KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE

INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman

Dr. A. Pavlov, A. Reich

Musterlösung

Klausur Nr. 1

---

1. Kurzfragen (25 Punkte)

a) (i) Was besagt das Prinzip der extremalen Wirkung (in ein bis zwei Sätzen)? (3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie die erste Variation δF des Funktionals

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sin(y(x))(y'(x))^2 dx$$

und finden Sie damit unter der Nebenbedingung $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ die Differentialgleichung, der $y(x)$ genügen muss, damit F extremal ist. (6 Punkte)

b) (i) Geben Sie die Kernaussage des Noether-Theorems in ein bis zwei Sätzen wieder. (3 Punkte)

(ii) Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{1}{4}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^2 - U(x^2 + y^2)$$

mit einem Potential U, das nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für die Erhaltungsgröße an, die mit der Invarianz der Lagrangefunktion unter der Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ assoziiert ist. Beachten Sie, dass die kinetische Energie nicht quadratisch in den Geschwindigkeiten ist. (6 Punkte)

c) Wie müssen die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Transformation

$$Q(q,p) = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P(q,p) = q^\alpha \sin(\beta p)$$

kanonisch ist? (7 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) (i) Das Prinzip der extremalen Wirkung besagt, dass jene Teilchenbahnen $q(t)$ physikalisch realisiert werden, für die die erste Variation der Wirkung $S[q]$ verschwindet. (3 Punkte für jede Art richtiger Erklärung)

(ii) Die erste Variation des gegebenen Funktionals ergibt sich zu

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\cos(y)(y')^2 \delta y + 2\sin(y) y' \delta y'\right). \quad \text{(2 Punkte)} \tag{1}$$

Nutzen wir nun $\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y$ und integrieren partiell mit $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, so folgt

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\cos(y)(y')^2 - 2\cos(y)(y')^2 - 2\sin(y) y''\right)\delta y. \quad \text{(2 Punkte)} \tag{2}$$

Damit F extremal ist, muss $\delta F = 0$ gelten (1 Punkt), also lautet die gesuchte Differentialgleichung

$$2y'' \sin(y) + (y')^2 \cos(y) = 0. \quad \text{(1 Punkt)} \tag{3}$$

[Wird die Variation nicht explizit durchgeführt, sondern direkt die Euler-Lagrange-Gleichung korrekt hingeschrieben, gibt das auch die volle Punktzahl.]

b) (i) Das Noether-Theorem besagt, dass aus jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße folgt. (3 Punkte)

(ii) Wir schreiben das Problem in Polarkoordinaten (ρ, φ) um (1 Punkt). Dann ist

$$L = \frac{1}{4}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)^2 - U(\rho) \quad \text{(2 Punkte)} \tag{4}$$

und die gegebene Symmetrie spiegelt sich darin wider, dass φ eine zyklische Koordinate ist, sodass der zugehörige verallgemeinerte Impuls erhalten ist (2 Punkte). Also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left((\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \quad \text{(1 Punkt)}. \tag{5}$$

Alternativ: Die gegebene Symmetrie entspricht einer Rotationssymmetrie um die z-Achse (1 Punkt), damit ist die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = xp_y - yp_x$ (2 Punkte) erhalten, wobei

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}. \quad \text{(2 Punkte)} \tag{6}$$

Also

$$L_z = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad \text{(1 Punkt)} \tag{7}$$

Alternativ: Die infinitesimale Version der gegebenen Transformation mit $\alpha = \epsilon \ll 1$ lautet

$$x^* = x - \epsilon y, \quad y^* = y + \epsilon x, \quad t^* = t. \quad \text{(3 Punkte)} \tag{8}$$

Laut Formel aus der Vorlesung ist die Erhaltungsgröße nach dem Noether-Theorem nun gegeben durch

$$Q = -y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad \text{(3 Punkte)} \tag{9}$$

