Aufgabe 1: [20 P] Kurzfragen

Die Kurzfragen dieser Aufgabe können unabhängig voneinander bearbeitet werden. In dieser Aufgabe sind keine umfangreichen Rechnungen nötig, um die Fragen zu beantworten.

a) **[3 P]** Was sind Zwangsbedingungen? Nennen Sie zwei verschiedene Arten von Zwangsbedingungen. Wie viel Freiheitsgrade f hat ein System aus N Massepunkten und N_Z Zwangsbedingungen?

b) **[2 P]** Zwei Lagrangefunktionen L_1 und L_2 beschreiben dasselbe physikalische System. Wie können sich L_1 und L_2 voneinander unterscheiden?

c) **[2 P]** Wie lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen 2. Art? Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einer Dimension bewegt. Leiten Sie aus der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \tag{1}$$

das 2. Newtonsche Gesetz her.

d) **[3 P]** Was ist eine zyklische Koordinate? Zeigen Sie, dass die Existenz einer zyklischen Koordinate direkt auf eine Erhaltungsgröße führt. Wie nennt man diese Erhaltungsgröße?

e) **[2 P]** Wie lautet der Satz von Steiner, und was ist seine Bedeutung?

f) **[1 P]** Was besagt das Noether-Theorem (in Worten)?

g) **[2 P]** Welche Erhaltungsgrößen ergeben sich aus der Homogenität der Zeit und der der Isotropie des Raumes?

h) **[2 P]** Welche Aussagen können Sie über die Relationen der Hauptträgheitsmomente $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ eines langen, sehr dünnen Stabs machen. Nehmen Sie an, dass der Stab entlang der z-Achse liegt.

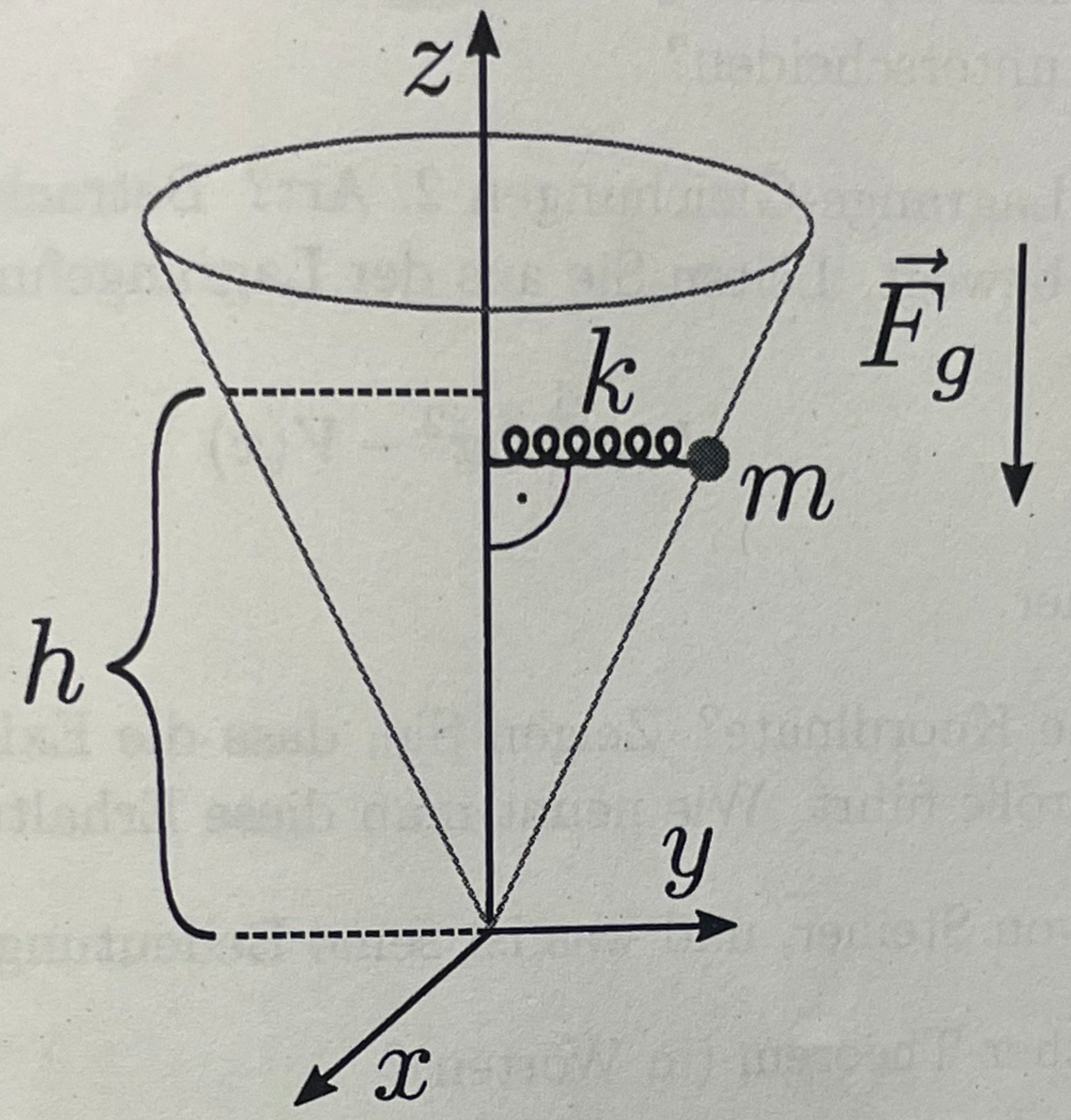
i) **[3 P]** Ein sich kräftefrei bewegender Satellit habe den Trägheitstensor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22} & \theta_{23} \\ 0 & \theta_{23} & \theta_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \theta_{kl} > 0 \text{ und } \theta_{23} < \theta_{22}\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente θ_1, θ_2 und θ_3. Für welche Werte von θ_{11} ist die Rotation um die x-Achse stabil?

