Klassische Theoretische Physik II SoSe 2023

Prof. Dr. A. Shnirman
Dr. A. Pavlov, A. Reich

Klausur Nr. 2
28.09.2023

---

1. Kurzfragen **(25 Punkte)**

a) (i) Was besagt das Prinzip der extremalen Wirkung (in ein bis zwei Sätzen)? (3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie die erste Variation δF des Funktionals

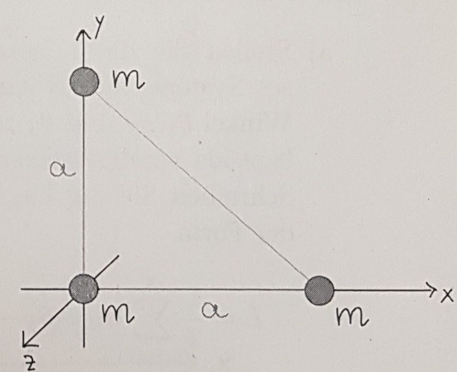
$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \cos(y(x))(y'(x))^3 dx$$

und finden Sie damit unter der Nebenbedingung $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ die Differentialgleichung, der $y(x)$ genügen muss, damit F extremal ist. (6 Punkte)

b) Geben Sie die Kernaussage des Liouville-Theorems in ein bis zwei Sätzen wieder. (3 Punkte)

c) Ein einfaches Federpendel in einer Dimension werde beschrieben durch die Hamiltonfunktion $H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$ mit der Masse m und Federkonstanten k. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird es um eine Strecke $x_0 > 0$ ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen. Skizzieren Sie die Trajektorie im Phasenraum, die die Bewegung des Pendels beschreibt. Beschriften Sie dabei die Schnittpunkte der Trajektorie mit den Achsen und zeichnen Sie die Richtung ein, in der sie durchlaufen wird. (6 Punkte)

d) Betrachten Sie die abgebildete Anordnung von drei Punktmassen m in der $x-y$-Ebene, die durch masselose, starre Stangen miteinander verbunden seien. Eine Masse befinde sich im Ursprung, eine bei $(a,0,0)$ und die dritte bei $(0,a,0)$. Berechnen Sie die Komponenten des Trägheitstensors dieser Anordnung bezüglich des Ursprungs. (7 Punkte)



2. Erhaltungsgrößen und Hamilton-Formalismus **(25 Punkte)**

Gegeben sei die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse m in zwei Dimensionen durch

$$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}) - \frac{\alpha}{x^2 + y^2}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an. (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für die kanonischen Impulse p_x und p_y. Argumentieren Sie, dass die Energie E erhalten ist und bestimmen Sie auch für E einen Ausdruck. (5 Punkte)

Bonus: Ist der Drehimpuls $L_z = xp_y - yp_x$ eine Erhaltungsgröße? (5 Bonuspunkte)

c) Zeigen Sie, dass die Wirkung invariant ist unter der Transformation

$$x \to x' = \lambda x, \quad y \to y' = \lambda y, \quad t \to t' = \lambda^2 t$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mithilfe des Noether-Theorems, dass die zu dieser Symmetrietransformation gehörige Erhaltungsgröße Q gegeben ist durch $Q = \vec{p} \cdot \vec{r} - 2Et$ mit $\vec{p} = \binom{p_x}{p_y}$ und $\vec{r} = \binom{x}{y}$. (5 Punkte)

Wir wollen nun das gleiche Problem im Hamiltonformalismus beschreiben.