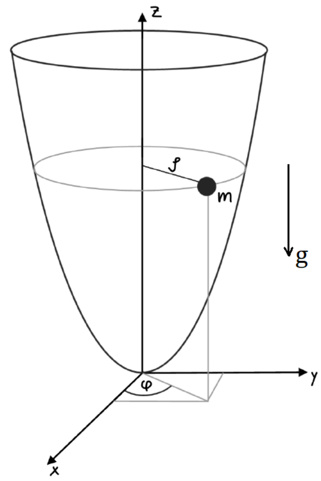
c) Die Transformation ist kanonisch, wenn für die Poisson-Klammer gilt $\{Q, P\} = 1$ (3 Punkte). Wir berechnen also

$$\begin{aligned}\{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \alpha q^{\alpha-1}\cos(\beta p) q^\alpha \beta \cos(\beta p) - \alpha q^{\alpha-1}\sin(\beta p) q^\alpha \beta(-\sin(\beta p)) \\ &= \alpha\beta q^{2\alpha-1} \overset{!}{=} 1. \quad \text{(2 Punkte)}\end{aligned} \tag{10}$$

Damit die Transformation kanonisch ist, müssen also $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = 2$ gewählt werden. (2 Punkte)

2. Gleitende Masse auf einem Rotationsparaboloid **(25 Punkte)**

Eine Masse m gleitet reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft g auf der Innenfläche eines Rotationsparaboloids, das durch die Gleichung $z = \frac{a}{2}(x^2+y^2)$ beschrieben wird (siehe Abbildung rechts), wobei $a > 0$.



a) Nutzen Sie den Abstand zur z-Achse ρ und den Winkel zur x-Achse φ als verallgemeinerte Koordinaten und bestimmen Sie die Lagrangefunktion sowie die zugehörigen Bewegungsgleichungen. (10 Punkte)

b) Bestimmen Sie die Energie E und die z-Komponente des Drehimpulses L_z. Begründen Sie, dass E und L_z Erhaltungsgrößen sind. Nutzen Sie L_z, um die $\dot{\varphi}$-Abhängigkeit der Energie (ähnlich wie bei Zentralpotentialen) zu eliminieren und sie zu schreiben als $E(\dot{\rho}, \rho, L_z) = T_{\text{eff}}(\dot{\rho}, \rho) + U_{\text{eff}}(\rho, L_z)$ mit einer effektiven kinetischen $T_{\text{eff}}(\dot{\rho}, \rho)$ und potentiellen Energie $U_{\text{eff}}(\rho, L_z)$. (8 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Form des effektiven Potentials $U_{\text{eff}}(\rho, L_z)$ für $L_z > 0$. Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung, die die Masse bei einer gegebenen Energie $E > \min(U_{\text{eff}})$ ausführt. Markieren Sie in Ihrer Skizze des effektiven Potentials jeweils den minimalen ρ_{min} und maximalen ρ_{max} Abstand von der z-Achse, den die Masse im Laufe der Bewegung erreicht. (7 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Wir können die Koordinaten (x, y, z) der Masse in Zylinderkoordinaten ausdrücken mit $x = \rho\cos\varphi$ und $y = \rho\sin\varphi$. Durch die Beschränkung der Bewegung auf das Paraboloid gilt zudem $z = \frac{1}{2}a\rho^2$. (1 Punkt für richtige Koordinaten) Dann ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left[(1 + a^2\rho^2)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right] \quad \text{(2 Punkte)} \tag{11}$$

und die potentielle Energie lautet

$$U = mgz = \frac{mga}{2}\rho^2. \quad \text{(2 Punkte)} \tag{12}$$

Die Lagrangefunktion ist $L = T - U$ (1 Punkt) und die Bewegungsgleichungen lauten (jeweils 2 Punkte)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \quad \Leftrightarrow \quad m(1 + a^2\rho^2)\ddot{\rho} + ma^2\rho\dot{\rho}^2 + mga\rho = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0. \tag{14}$$