Aufgabe 2: [20 P] Teilchenbewegung auf Kegelmantel

Auf dem Mantel eines Kegels, dessen Symmetrieachse mit der z-Achse übereinstimmt, bewege sich reibungsfrei ein Teilchen der Masse m, welches die Mantelfläche nicht verlassen kann. Es wirke die Schwerkraft $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$ (siehe Abbildung). Das Teilchen sei zusätzlich mit einer Feder mit Federkonstante k verbunden, welche an einem beweglichen Ring an der z-Achse so angebracht ist, dass die Auslenkung der Feder stets senkrecht zur z-Achse stattfindet. Die Feder ist gerade dann entspannt, wenn sich das Teilchen auf der Höhe h befindet. Bis auf das Teilchen können alle weiteren Bestandteile als masselos betrachtet werden.



Verwenden Sie Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z). Die Zwangsbedingung für die Bewegung auf dem Kegelmantel sei gegeben als

$$z = a\,\rho \tag{3}$$

mit einer positiven Konstanten a. Wählen Sie ρ und φ als generalisierte Koordinaten.

a) **[4 P]** Bestimmen Sie das Potential $V(\rho)$ des Systems.
Hinweis: Falls Sie diese Teilaufgabe nicht lösen können, rechnen Sie mit der vereinfachten Annahme $V(\rho) = b\rho^2 + c\rho$ *mit Konstanten b und c weiter.*

