Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. Amir Khan, Tim Kretz

https://ilias.studium.kit.edu/goto.php?target=crs_1773210& client_id=produktiv

Klassische Theoretische Physik II

Erste Klausur

Sommersemester 2025 **Abgabe: 5.8.2025 nach 2 Stunden**

Vorname:

Familienname:

E-Mail-Adresse:

Matrikelnummer: **Tutorium:**

Studienfach:

Versuch: erster zweiter

A1 (20P)		(a)(7P)	(b)(7P)	(c)(6P)		
A2 (20P)		(a)(2P)	(b)(6P)	(c)(6P)	(d)(6P)	
A3 (20P)		(a)(5P)	(b)(5P)	(c)(5P)	(d)(5P)	
A4 (20P)		(a)(4P)	(b)(2P)	(c)(8P)	(d)(6P)	
A5 (20P)		(a)(3P)	(b)(3P)	(c)(7P)	(d)(5P)	(e)(2P)
Σ (100P)						

Lesen Sie den folgenden Text zu Beginn der Klausur bitte sorgfältig durch!
Bitte schreiben Sie oben in jedes Kästchen maximal einen Buchstaben oder eine Ziffer. Schreiben Sie nichts in die Punktetabelle, sie dient der Korrektur. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und nummerieren Sie Ihre Blätter fortlaufend durch. **Beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt**. Was nicht bewertet werden soll, ist deutlich durchzustreichen. Bitte kennzeichnen Sie die Endergebnisse der Teilaufgaben deutlich, z.B. durch doppeltes Unterstreichen. Wenn Sie mehr Papier brauchen, heben Sie bitte die Hand.
Legen Sie bitte zu Beginn der Klausur Ihren Studierendenausweis neben sich auf den Tisch; er wird während der Klausur kontrolliert. Wer seinen Studierendenausweis vergessen hat, verwendet einen anderen Lichtbildausweis.
Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet. **b.w.**

Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!
Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Der Aufgabenzettel muss nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz!
Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte.
Empfehlung: Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Formelsammlung

Integrale:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \ln(z+\sqrt{z^2-1}) + C \tag{1}$$

$$\int dz \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{z^2-1} + \ln\left(\sqrt{z^2-1}+z\right)\right] + C \tag{2}$$

Noether-Theorem:

$$q_l' = q_l + \epsilon\psi_l, \qquad t' = t + \epsilon\psi_0, \qquad L' = L + \epsilon\frac{d}{dt}F$$

$$Q = \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\psi_l + \left(L - \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\dot{q}_l\right)\psi_0 - F \tag{3}$$

Euler'sche Bewegungsgleichungen:

$$\theta\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\theta\vec{\omega}) = \vec{M} \tag{4}$$

Aufgabe 1: Panorama

In dieser Aufgabe geht es um allgemeines Physik-Verständnis, es sind nur wenige Rechenschritte nötig. Sie dürfen in dieser Aufgabe (aber nicht in den anderen Aufgaben) die Lösungen ohne Herleitungen angeben.

(a) Die Wirkung S eines Systems aus N Massenpunkten mit Massen m_j, Ortsvektoren $\vec{r}_j$ und Potential $V(\vec{r}_j)$ sei invariant unter einer der folgenden infinitesimalen Transformationen:

(i) (1P) $t \to t + \epsilon$,

(ii) (2P) $\vec{r}_j \to \vec{r}_j + \epsilon\vec{a}$ mit einem vorgegeben (also nicht beliebigen) zeitunabhängigen Vektor $\vec{a}$,

(iii) (2P) $\vec{r}_j \to \vec{r}_j + \vec{e}_y \times \vec{r}_j$ mit $\vec{e}_y = (0,1,0)^T$,

(iv) (2P) $\vec{r}_k \to \vec{r}_k + \epsilon\vec{w}t$ für beliebiges $\vec{w}$ mit $|\vec{w}| = 1$,

wobei die angegebenen Transformationen für alle $j = 1, \dots N$ anzuwenden sind.
Geben Sie die Erhaltungsgrößen an. (7 Punkte)

(b) Betrachten Sie $L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho, z)$. Geben Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten ρ, ϕ und z (Zylinderkoordinaten) an (3P). Welche Koordinate(n) ist/sind für beliebiges $V(\rho, z)$ zyklisch (2P)? Welche Erhaltungsgröße(n) gehört/gehören dazu (2P)? (7 Punkte)

(c) Ein sich kräftefrei bewegender Satellit habe den Trägheitstensor

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{33} & \theta_{33}/2 & 0 \\ \theta_{33}/2 & \theta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{33} \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad \theta_{33} > 0.$$

(i) (2P) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente θ_1, θ_2 und θ_3, wobei $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ ist.

