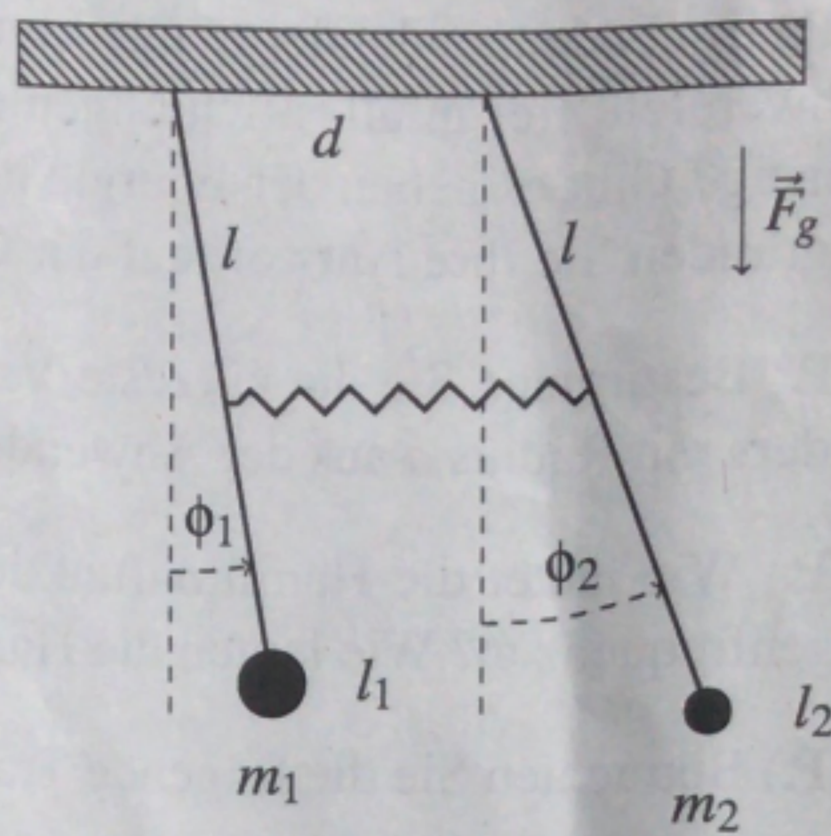
Aufgabe 3. ***Gekoppelte Pendel*** **20 P.**

Betrachten Sie zwei Pendel mit Längen l_1, l_2 und Massen m_1, m_2, die im Abstand d zueinander aufgehängt und zusätzlich über eine Feder gekoppelt sind. Die Feder mit Federkonstante k sei bei beiden Pendeln im Abstand l von deren Aufhängepunkten befestigt. Die Gleichgewichtslage habe das System bei $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Es wirke die Gewichtskraft in vertikaler Richtung.



(a) **(10 P.)** Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion für dieses System für kleine Auslenkungen ϕ_i und stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die ϕ_i auf. Im Potential, das durch die Feder bewirkt wird, können Sie die vertikalen Abstände vernachlässigen.
Hinweis: $\sin x = x + O(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

(b) **(8 P.)** Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall

$$m_1 = m_2 = m\,, \qquad l_1 = l_2 = l\,, \qquad \frac{k}{m} = a^2\frac{g}{l} \qquad (a \in \mathbb{R})\,.$$

Hinweis: Für ein bestimmtes a lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{l}{g}\ddot{\phi}_1 + 2\phi_1 - \phi_2 = 0$$
$$\frac{l}{g}\ddot{\phi}_2 + 2\phi_2 - \phi_1 = 0$$

(die korrekte Lösung dieses Spezialfalles wird mit 6 P. bewertet)

(c) **(2 P.)** Beschreiben Sie kurz die resultierenden Eigenmoden des Systems anschaulich.

Aufgabe 1. ***Unabhängige Aufgaben*** **20 P.**

(a) **(4 P.)** Ein Fadenpendel der Länge ℓ und der Masse m sei am Ursprung befestigt und kann im Schwerefeld frei in alle Richtungen pendeln. Welche verallgemeinerten Koordinaten sind günstig? Gibt es neben der Energie noch Erhaltungsgrößen? Wenn ja, welche und warum? Begründen Sie Ihre Antwort auf der Grundlage der Lagrangefunktion des Systems.

(b) **(6 P.)** Bestimmen Sie die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Oberfläche eines Zylinders mit Radius a aus der Anwendung eines Extremalprinzips. Ist die Lösung eindeutig?

(c) **(4 P.)** Wie lautet die Hamiltonfunktion eines einfachen harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz ω? Wie lauten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen?

(d) **(6 P.)** Betrachten Sie die folgende Transformation für ein System mit zwei Freiheitsgraden:

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2, \quad & P_1 &= b_{11}q_1 + b_{21}q_2, \\ Q_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2, \quad & P_2 &= b_{12}q_1 + b_{22}q_2. \end{aligned}$$

Welche Relation muss zwischen den a_{ij} und b_{ij} gelten, damit die Transformation kanonisch ist?

Aufgabe 2. ***Rotierende Raumstation*** **20 P.**

Betrachten Sie eine zylinderförmige Raumstation mit Radius a und Höhe $2h$, die an den Kopfseiten offen ist. Die Massenverteilung der Station kann in guter Näherung mit einem hohlen Zylinder mit infinitesimal dünnen Wänden konstanter Flächenmassendichte σ angenommen werden. Die Rotation um die Symmetrieachse des Zylinders erlaubt die Simulation der Schwerkraft für die Astronauten.

(a) **(4 P.)** Was sind die Hauptträgheitsachsen der Raumstation in Bezug auf dessen Schwerpunkt? Fertigen Sie dazu auch eine Skizze an.

(b) **(8 P.)** Bestimmen Sie die zugehörigen Hauptträgheitsmomente.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos^2\phi \, d\phi = \pi.$

(c) **(8 P.)** Nehmen Sie nun an, dass die Raumstation nicht vollkommen starr ist, d.h. dass Rotationsenergie durch Vibration der Station in Wärmeenergie übergehen kann, während der Drehimpuls erhalten bleibt. Welche Bedingung muss das Verhältnis h/a erfüllen, damit trotzdem eine stabile Rotation der Station gewährleistet ist?

Hinweis: Wie hängt die Rotationsenergie mit dem Drehimpuls zusammen?