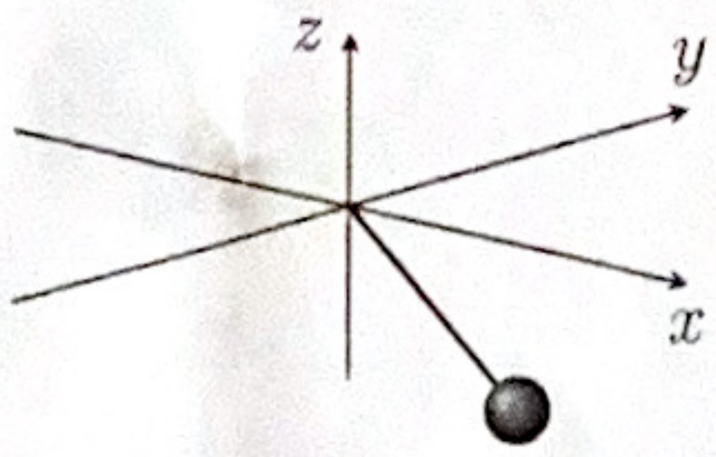
**Aufgabe 1: Kurzfragen** **15 Punkte**

*Anmerkung: Diese Fragen können unabhängig voneinander bearbeitet werden.*

(a) $\boxed{1\text{ P}}$ Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen für ein System mit $N$ Freiheitsgraden?

(b) $\boxed{1\text{ P}}$ Wie viele Freiheitsgrade hat ein Pendel, bei dem eine punktförmige Masse über eine feste Stange aufgehängt ist und das im dreidimensionalen Raum schwingen kann?




(c) $\boxed{1\text{ P}}$ Sei $U(\vec{r})$ ein Potential für ein Teilchen der Masse $m$. Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen das zweite Newtonsche Gesetz her.

(d) $\boxed{3\text{ P}}$ Gegeben sei die Lagrangefunktion $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$ für ein Zentralpotential. Welche Schritte sind nötig, um dieses dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales Problem zu reduzieren?

(e) $\boxed{2\text{ P}}$ Betrachten Sie ein Teilchen im dreidimensionalen Potential $U(\vec{r}) = -\alpha r^{-4}$ mit $\alpha > 0$. Skizzieren Sie das effektive Potential bei nicht-verschwindendem Drehimpuls und zeichnen Sie ein Beispiel für eine gebundene und eine ungebundene Bewegung ein.

(f) $\boxed{1\text{ P}}$ Geben Sie *alle* Erhaltungsgrößen im Keplerproblem (ohne Formeln) an.

(g) $\boxed{1\text{ P}}$ Betrachten Sie ein System, dessen Bewegungsgleichung durch $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \cos(\Omega t)$ gegeben ist. Für welchen Wert von $\Omega$ kommt es zu einer Resonanzkatastrophe?

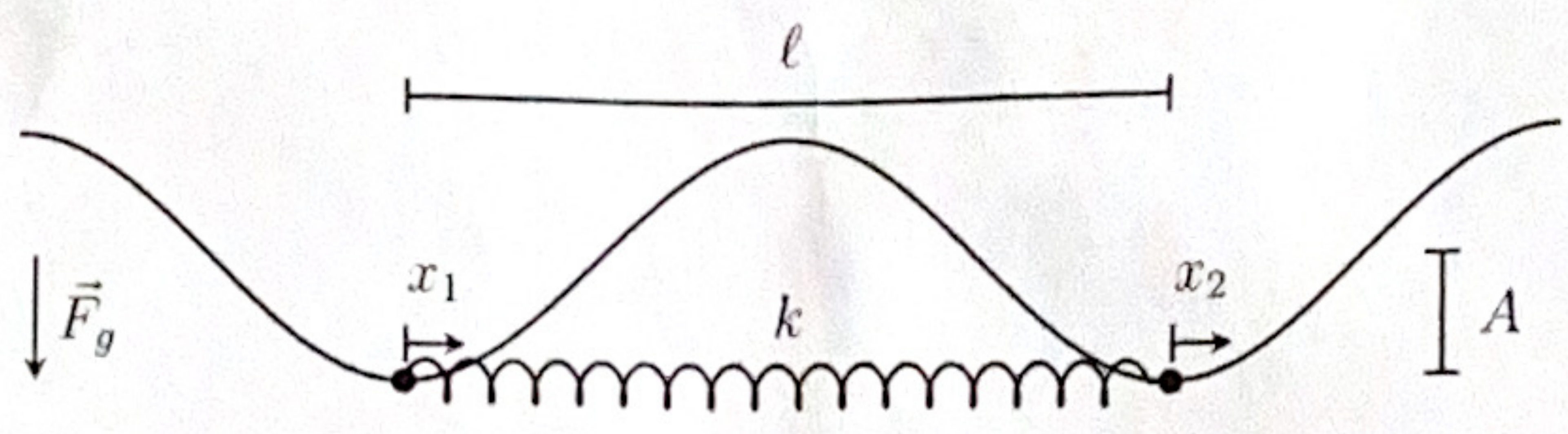
(h) $\boxed{1\text{ P}}$ Welche Transformationen sind im Hamiltonformalismus möglich, die im Lagrangeformalismus nicht möglich sind?

