 pt}}$ Leiten Sie aus den Resultaten der drei vorherigen Teilaufgaben die gleiche Erhaltungsgröße wie in Teilaufgabe (c) her.

Wir beschreiben nun die Bewegung des Teilchens.

(i) $\boxed{\text{2 pt}}$ Bestimmen Sie die Hamilton-Gleichungen für die Hamiltonfunktion in Gleichung (5).

(j) $\boxed{\text{2 pt}}$ Argumentieren Sie mithilfe der Hamilton-Gleichungen, dass die Bewegung für alle Zeit t entlang der z-Achse stattfindet, falls $\vec{a}$ sowie die Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0)$ und $\vec{p}(t=0)$ entlang der z-Achse liegen.

(k) $\boxed{\text{2 pt}}$ Sei $\vec{a} = a\,\hat{e}_z$ sowie $\vec{r}(t=0) = z_0\,\hat{e}_z$ und $\vec{p}(t=0) = \vec{0}$, wobei a und z_0 beide positiv sind. Bestimmen Sie aus Gleichung (4) die Lösung $\vec{r}(t)$ in Abhängigkeit von z_0, a und t.