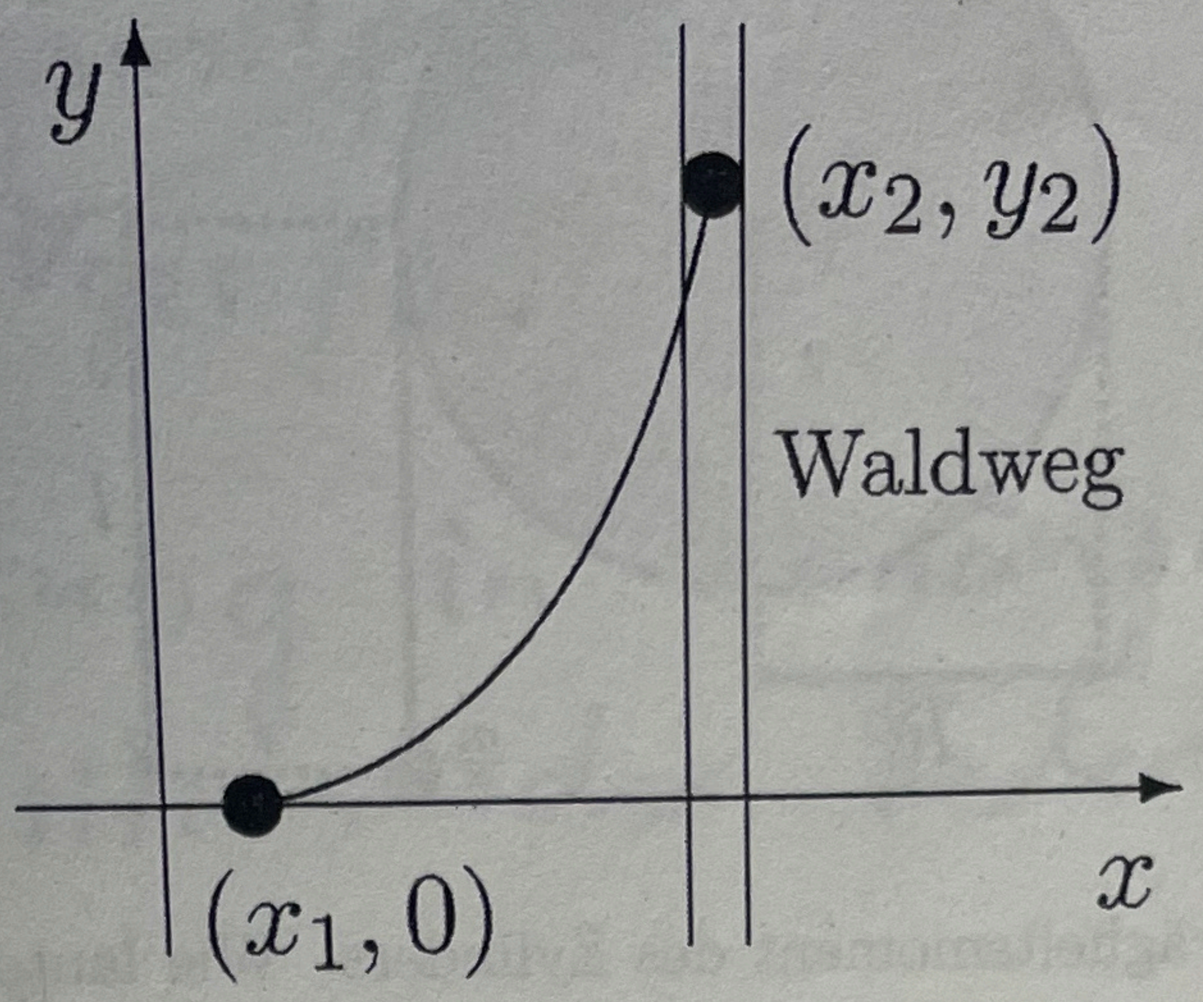
b) **[7 P]** Stellen Sie die Lagrangefunktion des Teilchens auf und leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. Gibt es zyklische Variablen?

c) **[6 P]** Zeigen Sie unter Verwendung der Bewegungsgleichungen aus Aufgabenteil b), dass die Gesamtenergie E erhalten ist.

d) **[3 P]** Das Teilchen rotiere nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Wie lautet die zusätzliche Zwangsbedingung? Stellen Sie die Lagrangefunktion für diesen Fall auf. Ist die Energie im Allgemeinen weiterhin eine Erhaltungsgröße? Begründen Sie dies in Worten.

Aufgabe 3: [20 P] Variationsrechnung

Eine Person durchquert eine sumpfige (x, y)-Ebene, um einen parallel zur y-Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(x)$, mit der die Person sich fortbewegen kann, hängt von x, aber nicht von y ab. Die Person befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchte in möglichst kurzer Zeit T den Punkt (x_2, y_2) erreichen, an dem ein Fluchtfahrzeug wartet. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.



a) **[5 P]** Formulieren Sie das Variationsproblem, um den Weg $y(x)$ zu finden, der die Zeit T minimiert. Bestimmen Sie dazu die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in dem Ausdruck

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, F(y'(x), y(x), x)\,, \tag{4}$$

wobei $y'(x) = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.
Hinweis: Es gilt $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v(x)}$ *mit dem Wegelement* $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$.

b) **[5 P]** Zeigen Sie, dass die Lösung dieses Variationsproblems durch

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \tag{5}$$

mit einer Integrationskonstante c gegeben ist. Lösen Sie die Gl. (5) nach $y'(x)$ auf, um $y'(x)$ durch $v(x)$ und c auszudrücken. Betrachten Sie nur Lösungen mit $y'(x) > 0$.

c) **[5 P]** Betrachten Sie von nun an den Spezialfall

$$v(x) = \frac{b}{x}\,, \qquad b > 0\,. \tag{6}$$

Drücken Sie die Zeit T in Gl. (4) durch x_1, x_2, b und c aus, indem Sie das Integral berechnen.
Hinweis: Benutzen Sie, um das Integral zu lösen, die Substitution $z = x/(bc)$ *und*