(i) $\boxed{1\text{ P}}$ Drücken Sie die totale Zeitableitung einer physikalischen Größe $A(q, p, t)$ mit Hilfe der Poissonklammern aus.

(j) $\boxed{3\text{ P}}$ Wie groß ist das Trägheitsmoment einer Kugel mit homogener Massendichte für eine Rotation um eine Achse durch ihren Mittelpunkt? Die Kugel habe die Masse $m$ und den Radius $R$. *Hinweis:* Werfen Sie auch einen Blick in die Formelsammlung auf der Rückseite des Deckblatts.

## Aufgabe 2: Kleine Schwingungen **20 Punkte**

Betrachten Sie ein System mit zwei gleich schweren Massen $m$, die sich entlang eines kosinusförmigen Drahts bewegen können und durch eine Feder mit Federkonstante $k$ verbunden sind. Die Ruhelänge der Feder entspricht dem Abstand $\ell$ zwischen den Minima des Drahts. Der Abstand der Minima sei groß im Vergleich zur Amplitude $A$, so dass die Auslenkung der Feder durch die Auslenkung in $x$-Richung genähert werden kann. Die Koordinaten $x_1$ und $x_2$ beschreiben die Auslenkungen der Massen aus den Minima des Drahts.




Das System wird durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 + mgA\cos\left(\frac{x_1}{\ell}\right) + mgA\cos\left(\frac{x_2}{\ell}\right) - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 \tag{1}$$

beschrieben.

(a) $\boxed{\text{2 P}}$ Machen Sie eine Näherung für kleine Schwingungen um die Minima, $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, und nehmen Sie Terme bis einschließlich zur zweiten Ordnung in den Koordinaten mit.

(b) $\boxed{\text{3 P}}$ Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die genäherte Lagrangefunktion auf.

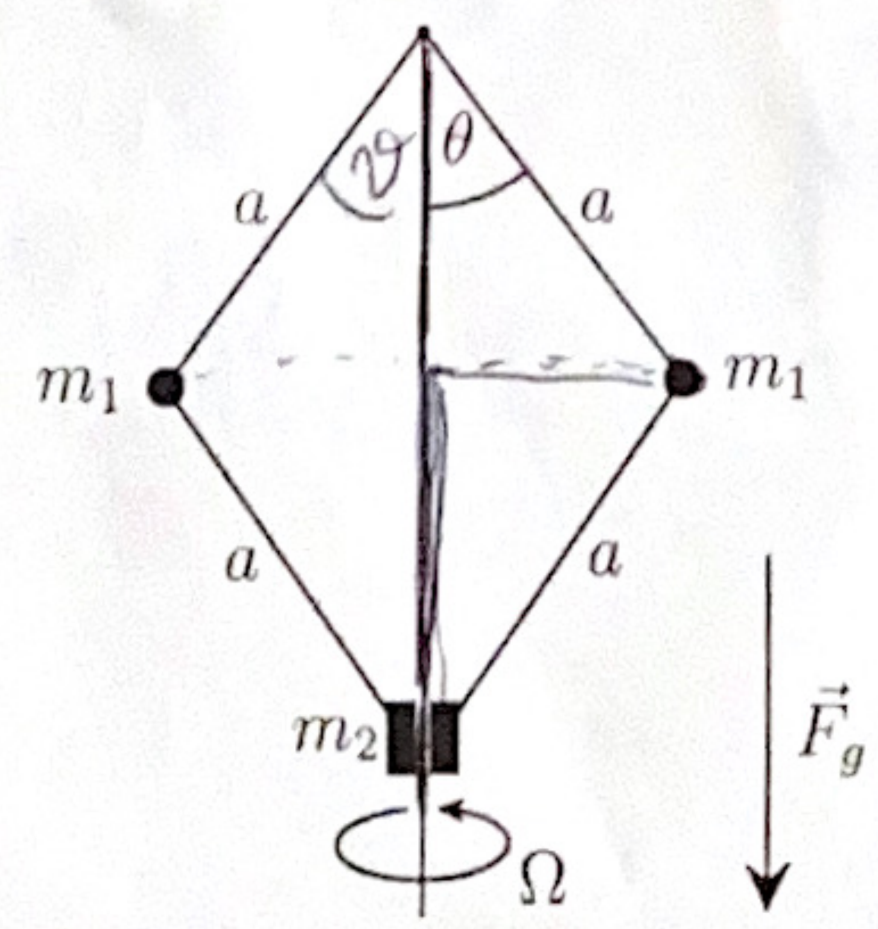
(c) $\boxed{\text{5 P}}$ Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

(d) $\boxed{\text{5 P}}$ Berechnen Sie die Normalschwingungen (Eigenamplituden).
*Hinweis:* Sie müssen die Eigenamplituden nicht zwingend normieren.

