Studentische Lösung!

Aufgabe 1

a) Kugelkoordinaten sind am günstigsten, da die Zwangsbedingung r festlegt und φ und θ frei lässt.

Der Drehimpuls um die Senkrechte Achse ist erhalten, da es Rotationssymmetrie um diese Achse gibt.

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta) = mL^2\dot{\theta}^2 + mL^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \cos(\theta)mgL$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \text{Symmetrie um } \varphi\text{-Achse.}$$

b) Keine Ahnung

c) $H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}kq^2$ wobei m und k so gewählt werden, dass $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq$$

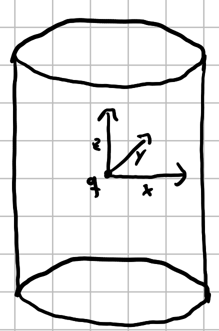
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

d) $\vec{Q} = \hat{a}\vec{p}$ $\qquad$ $\vec{P} = \hat{b}\vec{q}$

$$\{\vec{Q};\vec{P}\} = \underbrace{\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{q}}\frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{p}}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \vec{P}}{\partial \vec{q}}}_{=\hat{b}}\underbrace{\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}}}_{=\hat{a}} = -\hat{b}\hat{a} \stackrel{!}{=} \mathbb{1}_2$$

Vorraussetzung: $-\hat{a} = \hat{b}^{-1}$

Aufgabe 2



$q \mathrel{\hat{=}}$ Schwerpunkt.

a) Die Hauptträgheitsachsen sind die Symmetrieachse und zwei beliebige dazu ortogonale Achsen.

b) Trägheitsmoments eines Kreisrings um die symmetrieachse: mr^2

$\Rightarrow \Theta_{zz} = ma^2 = a^2\, 2\pi a 2h\sigma\, a^2 = 4\pi a^3 h\sigma$ $\qquad m = 4\pi a h\sigma$

Trägheismoment eines Kreisring um die anderen Hauptträgheitsachsen:

$$\Theta_K = \frac{m}{2\pi a}\, a\int_0^{2\pi} \sin^2(\phi)a^2 d\varphi = \frac{m}{2\pi}\pi a^2 = \frac{m}{2}a^2$$

Für den Holzylinder als stapel von Kreisringen mit Satz von Steiner:

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \frac{m}{2h}\int_{-h}^{h} \frac{1}{2}a^2 + z^2 dz = \frac{m}{2}a^2 + \frac{m}{2h}\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-h}^{h} = \frac{m}{2}a^2 + \frac{m}{3}h^2 = 4\pi a h\sigma\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)$$

c) $W = \vec{\omega}^T \hat{\Theta}' \vec{\omega}^T = \vec{L}\, \hat{\Theta}'^{-1} \vec{L}$ $\qquad$ wobei Θ' der Trägheitstensor im Ortsfesten Koordinatensystem ist.

Wenn W also sinkt wird sich der Körper so drehen, dass die Hauptträgheitsachse mit dem größten Trägheitsmoment in Rotationsrichtung zeigt.

$$\Rightarrow \Theta_{zz} \overset{!}{>} \Theta_{xx} = \Theta_{yy} \Leftrightarrow 4\pi a^3 h\sigma > 4\pi a h\sigma\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 > h^2 \Rightarrow h < \sqrt{\frac{3}{2}}\, a$$

Aufgabe 3

a) $T = \frac{m}{2}\dot{\Phi}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 l_2^2$

$$U = \frac{m}{2}k\,(l\Phi_1 - l\Phi_2)^2 + \frac{1}{2}m_1 g\, l_1\Phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2 g l_2 \Phi_2^2$$

$\mathcal{L} = T - U$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_1} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_1} = m\ddot{\Phi}_1 l_1^2 + k l^2(\Phi_1 - \Phi_2) - m_1 g l_1 \Phi_1$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}_2} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi_2} = m\ddot{\Phi}_2 l_2^2 - k l^2(\Phi - \Phi_2) - m_2 g l_2 \Phi_2$$

b) $\ddot{\Phi}_1 = -\, a^2\frac{g}{l}\,(\Phi_1 - \Phi_2) - \frac{g}{l}\Phi_1$

$\ddot{\Phi}_2 = +\, a^2\frac{g}{l}\,(\Phi_1 - \Phi_2) - \frac{g}{l}\Phi_2$

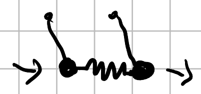
$$\Rightarrow \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 = -\frac{g}{l}(\phi_1 + \phi_2) \Rightarrow \phi_1 + \phi_2 = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$$

$$\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2 = -(2a^2+1)\frac{g}{l}(\phi_1 - \phi_2) \Rightarrow \phi_1 - \phi_2 = C\sin\left(\sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}\,t\right)$$

$$\Rightarrow 2\phi_1 = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + C\sin\left(\sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}\,t\right)$$

$$\Rightarrow 2\phi_2 = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right) - C\sin\left(\sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}\,t\right) - D\cos\left(\sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}\,t\right)$$

c) Eigenmode zu $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$: Synchrone Schwingung



Eigenmode zu $\omega = \sqrt{(2a^2+1)\frac{g}{l}}$: Gegengleiche Schwingung