

Abgabe: 5.8.2025 nach 2 Stunden

Die Benutzung elektronischer Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone, Tablet-Computer,...) oder anderer Hilfsmittel (Fachbücher, Aufzeichnungen, ältere Geschwister...) ist nicht gestattet. **b.w.**

Wer zur Toilette geht, gibt das Aufgabenblatt und seine Lösungen beim Aufsichtspersonal ab und erhält alles anschließend zurück. Es ist erlaubt, die bearbeitete Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit von 2 Zeitstunden abzugeben und den Raum zu verlassen. Jedoch: In den letzten 20 Minuten der Bearbeitungszeit darf niemand mehr den Raum verlassen!

Heften Sie die Blätter mit Ihren Lösungen der Klausuraufgaben zusammen, mit diesem Deckblatt als erster Seite. (Die Klausuraufsicht hilft beim Klammern; die Verantwortung für die Vollständigkeit der eingereichten Klausur liegt jedoch bei Ihnen.) Der Aufgabenzettel muss nicht abgegeben werden. Bitte schreiben Sie auch keine Lösungen auf den Aufgabenzettel. Es gibt keine Punkte auf richtiges Rechnen mit falschem Ansatz!

Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte.

Empfehlung: Lesen Sie unbedingt vor der Bearbeitung der Aufgaben die **Formelsammlung** durch, damit Sie auf die richtigen Ideen kommen. Sie dürfen sich ohne Beweis auf diese Formeln beziehen.

Formelsammlung

Integrale:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) + C \quad (1)$$

$$\int dz \frac{z^2}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{2} \left[z\sqrt{z^2 - 1} + \ln(\sqrt{z^2 - 1} + z) \right] + C \quad (2)$$

Noether-Theorem:

$$q'_l = q_l + \epsilon \psi_l, \quad t' = t + \epsilon \psi_0, \quad L' = L + \epsilon \frac{d}{dt} F$$
$$Q = \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \psi_l + \left(L - \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l \right) \psi_0 - F \quad (3)$$

Euler'sche Bewegungsgleichungen:

$$\theta \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\theta \vec{\omega}) = \vec{M} \quad (4)$$

Punkte werden **nicht geteilt**, es werden z.B. **keine halben** Punkte vergeben.

1 Lösungen Aufgabe 1

Aufgabe 1: Panorama In dieser Aufgabe geht es um allgemeines Physik-Verständnis, es sind nur wenige Rechenschritte nötig. Sie dürfen in dieser Aufgabe (aber nicht in den anderen Aufgaben) die Lösungen ohne Herleitungen angeben.

(a) Die Wirkung S eines Systems aus N Massenpunkten mit Massen m_j , Ortsvektoren $\vec{r}_j$ und Potential $V(\vec{r}_j)$ sei invariant unter einer der folgenden infinitesimalen Transformationen:

- (i) (1P) $t \rightarrow t + \epsilon$,
- (ii) (2P) $\vec{r}_j \rightarrow \vec{r}_j + \epsilon \vec{a}$ mit einem vorgegeben (also nicht beliebigen) zeitunabhängigen Vektor $\vec{a}$,
- (iii) (2P) $\vec{r}_j \rightarrow \vec{r}_j + \epsilon \vec{e}_y \times \vec{r}_j$ mit $\vec{e}_y = (0, 1, 0)^T$,
- (iv) (2P) $\vec{r}_k \rightarrow \vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t$ für beliebiges $\vec{w}$ mit $|\vec{w}| = 1$,

wobei die angegebenen Transformationen für alle $j = 1, \dots, N$ anzuwenden sind.
Geben Sie die Erhaltungsgrößen an.

(7 Punkte)

1.1 Lösung 1(a)

- (i) Korrekt sind “Energie” oder “Hamiltonfunktion” (1P).
- (ii) Korrekt sind $\vec{a} \cdot \vec{P}$, oder “Impuls in $\vec{a}$ -Richtung” (2P). Die Antworten $\vec{P}$ oder “Impuls” geben **nur einen Punkt**.
- (iii) Korrekt sind L_y oder $\vec{e}_y \cdot \vec{L}$ oder “y-Komponente des Drehimpulses” (2P). Die Antworten $\vec{L}$ oder “Drehimpuls” geben **nur einen Punkt**.
- (iv) Korrekt sind $\sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k(0)t - \vec{r}_k(t))$ oder “ $M\dot{\vec{r}}_S(0)t - M\vec{r}_S(t)$ mit Gesamtmasse M und Schwerpunkt $\vec{r}_S$ ” oder ähnlich Formulierungen (z.B. ohne den Faktor M) (2P). Lösungen, die sich aus den angegebenen durch Skalarmultiplikation mit $\vec{w}$ ergeben, geben **nur einen Punkt**.