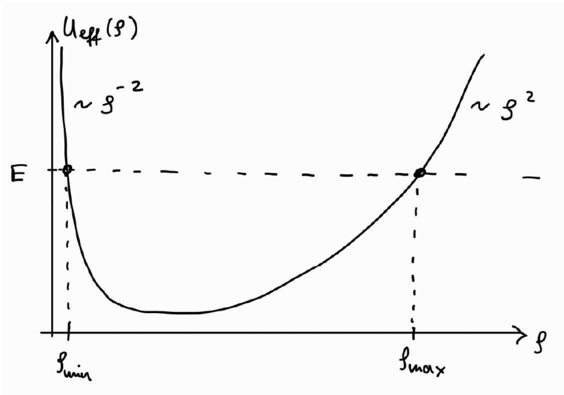
b) Zunächst ist aus der zweiten Bewegungsgleichung direkt abzulesen, dass die z-Komponente des Drehimpulses $L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$ erhalten ist (2 Punkte) (φ ist eine zyklische Koordinate). Darüber hinaus, da die Lagrangefunktion nicht explizit zeitabhängig ist, ist auch die Energie erhalten mit

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\dot{\rho} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{m}{2}\left[(1 + a^2\rho^2)\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2\right] + \frac{mga}{2}\rho^2. \quad \text{(2 Punkte)} \tag{15}$$

Wir können nun den $\dot{\varphi}$-abhängigen Term in der Energie mithilfe von L_z ersetzen und es folgt

$$E = \underbrace{\frac{m}{2}(1 + a^2\rho^2)\dot{\rho}^2}_{=T_{\text{eff}}(\rho,\dot{\rho})} + \underbrace{\frac{L_z^2}{2m\rho^2} + \frac{mga}{2}\rho^2}_{=U_{\text{eff}}(\rho,L_z)} . \quad \text{(2 Punkte)} \tag{16}$$

c) Skizze: (2 Punkte für Skizze + 1 Punkt für eingezeichnete Wendepunkte)



Fällt die Energie mit dem Minimum des effektiven Potentials zusammen, bewegt sich die Masse auf einer Kreisbahn bei einem festen ρ (und damit festem z) um die z-Achse. Bei größeren Energien ist ρ nicht mehr fest, sondern pendelt zwischen ρ_{min} und ρ_{max} hin und her, während die Masse weiter die z-Achse umläuft. (3 Punkte)

3. **Kleine Schwingungen** **(25 Punkte)**

Gegeben sei die Lagrangefunktion $L = T - U$ einer Punktmasse m in zwei Dimensionen durch

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2) = \frac{m}{2}\left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\dot{x}_1\dot{x}_2\right]$$

und

$$U(x_1, x_2) = k\left[x_1 x_2 + 4d^2\left(1 - \cos\left(\frac{x_1}{d}\right)\cos\left(\frac{x_2}{d}\right)\right)\right]$$

mit einer Länge d und einer Federkonstanten k.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Hamiltonfunktion $H(p_1, p_2, x_1, x_2)$, wobei $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$. (10 Punkte)
Hinweis: Es ist hilfreich, die Beziehung zwischen den Impulsen (p_1, p_2) und den Geschwindigkeiten $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ in Matrixform darzustellen. Für das Inverse einer 2×2-Matrix gilt $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD-BC}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$.

b) Das Potential U weist ein lokales Minimum bei $(x_1, x_2) = (0, 0)$ auf. Zeigen Sie, unter der Annahme kleiner Abweichungen von diesem Minimum, $x_1/d, x_2/d \ll 1$, dass die Lagrangefunktion auf die Form

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} m_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}x_i x_j$$

mit

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m & m/2 \\ m/2 & m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 4k & k \\ k & 4k \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Geben Sie die zugehörigen Bewegungsgleichungen an. (5 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der kleinen Schwingungen um $(x_1, x_2) = (0, 0)$ und geben Sie mithilfe der zugehörigen Eigenvektoren die allgemeine Lösung der in (b) bestimmten Bewegungsgleichungen an. (10 Punkte)

Lösungsvorschlag

a) Die verallgemeinerten Impulse sind gegeben durch (jeweils 1 Punkt)

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + \frac{m}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\dot{x}_2 \tag{17}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + \frac{m}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\dot{x}_1. \tag{18}$$

Für die Hamiltonfunktion benötigen wir $\dot{x}_i(p_1, p_2, x_1, x_2)$. Wir können diese Zusammenhänge bestimmen, indem wir obige Gleichungen schreiben als

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)} \tag{19}$$

Mithilfe des Hinweises wissen wir dann

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = m^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right) \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right) & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(1 Punkt)} \tag{20}$$

also (jeweils 1.5 Punkte)

