Aufgabe 1 Studentische Lösung!

a)
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$ für die Koordinaten q_i, $i \in [1, N] \cap \mathbb{N}$

b) 2 Freiheitsgrade

c) $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - U(\vec{r})$

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} U$

$\Rightarrow m\ddot{r} = \vec{F} = -\vec{\nabla} U$

d) 1. Erkennen der Rotationssymetrie und daraus folgender Drehimpulserhaltung.

$\Rightarrow$ Bewegung in einer Ebene mit konstantem Drehimpuls

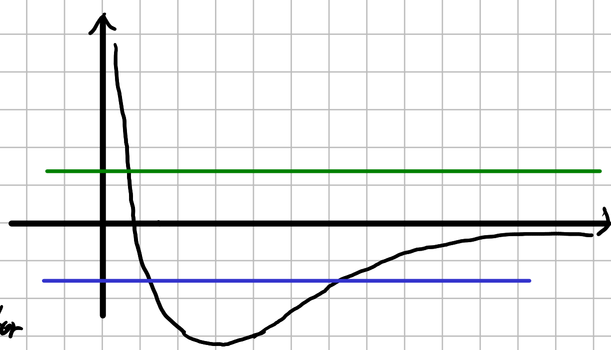
$\Rightarrow$ $m\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}$ ist ein Eindimensionales Problem.

daraus lässt sich mit der Drehimpulserhaltung

$\dot{\varphi}(t)$ bestimmen $\Rightarrow \varphi = \varphi_0 + \int_0^t \dot{\varphi}(\tau)\, d\tau$

e) Ungebundene Bewegung

Gebundene Bewegung



f) Drehimpuls L_x, L_y, L_z, Energie, Runge-Lenz-Vektor

g) für $\omega = \Omega$ kommt es zur Resonanzkatastrophe.

h) Kanonische Transformation

i) $\{A; H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA}{dt}$

j) Trägheitsmoment eines Kreises: $\frac{1}{2} m r^2$

$$\frac{3m}{4\pi R^3}\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\,\pi\,(R^2 - r^2)\,dr = \frac{3m}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^2 - r^2)^2\,dr = \frac{3m}{8R^3}\int_{-R}^{R} R^4 - 2R^2 r^2 + r^4\,dr$$

$$= \frac{3m}{8R^3}\, 2R^5 - \frac{4}{3}R^5 + \frac{2}{5}R^5 = \frac{3}{8} m R^2\left(\frac{30}{15} - \frac{20}{15} + \frac{6}{15}\right)$$

$$= \frac{2}{5} m R^2$$

Aufgabe 2

a) Kleinwinkelnäherung

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2mg\underset{\text{konstante kann vernachlässigt werden.}}{A} - mgA\frac{1}{2l^2}(x_1^2+x_2^2) - \frac{k}{2}(x_1-x_2)^2$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = m\ddot{x}_1 + mgA\frac{1}{l^2}x_1 + kx_1(x_1-x_2)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = m\ddot{x}_2 + mgA\frac{1}{l^2}x_2 - kx_2(x_1-x_2)$$

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix}\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{x}^T\begin{bmatrix} k+mgA\frac{1}{l^2} & -k \\ -k & k+mgA\frac{1}{2l^2}\end{bmatrix}\vec{x}^T$$

$$\Rightarrow 0 \overset{!}{=} \left|\begin{bmatrix} k-mgA\frac{1}{l^2}-m\lambda & -k \\ -k & k-mgA\frac{1}{2l^2}-m\lambda\end{bmatrix}\right| = \left(k-mgA\frac{1}{l^2}-m\lambda\right)^2 - k^2$$

$$\Leftrightarrow \left(k-mgA\frac{1}{l^2}-m\lambda^2\right)^2 \overset{!}{=} k^2$$

$$\Rightarrow k - mgA\frac{1}{l^2} - m\lambda^2 = \pm k$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = gA\frac{1}{l^2} - \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = +gA\frac{1}{l^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = +gA\frac{1}{l^2} + \frac{2k}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

d) $\lambda_1: \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda_2: \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1\end{bmatrix}$

e) $\vec{x}(t) = \frac{1}{2}x_0\vec{v}_1\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{2}x_0\vec{v}_2\cos(\omega_2 t)$

Aufgabe 3

a) $-a\cos\theta$ ist die höhe von m_1 und m_2

$\Rightarrow U_{m_1} = -m_1 g a \cos\theta$

$\Rightarrow U_{m_2} = -2 m_2 g a \cos\theta$ (Doppelte vertikale Geschwindigkeit wie m_1)