(e) $\boxed{\text{5 P}}$ Geben Sie eine Lösung der Bewegungsgleichungen an, bei der die linke Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ im Minimum ruht, während die rechte Masse um den Betrag $x_2(0) = x_0$ ausgelenkt ist und ebenfalls ruht.

## Aufgabe 3: Fliehkraftregler **25 Punkte**

Ein Fliehkraftregler besteht aus drei Massen, die über starre Stangen der Länge $a$ miteinander verbunden sind. Die Stangen sollen als masselos betrachtet werden. Der Fliehkraftregler rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um die $z$-Achse. Abhängig von der Drehzahl werden die Punktmassen $m_1$ aufgrund der Fliehkräfte nach außen gezogen und $m_2$ angehoben. Der obere Punkt ist fest auf der Achse montiert, die Masse $m_2$ ist auf der Achse verschiebbar. Die Schwerkraft wirke in negative $z$-Richtung.




(a) $\boxed{10\ \mathrm{P}}$ Verwenden Sie $\theta$ als verallgemeinerte Koordinate und zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion

$$L = m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + m_1 a^2 \Omega^2 \sin^2\theta + 2 m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + 2(m_1 + m_2) g a \cos\theta \qquad (1)$$

lautet. *Hinweis:* Nutzen Sie zur Beschreibung der Massen $m_1$ Kugelkoordinaten.

(b) $\boxed{5\ \mathrm{P}}$ Wie lauten die Bewegungsgleichungen?

(c) $\boxed{5\ \mathrm{P}}$ Finden Sie die zwei stationären Lösungen ($\theta = \text{const}$). Welche Bedingung muss $\Omega$ erfüllen, damit es zwei Lösungen gibt?

(d) $\boxed{5\ \mathrm{P}}$ Bringen Sie die Lagrangefunktion auf die Form

$$L = \frac{1}{2} m(\theta) \dot{\theta}^2 - U(\theta) \,. \qquad (2)$$

Nehmen Sie an, dass die Bedingung aus für $\Omega$ aus (c) erfüllt ist und dass damit zwei stationäre Punkte existieren. Beschreiben Sie kurz in Worten das Verhalten des System in der Nähe des stationären Punkts mit $\theta > 0$. Welche Schritte wären nötig, um alle relevanten Parameter für die Beschreibung dieser Bewegung zu bestimmen? *Hinweis:* Sie sollen hier *keine* explizite Rechnung ausführen. Die *kurze* Beschreibung des Verhalten des Systems in Worten und das Auflisten der Schritte genügt.

## Aufgabe 4: Hamiltonformalismus

**20 Punkte**

Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$L = \frac{\dot{q}^2}{2q^4} - \frac{1}{2q^2} . \tag{1}$$

*Hinweis: Um Ihnen etwas Schreibarbeit zu ersparen wurden hier einige dimensionsbehaftete Konstanten auf 1 gesetzt.*

(a) $\boxed{3\text{ P}}$ Leiten Sie daraus die zugehörige Hamiltonfunktion her und stellen Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $q$ und $p$ auf.

Betrachten Sie die Transformation

$$q = P^\alpha , \qquad p = AQ^\beta P^\gamma , \tag{2}$$

mit den konstanten Parametern $A$, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$, die eine neue Koordinate $Q$ und einen neuen Impuls $P$ definiert.

(b) $\boxed{5\text{ P}}$ Leiten Sie Bedingungen an die Parameter $A$, $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ her, damit die Transformation kanonisch ist. Benutzen Sie dazu die Invarianz der Poissonklammern unter kanonischen Transformationen, also

$$\{p(Q,P), q(Q,P)\}_{P,Q} = 1 , \tag{3}$$
$$\{q(Q,P), q(Q,P)\}_{P,Q} = 0 , \tag{4}$$
$$\{p(Q,P), p(Q,P)\}_{P,Q} = 0 . \tag{5}$$

*Hinweis: Falls Sie in der Teilaufgabe (b) kein Ergebnis erhalten haben, können Sie mit $\beta = 1$, $\gamma = 1 - \alpha$ und $A = -\frac{1}{\alpha}$ weiterrechnen.*

(c) $\boxed{3\text{ P}}$ Da die Transformation zeitunabhängig ist, hängen die alte und neue Hamiltonfunktion über

$$K(Q,P) = H(p(P,Q), q(P,Q)) \tag{6}$$

zusammen (der zusätzliche Term mit der Zeitableitung der erzeugenden Funktion verschwindet). Berechnen Sie die neue Hamiltonfunktion mit den im Aufgabenteil (b) bestimmten Parametern.

(d) $\boxed{4\text{ P}}$ Wählen Sie den verbleibenden Parameter $\alpha$ so, dass die Hamiltonfunktion $K(Q,P)$ zu der eines harmonischen Oszillators wird und leiten Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $Q$ und $P$ her.

(e) $\boxed{5\text{ P}}$ Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $Q$ und $P$ für die Anfangsbedingungen $Q(t=0) = Q_0$ und $P(t=0) = P_0$. Ermitteln Sie daraus die Zeitabhängigkeit für die ursprünglichen Variablen $q$ und $p$.