(ii) (3P) Bestimmen Sie die drei Hauptträgheitsachsen.

(iii) (1P) Eine Rotationsbewegung um die zu θ_2 gehörende Hauptträgheitsachse wird leicht gestört und verläuft danach wieder kräftefrei. Welche Aussage(n) ist/sind korrekt?
(iiia) Die Rotationsachse führt eine Präzessionsbewegung aus.
(iiib) Die Rotationsachse führt eine Nutationsbewegung aus.
(iiic) Die Bewegung ist instabil, wobei sich die Achse zunächst exponentiell von ihrer ursprünglichen Lage wegbewegt.

(6 Punkte)

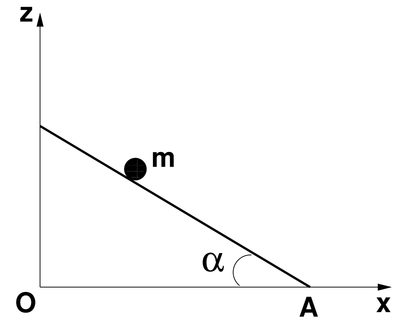
Aufgabe 2: Rotierende Ebene

Ein Körper der Masse m kann reibungsfrei im erdnahen Schwerefeld (d.h. $V = mgz$) auf einer Ebene gleiten. Die Ebene wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um eine feste Achse parallel zu y-Achse, die durch den Punkt A geht, im Uhrzeigersinn gedreht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Ebene waagerecht und der Körper befindet sich am Ursprung $(x, z) = (0, 0)$ mit $\dot{x}(0) = 0$. Die Neigung der Ebene ist als Funktion der Zeit durch $\alpha = \omega t$ vorgegeben und der Punkt A liegt bei $(x, z) = (L, 0)$ mit $L > 0$.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Verwenden Sie dazu den Abstand $r = \sqrt{(L-x)^2 + z^2}$ des Körpers zu A als verallgemeinerte Koordinate, also $x = L - r\cos(\omega t)$ und $z = r\sin(\omega t)$. (2 Punkte)

(b) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Anfangsbedingung $r(0) = L$, $\dot{r}(0) = 0$. (6 Punkte)

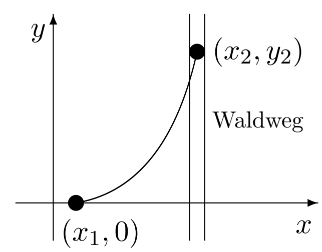
(c) Bei $\alpha = \omega t = \pi/2$ hat der Körper entweder den Punkt A erreicht oder ist von der Ebene abgefallen. Betrachten Sie $r(\pi/(2\omega))$ und geben Sie ein notwendiges Kriterium für $K := L\omega^2/g$ an, damit der Körper den Punkt A erreicht.
Hinweise: $\cosh(\pi/2) \approx 2.5$, $\sinh(\pi/2) \approx 2.3$. (6 Punkte)



(d) Bestimmen Sie aus der Lösung in (b) die Zwangskraft $\vec{Z} = (Z_x, 0, Z_z)^T$, die die Ebene auf den Körper ausübt. Überprüfen Sie, ob für das in (c) gefundene maximale K der Körper für $\alpha \to \pi/2$ Kontakt zur Ebene hat. (6 Punkte)

Aufgabe 3: Zwerge auf der Flucht

Flüchtende Zwerge durchqueren eine sumpfige (x, y)-Ebene, um einen parallel zur y-Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(x)$, mit der sie laufen können, hängt von x, aber nicht von y ab. Die Zwerge befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchten in möglichst kurzer Zeit T den Punkt (x_2, y_2) erreichen, an dem Schneewittchen mit einem Fluchtfahrzeug wartet. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.