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)} \left(\frac{p_1}{m} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\frac{p_2}{m}\right) \tag{21}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)} \left(\frac{p_2}{m} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\frac{p_1}{m}\right). \tag{22}$$

Die Hamiltonfunktion ist damit gegeben durch (3 Punkte)

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, x_1, x_2) &= \sum_i p_i \dot{x}_i(p_1, p_2, x_1, x_2) - L \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)} \left[\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_1 x_2}{d^2}\right)\frac{p_1 p_2}{m}\right] + U(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{23}$$

Alternativ kann direkt genutzt werden, dass in der Vorlesung gezeigt wurde: $L = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - U(x_1, x_2) \to H = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}^{-1} p_i p_j + U(x_1, x_2)$.

b) Wir entwickeln zunächst die Kosinusterme im Potential bis zur zweiten Ordnung, $\cos(x) \approx 1 - x^2/2$ und erhalten

$$U = k\left(2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2\right) + \mathcal{O}(x_1^4, x_2^4, x_1^2 x_2^2). \quad \text{(1 Punkt)} \tag{24}$$

In der kinetischen Energie treten die Geschwindigkeiten bereits in zweiter Ordnung auf, weshalb wir diese einfach bei $x_1 = x_2 = 0$ auswerten können

$$T \approx \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2\right). \quad \text{(1 Punkt)} \tag{25}$$

Wir können die Lagrangefunktion damit in der gesuchten Form schreiben (2 Punkte)

$$L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} m & m/2 \\ m/2 & m \end{pmatrix}}_{=\hat{m}} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4k & k \\ k & 4k \end{pmatrix}}_{=\hat{V}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Die Bewegungsgleichungen können nun einfach mittels

$$\hat{m}\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix}+\hat{V}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0 \quad \text{(1 Punkt)} \tag{27}$$

ausgedrückt werden.

c) Die Eigenfrequenzen ω^2 ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned}\det\left(\hat{V}-\omega^2\hat{m}\right) &= \det\begin{pmatrix}4k-m\omega^2 & k-m\omega^2/2\\ k-m\omega^2/2 & 4k-m\omega^2\end{pmatrix}\\ &= \frac{3m^2}{4}(\omega^2)^2-7km\omega^2+15k^2=0. \quad \text{(2 Punkte)}\end{aligned} \tag{28}$$

Damit also (jeweils 1 Punkt)

$$\omega_1^2=\frac{6k}{m}, \quad \omega_2^2=\frac{10k}{3m}. \tag{29}$$

Für die Lösung der Bewegungsgleichungen benötigen wir noch die Eigenvektoren, die sich aus

$$(\hat{V}-\omega_{1/2}^2\hat{m})\vec{a}_{1/2}=0 \quad \text{(1 Punkt)} \tag{30}$$

zu (jeweils 1.5 Punkte)

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \tag{31}$$

ergeben. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen lautet damit (2 Punkte)

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cos(\omega_1 t+\phi_1)+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos(\omega_2 t+\phi_2), \tag{32}$$

wobei C_1, C_2, ϕ_1 und ϕ_2 aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstanten sind.

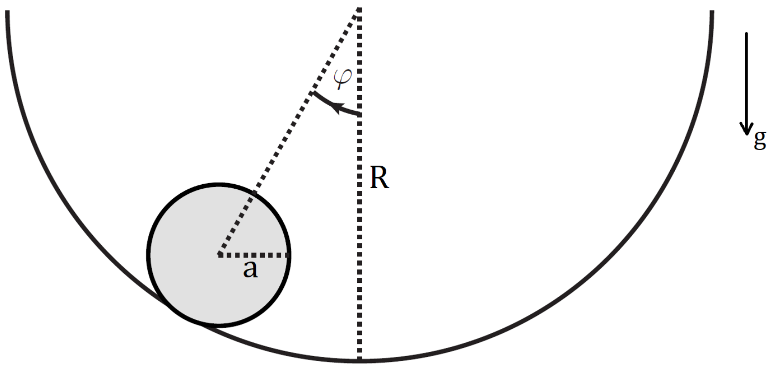
4. **Rollender Zylinder** **(25 Punkte)**

Ein homogener Zylinder der Masse M, Radius a und Höhe h rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft g ohne zu rutschen auf einer zylindrischen Oberfläche mit Radius R (siehe Abbildung auf nächster Seite).