(b) Betrachten Sie $L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, z)$. Geben Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten ρ , ϕ und z (Zylinderkoordinaten) an (3P). Welche Koordinate(n) ist/sind für beliebiges $V(\rho, z)$ zyklisch (2P)? Welche Erhaltungsgröße(n) gehört/gehört dazu (2P)?

(7 Punkte)

1.2 Lösung 1(b)

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0, \quad (1P) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\phi}) = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}) = 0, \quad (1P) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (1P) \quad (7)$$

ϕ ist zyklisch (2P) mit Erhaltungsgröße $L_z = m\rho^2 \dot{\phi}$ (2P).

(c) Ein sich kräftefrei bewegender Satellit habe den Trägheitstensor

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{33} & \theta_{33}/2 & 0 \\ \theta_{33}/2 & \theta_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \theta_{33} > 0.$$

- (i) (2P) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente θ_1 , θ_2 und θ_3 , wobei $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ ist.
- (ii) (3P) Bestimmen Sie die drei Hauptträgheitsachsen.
- (iii) (1P) Eine Rotationsbewegung um die zu θ_2 gehörende Hauptträgheitsachse wird leicht gestört und verläuft danach wieder kräftefrei. Welche Aussage(n) ist/sind korrekt?
 - (iiia) Die Rotationsachse führt eine Präzessionsbewegung aus.
 - (iiib) Die Rotationsachse führt eine Nutationsbewegung aus.
 - (iiic) Die Bewegung ist instabil, wobei sich die Achse zunächst exponentiell von ihrer ursprünglichen Lage wegbewegt.

(6 Punkte)

1.3 Lösung 1(c)

- (i) Ein Hauptträgheitsmoment ist θ_{33} (1P). Aus $(\theta_{33} - \theta)^2 - \theta_{33}^2/4 = 0$ folgt $\theta = \theta_{33}/2$ oder $\theta = 3\theta_{33}/2$, also

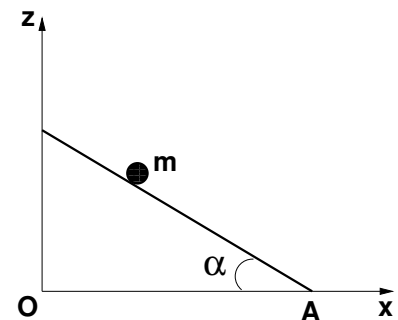
$$\theta_1 = \theta_{33}/2, \quad \theta_2 = \theta_{33}, \quad \theta_3 = 3\theta_{33}/2. \quad 1P$$

- (ii) $\vec{n}_1 = (-1, 1, 0)/\sqrt{2}$ (1P), $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ (1P), $\vec{n}_3 = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$ (1P). Die volle Punktzahl wird auch gegeben, wenn die Achsen nicht auf 1 normiert sind. Anstatt von $\vec{n}_j$ ist natürlich $-\vec{n}_j$ genauso korrekt.
- (iii) Korrekt ist (iiic) (1P).

2 Lösungen Aufgabe 2

Aufgabe 2: Rotierende Ebene Ein Körper der Masse m kann reibungsfrei im erdnahen Schwerfeld (d.h. $V = mgz$) auf einer Ebene gleiten. Die Ebene wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um eine feste Achse parallel zur y -Achse, die durch den Punkt A geht, im Uhrzeigersinn gedreht. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Ebene waagrecht und der Körper befindet sich am Ursprung $(x, z) = (0, 0)$ mit $\dot{x}(0) = 0$. Die Neigung der Ebene ist als Funktion der Zeit durch $\alpha = \omega t$ vorgegeben und der Punkt A liegt bei $(x, z) = (L, 0)$ mit $L > 0$.