$\Rightarrow U = -2(m_1 + m_2) g a \cos$

$$T_1 = 2\cdot\left(\tfrac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\theta}^2\right) + 2\left(\tfrac{1}{2} m_1 \Omega^2 \underbrace{a^2 \sin^2\theta}_{\text{abstand von der Achse}}\right)$$

$$T_2 = 2 m_2 \underbrace{a^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta}_{\text{Vertikale Geschwindigkeit}} \qquad T = T_1 + T_2$$

$\mathcal{L} = T - U$

b) $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2m_1 a^2 \ddot{\theta} + 4 m_2 a^2 \ddot{\theta} \sin^2\theta + 8 m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$- 2 m_1 a^2 \Omega^2 \sin\theta\cos\theta - 4 m_2 a^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta\cos\theta$$
$$+ 2(m_1 + m_2) g a \sin\theta$$

c) Stationäre Lösung $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 = \dot{\theta}$

$\Rightarrow 0 = -2 m_1 a^2 \Omega^2 \cancel{\sin\theta} \cos(\theta) + 2(m_1 + m_2) g a \cancel{\sin\theta}$ $\Rightarrow \theta = 0$ ist eine lsg

$\Rightarrow \underbrace{2 m_1 a^2 \Omega^2}_{\neq 0} \cos(\theta) = 2(m_1 + m_2) g a$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 a \Omega^2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 a \Omega^2}\right)$$

Bedingung:

Da $\cos(\theta) \leq 1$ folgt $\frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 a \Omega^2} \leq 1 \Rightarrow |\Omega| \geq \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 a}}$.

Es gibt die lösungen $\theta = 0$ und $\theta = \arccos\left(\frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 a \Omega^2}\right)$

d) $m(\theta) = 2m_1 a^2 + 4 m_2 a^2 \sin^2\theta$

$U(\theta) = -m_1 a^2 \Omega^2 \sin^2\theta - 2(m_1 + m_2) g a \cos\theta$

Das System schwingt sinusförmig um die Stationäre Stelle, da U dort ein Minimum hat.

Schritte: 1. Kleinwinkelnäherung für m und U
2. Lagrange funktion aufstellen
3. Quadratische Therme in $\dot{\theta} = 0$ setzen
4. Ablesen der Eigenfrequenz aus der Gleichung

Aufgabe 4

a) $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^4} \Rightarrow \dot{q} = p q^4$

$H = p\dot{q}(p,q) - \mathcal{L} = p^2 q^4 - \frac{p^2 q^8}{2q^4} + \frac{1}{2q^2} = \frac{1}{2} p^2 q^4 + \frac{1}{2q^2}$

$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2p^2 q^3 - \frac{1}{4q^3}$

$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p q^4$

b) $\{p; q\} = \frac{\partial P^\alpha}{\partial P} \frac{\partial Q^\beta P^\gamma}{\partial Q} - \underbrace{\frac{\partial P^\alpha}{\partial Q}}_{=0} \frac{\partial Q^\beta P^\gamma}{\partial P} = \alpha P^{(\alpha+\gamma-1)} \beta Q^{(\beta-1)} A \stackrel{!}{=} 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \gamma - 1 = 0 \\ \beta - 1 = 0 \\ \alpha\beta A = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = 1, \; A = \frac{1}{\alpha}, \; \gamma = 1 - \alpha$$

$q = P^\alpha \quad p = A Q P^{1-\alpha}$

c) $K(Q,P) = \underbrace{\frac{1}{2} p^2 q^4}_{p(P,Q)} + \underbrace{\frac{1}{2q^2}}_{q(P,Q)} = \frac{1}{2} A^2 Q^2 P^{2-2\alpha} P^{4\alpha} + \frac{1}{2 P^{2\alpha}} = \frac{1}{2} A^2 Q^2 P^{2+2\alpha} + \frac{1}{2} P^{-2\alpha}$

d) mit $\alpha = -1$:

$$K(Q,P) = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2} Q^2 + \frac{1}{2} P^2 = \frac{1}{2} Q^2 + \frac{1}{2} P^2$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -Q$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P$$

e) $\ddot{Q} = \dot{P} = -Q \quad \Rightarrow \quad Q = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$

$\Rightarrow \quad P = C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t)$

$Q(0) = C_2 = Q_0$

$P(0) = C_1 = P_0 \Rightarrow C_1 = P_0$

$\Rightarrow Q(t) = P_0 \sin(t) + Q_0 \cos(t)$

$P(t) = P_0 \cos(t) - Q_0 \sin(t)$

$$q = \frac{1}{P_0 \cos(t) - Q_0 \sin(t)}$$

$$p = P_0 \sin(t) + Q_0 \cos(t)$$