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I des Zylinders bezüglich Rotationen um seine Symmetrieachse. Nutzen Sie den Satz von Steiner, um daraus das Trägheitsmoment I' bezüglich einer Drehachse, die mit der Berührungslinie des Zylinders mit dem Boden zusammenfällt, zu bestimmen. (8 Punkte)

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(\dot{\varphi},\varphi)$ des Systems auf. Bestimmen Sie hierzu die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders Ω. Beachten Sie, dass $\Omega \neq \dot{\varphi}$. (11 Punkte)
Hinweis: Die momentane Drehachse fällt mit der Berührungslinie des Zylinders mit dem Boden zusammen.

c) Finden Sie die Bewegungsgleichung im Grenzfall kleiner Auslenkungen $\varphi \ll 1$ und bestimmen Sie die Frequenz der kleinen Schwingungen um die Ruhelage $\varphi = 0$. (6 Punkte)



Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) mit Ursprung im Schwerpunkt des Zylinders und z-Achse parallel zur Symmetrieachse. Das Volumen des Zylinders beträgt $V = \pi a^2 h$. Das Trägheitsmoment folgt dann aus

$$I = \frac{M}{V} \int_V d^3 r (x^2 + y^2) = \frac{M}{\pi a^2 h} \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a d\rho \, \rho^3 = \frac{M a^2}{2}. \quad \text{(5 Punkte)} \tag{33}$$

Wir wollen die betrachtete Drehachse nun um eine Strecke a an den Rand des Zylinders verschieben. Mit dem Satz von Steiner folgt für das neue Trägheitsmoment

$$I' = I + M a^2 = \frac{3}{2} M a^2. \quad \text{(3 Punkte)} \tag{34}$$

b) Wir können die Bewegung des Zylinders als reine Rotation um die Berührungslinie mit dem Boden auffassen. Dann ist die kinetische Energie gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} I' \Omega^2 \quad \text{(2 Punkte)}, \tag{35}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Diese ergibt sich aus der Überlegung, dass zum einen die Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt bewegt, gegeben ist durch $v = (R-a)\dot{\varphi}$ und gleichzeitig aus der Definition der Winkgelgeschwindigkeit folgt, dass $v = a\Omega$. Insgesamt also $\Omega = \frac{R-a}{a}\dot{\varphi}$ (6 Punkte) und die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2. \quad \text{(1 Punkt)}. \tag{36}$$

Alternativ: Wir teilen die Bewegung des Zylinders auf in die Translation des Schwerpunkts und die Rotation um die Symmetrieachse (1 Punkt). Dann ist $T = T_S + T_R$ mit $T_S = \frac{1}{2} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2$ (0.5 Punkte) und die Rotationsenergie ergibt sich aus $T_R = \frac{1}{2} I \Omega_S^2$ (0.5 Punkte), wobei die Winkelgeschwindigkeit aus der Überlegung gewonnen werden kann, dass die abgerollten Längen auf dem Außenzylinder und dem beweglichen Zylinder gleich groß sein müssen. Dabei gilt $R\varphi = a(\theta + \varphi)$, also $\dot{\theta} = \Omega_S = \frac{R-a}{a}\dot{\varphi}$ (6 Punkte) und die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{M a^2}{2} \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2. \quad \text{(1 Punkt)} \tag{37}$$

Die potentielle Energie ist gegeben durch

$$U = -Mg(R-a)\cos\varphi \quad \text{(2 Punkte)} \tag{38}$$

und die Lagrangefunktion lautet $L = T - U$.

c) Es folgt dann für die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\sin\varphi = 0 \quad \text{(2 Punkte)}. \tag{39}$$

Für kleine Auslenkungen können wir $\sin\varphi \approx \varphi$ nähern. Dann ist

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\varphi = 0 \quad \text{(2 Punkte)} \tag{40}$$

die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators und die Frequenz der Schwingung beträgt $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}}$ (2 Punkte).