- (a) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf. Verwenden Sie dazu den Abstand $r = \sqrt{(L - x)^2 + z^2}$ des Körpers zu A als verallgemeinerte Koordinate, also $x = L - r \cos(\omega t)$ und $z = r \sin(\omega t)$. (2 Punkte)



2.1 Lösung 2(a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\dot{r} \cos(\omega t) + r\omega \sin(\omega t) \\ \dot{z} &= \dot{r} \sin(\omega t) + r\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$T = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{z}^2] = \frac{m}{2} [\omega^2 r^2 + \dot{r}^2], \quad 1P$$

$$L = T - V = \frac{m}{2} [\omega^2 r^2 + \dot{r}^2] - mgr \sin(\omega t) \quad 1P$$

Es ist erlaubt, T oder L auswendig hinzuschreiben, weil es ja bekannte Zylinderkoordinaten sind.

(b) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Anfangsbedingung $r(0) = L$, $\dot{r}(0) = 0$. (6 Punkte)

2.2 Lösung 2(b)

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$= m\ddot{r} - m\omega^2 r + mg \sin(\omega t), \quad 1P \quad (9)$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}, \quad 1P \quad (10)$$

mit Integrationskonstanten A , B . Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL Gl. (9) mit Ansatz $r(t) = C \sin(\omega t)$ (1P). Einsetzen in Gl. (9) liefert

$$-\omega^2 C \sin(\omega t) - \omega^2 C \sin(\omega t) + g \sin(\omega t) = 0,$$

also

$$C = \frac{g}{2\omega^2}, \quad 1P$$

Die allgemeine Lösung von Gl. (9) ist also

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t). \quad \text{kein Punkt} \quad (11)$$

Anfangsbedingungen:

$$L = r(0) = A + B \quad \Rightarrow B = L - A, \quad \text{kein Punkt}$$

$$0 = \dot{r}(0) = \omega(A - B) + \frac{g}{2\omega} = (2A - L)\omega + \frac{g}{2\omega} \quad \Rightarrow A = \frac{L}{2} - \frac{g}{4\omega^2}, \quad 1P$$

Somit

$$r(t) = \frac{L}{2} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}] + \frac{g}{4\omega^2} [-e^{\omega t} + e^{-\omega t} + 2 \sin(\omega t)]$$

$$= L \cosh(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} [-\sinh(\omega t) + \sin(\omega t)]. \quad 1P \quad (12)$$

Es gibt auch die volle Punktzahl für die erste Variante (ohne Verwendung von $\sinh$ und $\cosh$).

(c) Bei $\alpha = \omega t = \pi/2$ hat der Körper entweder den Punkt A erreicht oder ist von der Ebene abgefallen. Betrachten Sie $r(\pi/(2\omega))$ und geben Sie ein notwendiges Kriterium für $K := L\omega^2/g$ an, damit der Körper den Punkt A erreicht.

Hinweise: $\cosh(\pi/2) \approx 2.5$, $\sinh(\pi/2) \approx 2.3$.

(6 Punkte)

2.3 Lösung 2(c)

Für $\alpha > \pi/2$ fällt der Körper ab, der Punkt A wird also nicht erreicht, wenn $r(\pi/(2\omega)) > 0$ ist. Diese notwendige Bedingung liest sich mit Gl. (12) als

$$\begin{aligned} 0 &\geq r(\pi/(2\omega)) = L \cosh(\pi/2) + \frac{g}{2\omega^2} [-\sinh(\pi/2) + 1], & 3P \\ \Rightarrow K = \frac{L\omega^2}{g} &\leq \frac{\sinh(\pi/2) - 1}{2 \cosh(\pi/2)} \approx 0.26 \quad \text{was positiv ist} & 3P \end{aligned} \quad (13)$$

Die volle Punktzahl gibt es auch, wenn der numerische Wert nicht angegeben ist.

