Klassische Theoretische Physik II   SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Klausur Nr. 1
08.08.2023

---

1. Kurzfragen **(25 Punkte)**

a) (i) Was besagt das Prinzip der extremalen Wirkung (in ein bis zwei Sätzen)? (3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie die erste Variation δF des Funktionals

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sin(y(x))(y'(x))^2 dx$$

und finden Sie damit unter der Nebenbedingung $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ die Differentialgleichung, der $y(x)$ genügen muss, damit F extremal ist. (6 Punkte)

b) (i) Geben Sie die Kernaussage des Noether-Theorems in ein bis zwei Sätzen wieder. (3 Punkte)

(ii) Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{4}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^2 - U(x^2 + y^2)$$

mit einem Potential U, das nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Erhaltungsgröße an, die mit der Invarianz der Lagrangefunktion unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

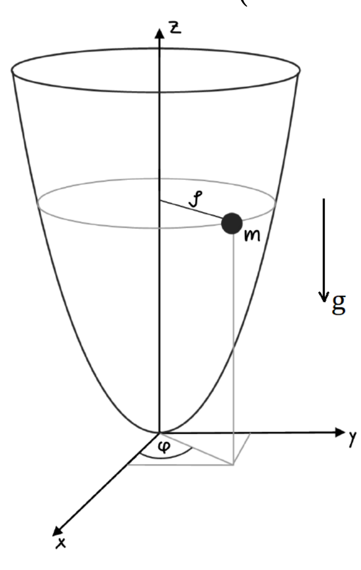
mit $\alpha \in \mathbb{R}$ assoziiert ist. Beachten Sie, dass die kinetische Energie nicht quadratisch in den Geschwindigkeiten ist. (6 Punkte)

c) Wie müssen die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Transformation

$$Q(q,p) = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P(q,p) = q^\alpha \sin(\beta p)$$

kanonisch ist? (7 Punkte)

2. Gleitende Masse auf einem Rotationsparaboloid **(25 Punkte)**



Eine Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft g auf der Innenfläche eines Rotationsparaboloids, das durch die Gleichung $z = \frac{a}{2}(x^2+y^2)$ beschrieben wird (siehe Abbildung rechts), wobei $a > 0$.

a) Nutzen Sie den Abstand zur z-Achse ρ und den Winkel zur x-Achse φ als verallgemeinerte Koordinaten und bestimmen Sie die Lagrangefunktion sowie die zugehörigen Bewegungsgleichungen. (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Energie E und die z-Komponente des Drehimpulses L_z. Begründen Sie, dass E und L_z Erhaltungsgrößen sind. Nutzen Sie L_z, um die $\dot{\varphi}$-Abhängigkeit der Energie (ähnlich wie bei Zentralpotentialen) zu eliminieren und sie zu schreiben als $E(\dot{\rho}, \rho, L_z) = T_{\text{eff}}(\dot{\rho}, \rho) + U_{\text{eff}}(\rho, L_z)$ mit einer effektiven kinetischen $T_{\text{eff}}(\dot{\rho}, \rho)$ und potentiellen Energie $U_{\text{eff}}(\rho, L_z)$. (8 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Form des effektiven Potentials $U_{\text{eff}}(\rho, L_z)$ für $L_z > 0$. Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung, die die Masse bei einer gegebenen Energie $E > \min(U_{\text{eff}})$ ausführt. Markieren Sie in Ihrer Skizze des effektiven Potentials jeweils den minimalen $\rho_{\min}$ und maximalen $\rho_{\max}$ Abstand von der z-Achse, den die Masse im Laufe der Bewegung erreicht. (7 Punkte)

3. **Kleine Schwingungen** **(25 Punkte)**

Gegeben sei die Lagrangefunktion $L = T - U$ einer Punktmasse m in zwei Dimensionen durch

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\dot{x}_1\dot{x}_2\right]$$

und

$$U(x_1, x_2) = k\left[x_1 x_2 + 4d^2\left(1 - \cos\left(\frac{x_1}{d}\right)\cos\left(\frac{x_2}{d}\right)\right)\right]$$

mit einer Länge d und einer Federkonstanten k.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion $H(p_1, p_2, x_1, x_2)$, wobei $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$. (10 Punkte)
Hinweis: Es ist hilfreich, die Beziehung zwischen den Impulsen (p_1, p_2) und den Geschwindigkeiten $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ in Matrixform darzustellen. Für das Inverse einer 2×2-Matrix gilt $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD-BC}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$.

b) Das Potential U weist ein lokales Minimum bei $(x_1, x_2) = (0, 0)$ auf. Zeigen Sie, unter der Annahme kleiner Abweichungen von diesem Minimum, $x_1/d, x_2/d \ll 1$, dass die Lagrangefunktion auf die Form

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} V_{ij} x_i x_j$$

mit

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m & m/2 \\ m/2 & m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 4k & k \\ k & 4k \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Geben Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen an. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der kleinen Schwingungen um $(x_1, x_2) = (0, 0)$ und geben Sie mithilfe der zugehörigen Eigenvektoren die allgemeine Lösung der in (b) bestimmten Bewegungsgleichungen an. (10 Punkte)

4. **Rollender Zylinder** **(25 Punkte)**

Ein homogener Zylinder der Masse M, Radius a und Höhe h rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft g ohne zu rutschen auf einer zylindrischen Oberfläche mit Radius R (siehe Abbildung auf nächster Seite).

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I des Zylinders bezüglich Rotationen um seine Symmetrieachse. Nutzen Sie den Satz von Steiner, um daraus das Trägheitsmoment I' bezüglich einer Drehachse, die mit der Berührungslinie des Zylinders mit dem Boden zusammenfällt, zu bestimmen. (8 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\dot{\varphi}, \varphi)$ des Systems auf. Bestimmen Sie hierzu die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders Ω. Beachten Sie, dass $\Omega \neq \dot{\varphi}$. (11 Punkte)
Hinweis: Die momentane Drehachse fällt mit der Berührungslinie des Zylinders mit dem Boden zusammen.

c) Finden Sie die Bewegungsgleichung im Grenzfall kleiner Auslenkungen $\varphi \ll 1$ und bestimmen Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen um die Ruhelage $\varphi = 0$. (6 Punkte)