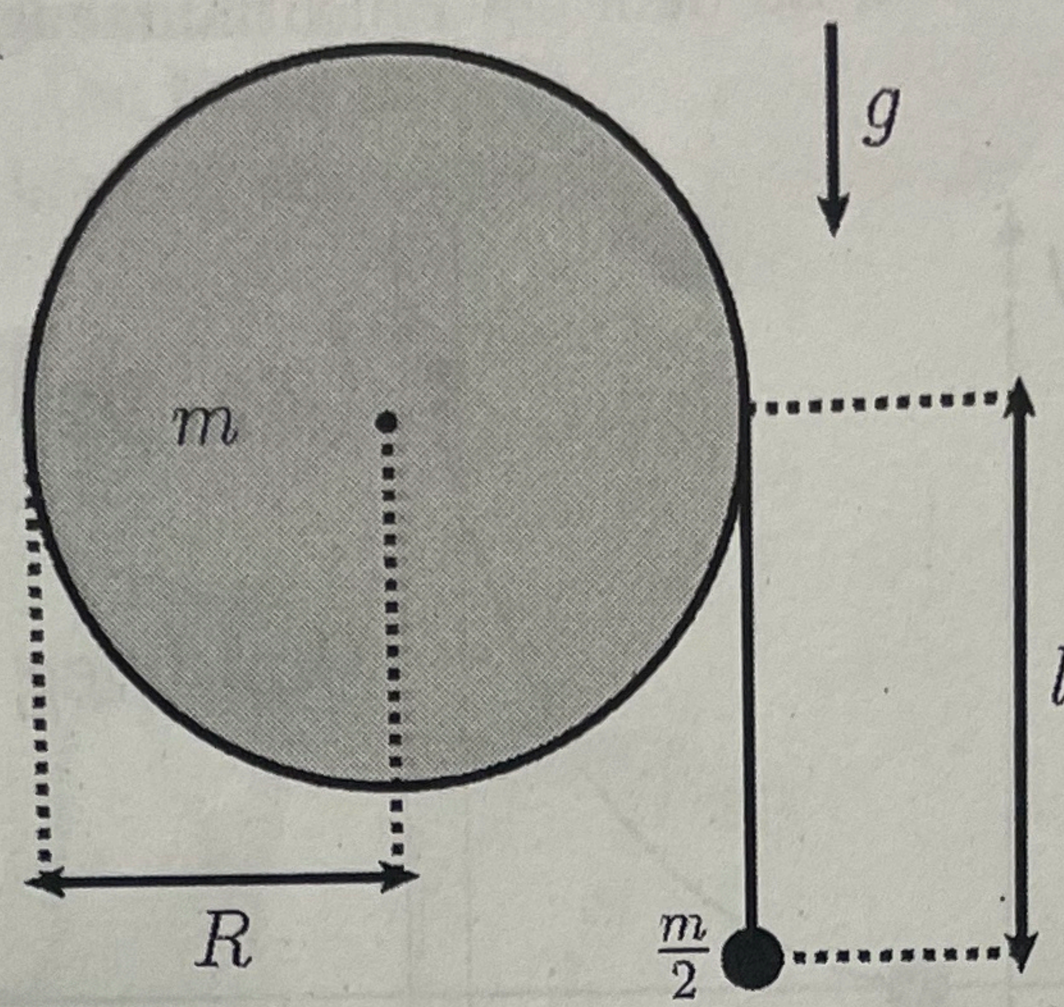
$$\int \mathrm{d}z\, \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{z^2-1} + \ln\left(\sqrt{z^2-1} + z\right)\right] + C\,. \tag{7}$$

d) **[5 P]** Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil b), um $y(x)$ zu bestimmen. Eliminieren Sie die auftretende Integrationskonstante mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$, so dass Sie $y(x)$ als Funktion von x, x_1, c und b erhalten. Benutzen Sie die Randbedingung am Ende des Weges, um eine Gleichung zu finden, die cb mit x_1, x_2 und y_2 in Beziehung setzt. Sie müssen diese Gleichung weder lösen noch vereinfachen.
Hinweis:

$$\int \mathrm{d}z\, \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{z^2-1} + z\right) + C\,. \tag{8}$$

Aufgabe 4: [20 P] Kabeltrommel

Auf eine Trommel (homogener, massiver Zylinder) mit Radius R, Länge H und Masse m ist ein masseloses, undehnbares Seil gewickelt, an dem ein punktförmiger Körper mit Masse $m/2$ im homogenen Schwerefeld g der Erde hängt. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) **[5 P]** Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders. Wie lautet die kinetische Energie T_{rot} der Trommel?

b) **[7 P]** Formulieren Sie die Lagrangefunktion des Systems aus Trommel und Körper, ausgedrückt durch die abgerollte Seillänge $l(t)$ und die dazugehörige Geschwindigkeit.

c) **[8 P]** Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen

$$l(t=0) = \dot{l}(t=0) = 0\,. \tag{9}$$

Vergleichen Sie die Bewegung des Körpers mit dem freien Fall des Körpers im Schwerefeld der Erde.