(a) Formulieren Sie das Variationsproblem um den Weg $y(x)$, der die Zeit T minimiert, zu finden. Benutzen Sie dazu $dt = \frac{ds}{v(x)}$ mit dem Wegelement $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ und bestimmen Sie die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y'(x), y(x), x) \tag{5}$$

(5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass im vorliegenden Fall die Lösung des Variationsproblems durch

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \tag{6}$$

mit einer Integrationskonstanten c gegeben ist. Lösen Sie Gl. (6) nach $y'(x)$ auf, um $y'(x)$ durch $v(x)$ und c auszudrücken. Betrachten Sie nur Lösungen mit $y'(x) > 0$. (5 Punkte)

(c) Betrachten Sie ab jetzt den Spezialfall $v(x) = b/x$ mit $b > 0$. Drücken Sie die Zeit T in Gl. (5) durch x_1, x_2, b und c aus und stellen Sie sicher, dass die Argumente der Logarithmen dimensionslos sind.

(5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie $y(x)$. Eliminieren Sie die Integrationskonstante, die Sie in diesem Schritt finden, mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$, so dass Sie $y(x)$ als Funktion von x, x_1, c und b erhalten. Geben Sie die Gleichung an, die cb mit x_1, x_2 und y_2 verknüpft. Sie brauchen die Gleichung weder zu lösen noch zu vereinfachen. (5 Punkte)

Aufgabe 4: Satellit mit Materialfehler
Ein Satellit habe den Trägheitstensor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_x & \epsilon & 0 \\ \epsilon & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix},$$

wobei $|\epsilon| \ll \theta, \theta_x$ und $\theta, \theta_x > 0$ ist. Der Satellit rotiere um die Achse $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, wobei $\vec{\omega}$ von der Zeit t abhängt.

(a) Berechnen Sie $\theta\vec{\omega}$ und $\vec{\omega} \times (\theta\vec{\omega})$. (4 Punkte)

(b) Der Satellit sollte im All kräftefrei mit $\vec{\omega}^{(0)} = (\omega, 0, 0)^T$ rotieren. Bestätigen Sie, dass das eine Lösung der Euler'schen Gleichungen für $\epsilon = 0$ mit konstantem ω ist. (2 Punkte)

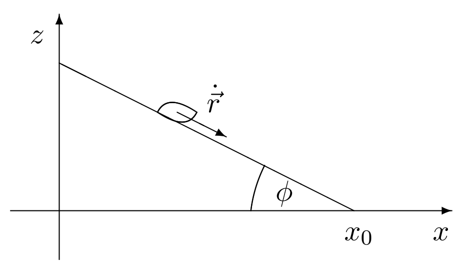
(c) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $\omega_1(t) = \omega + \epsilon\omega_1^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $\omega_{2,3}(t) = \epsilon\omega_{2,3}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ die Lösung $\vec{\omega}(t)$ für die kräftefreie Bewegung zur Ordnung ϵ.
Hinweise: (i) Verwenden Sie die Abkürzung $\Omega = \omega(\theta_x - \theta)/\theta$.
(ii) Die Lösung hat zwei Integrationskonstanten. (8 Punkte)

(d) Nun untersuchen wir, wie man den Materialfehler $\epsilon \neq 0$ finden kann, bevor man den Satelliten ins All schießt. Wir rotieren dazu den Satelliten auf einer Werkbank mit zeitlich konstantem $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)^T$. Weil die Achse fixiert ist, kann der Satellit nicht präzessieren. Die Achse übt also ein Drehmoment $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)^T$ aus, das man messen könnte, um den Materialfehler aufzuspüren. Bestimmen Sie $\vec{M}$. (6 Punkte)

Aufgabe 5: Paketrutsche
Auf einer durch

$$z = (x_0 - x)\tan\phi \qquad \text{mit } 0 < \phi < \pi/2 \text{ fest}, \quad x_0 > 0,$$

definierten Rampe rutsche in der x-z-Ebene ein Paket mit Masse m und Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t), 0, z(t))^T$ herab. Es wirke die Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ und die Stokes'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{\vec{r}}$ mit $\alpha > 0$.



(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$, wobei in V nur die Schwerkraft zu berücksichtigen ist, als Funktion von x und $\dot{x}$. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die generalisierte Reibungskraft $Q = \vec{F}_R \cdot \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}$ (3 Punkte)

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q \tag{7}$$

um $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (die wir auch in den folgenden Teilaufgaben betrachten) zu finden. (7 Punkte)

(d) Entwickeln Sie $x(t)$ um $\alpha = 0$ zur niedrigsten nichtverschwindenden Ordnung, um den Grenzfall ohne Reibung zu erhalten. (5 Punkte)

(e) Bestimmen Sie analog den führenden Term im Grenzfall großer Reibung. (2 Punkte)