d) Zeigen Sie, dass die zugehörige Hamiltonfunktion gegeben ist durch

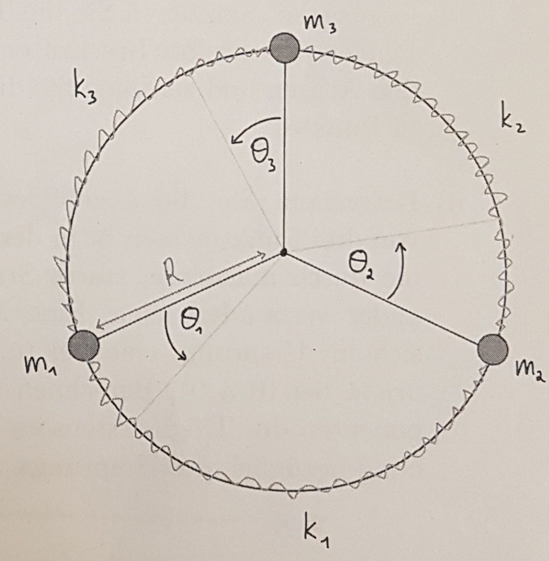
$$H(p_x, p_y, x, y) = \frac{2}{3m}(p_x^2 + p_y^2 - p_x p_y) + \frac{\alpha}{x^2 + y^2}. \quad \text{(7 Punkte)}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, die Beziehung zwischen kanonischem Impuls $\vec{p}$ und Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ in Matrixform darzustellen. Für das Inverse einer 2×2-Matrix gilt $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD-BC}\begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$.

e) Nutzen Sie die Beziehung zwischen Zeitableitung und Poisson-Klammern $\frac{dQ}{dt} = \{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial t}$, um explizit zu zeigen, dass die in Aufgabenteil c) definierte Größe Q eine Erhaltungsgröße ist. (5 Punkte)
Hinweis: $\{E, H\} = 0$, da $E = H(\vec{p}, \vec{r})$.

3. Drei Massen auf einem Ring **(25 Punkte)**

Drei Punktmassen m_1, m_2 und m_3 bewegen sich auf einem Ring mit Radius R. Sie sind durch masselose Federn mit Federkonstanten k_1, k_2 und k_3 miteinander verbunden, die in der Ruhelage alle die gleiche Ausdehnung haben (siehe Abbildung rechts).



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems auf. Nutzen Sie dabei die Winkel θ_1, θ_2 und θ_3 relativ zur Ruhelage als verallgemeinerte Koordinaten. Schreiben Sie die Lagrangefunktion in der Form

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} m_{ij}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} V_{ij}\theta_i\theta_j$$

und geben Sie die Matrizen $\hat{m}$ und $\hat{V}$ an. (10 Punkte)

Wir setzen nun $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 2m$ sowie $k_1 = k_2 = k_3 = k$. Es gilt dann

$$\hat{m} = mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = kR^2\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an. (3 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass $\det(\hat{V} - \lambda\hat{m}) = -2mR^6\lambda(m\lambda - 2k)(m\lambda - 3k)$. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems und geben Sie mithilfe der zugehörigen Eigenvektoren (die Sie nicht normieren müssen) die allgemeine Lösung der in (b) bestimmten Bewegungsgleichungen an. (12 Punkte)

4. **Rollender Zylinder auf gleitendem Keil** **(25 Punkte)**

Ein homogener Zylinder der Masse m und mit Radius a rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft g ohne zu rutschen auf einem starren, homogenen Keil der Masse M und mit Öffnungswinkel α (siehe Abbildung unten). Der Keil kann reibungsfrei entlang der x-Achse gleiten. Zu Beginn befindet sich der Schwerpunkt des Zylinders in einer Höhe h im Ruhezustand und auch der Keil ist anfänglich in Ruhe. Das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich Rotationen um seine Symmetrieachse ist gegeben durch $I = ma^2/2$.

a) Nutzen Sie den Abstand ξ zwischen dem Zylinder und der Spitze des Keils sowie die x-Koordinate X der Spitze des Keils als verallgemeinerte Koordinaten und zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion des Systems (unter Vernachlässigung von Konstanten) geschrieben werden kann als

$$L(\dot{X}, \dot{\xi}, X, \xi) = \frac{m+M}{2}\dot{X}^2 + m\left(\frac{3}{4}\dot{\xi}^2 + \dot{\xi}\dot{X}\cos\alpha\right) - mg\xi\sin\alpha.$$

Drücken Sie hierzu zunächst die Koordinaten des Schwerpunkts des Zylinders mithilfe von X, ξ und α aus. Bringen Sie anschließend den Abrollwinkel des Zylinders mit ξ in Verbindung und finden Sie so einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit und damit die Rotationsenergie. (14 Punkte)

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für $\xi(t)$ mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Anfangsbedingungen. Betrachten Sie anschließend den Grenzfall $\alpha \to \pi/2$. Warum stimmen die Ergebnisse hier nicht mit denen für einen freien Fall des Zylinders überein? (8 Punkte)