(d) Bestimmen Sie aus der Lösung in (b) die Zwangskraft $\vec{Z} = (Z_x, 0, Z_z)^T$, die die Ebene auf den Körper ausübt. Überprüfen Sie, ob für das in (c) gefundene maximale K der Körper für $\alpha \rightarrow \pi/2$ Kontakt zur Ebene hat. (6 Punkte)

2.4 Lösung 2(d)

Aus Gl. (8) folgt

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\ddot{r} \cos(\omega t) + 2\dot{r}\omega \sin(\omega t) + \omega^2 r \cos(\omega t) \\ &\stackrel{\text{Gl. (9)}}{=} [2\dot{r}\omega + g \cos(\omega t)] \sin(\omega t), & 1P \\ \ddot{z} &= \ddot{r} \sin(\omega t) + 2\dot{r}\omega \cos(\omega t) - \omega^2 r \sin(\omega t) \\ &\stackrel{\text{Gl. (9)}}{=} 2\dot{r}\omega \cos(\omega t) - g \sin^2(\omega t), & 1P \end{aligned} \quad (14)$$

Gl. (12) impliziert:

$$\dot{r} = L\omega \sinh(\omega t) + \frac{g}{2\omega} [-\cosh(\omega t) + \cos(\omega t)], \quad 1P$$

Also mit Gl. (14):

$$\begin{aligned} Z_x &= m\ddot{x} = m [2L\omega^2 \sinh(\omega t) - g [\cosh(\omega t) - 2\cos(\omega t)]] \sin(\omega t), & 1P \\ Z_z &= m\ddot{z} + mg = m [2L\omega^2 \sinh(\omega t) - g [\cosh(\omega t) - 2\cos(\omega t)]] \cos(\omega t), & 1P \\ &= Z_x \cot(\omega t) \end{aligned} \quad (15)$$

Es reicht auch aus, nur Z_x zu berechnen und aus der Geometrie $Z_z = Z_x \cot \alpha$ zu bestimmen. Wer explizit $\ddot{r}$ ausrechnet anstatt die BGL zu verwenden, bekommt natürlich auch die volle Punktzahl. Es ist

$$\ddot{r} = L\omega^2 \cosh(\omega t) + \frac{g}{2} [-\sinh(\omega t) - \sin(\omega t)].$$

Z_x und Z_z haben für $\omega t = \pi/2$ den Vorfaktor

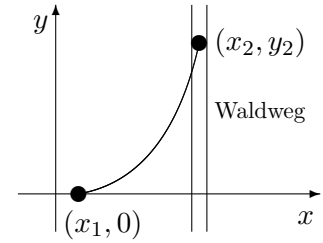
$$2K \sinh(\pi/2) - \cosh(\pi/2) \leq 2 \cdot 0.26 \cdot 2.3 - 2.5 < 0$$

während der Vorfaktor für $t = 0$ gleich 1 ist, also positiv. Es gibt also keinen Kontakt zur Ebene (1P), das notwendige Kriterium ist also nicht hinreichend.

3 Lösungen Aufgabe 3

Aufgabe 3: Zwerge auf der Flucht

Flüchtende Zwerge durchqueren eine sumpfige (x, y) -Ebene, um einen parallel zur y -Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(x)$, mit der sie laufen können, hängt von x , aber nicht von y ab. Die Zwerge befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchten in möglichst kurzer Zeit T den Punkt (x_2, y_2) erreichen, an dem Schneewittchen mit einem Fluchtfahrzeug wartet. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.



- (a) Formulieren Sie das Variationsproblem um den Weg $y(x)$, der die Zeit T minimiert, zu finden. Benutzen Sie dazu $dt = \frac{ds}{v(x)}$ mit dem Wegelement $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ und bestimmen Sie die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y'(x), y(x), x) \quad (16)$$

(5 Punkte)

3.1 Lösung 3(a)

Für die Gesamtzeit T gilt

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)}, \quad (17)$$

(3P) also

$$F(y'(x), y(x), x) = F(y'(x), x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x)}. \quad (18)$$

(2P)

- (b) Zeigen Sie, dass im vorliegenden Fall die Lösung des Variationsproblems durch

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \quad (19)$$

mit einer Integrationskonstanten c gegeben ist. Lösen Sie Gl. (19) nach $y'(x)$ auf, um $y'(x)$ durch $v(x)$ und c auszudrücken. Betrachten Sie nur Lösungen mit $y'(x) > 0$. (5 Punkte)

3.2 Lösung 3(b)

Allgemein gilt für die Lösung des Variationsproblems

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (20)$$

also hier, da F nicht explizit von y abhängt,

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (21)$$

(2P) und deshalb

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c, \quad (22)$$

mit einer Konstanten c . Wir haben explizit

$$c = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}, \quad (23)$$

also aufgelöst

$$y'^2 = \frac{c^2 v^2}{1 - c^2 v^2}, \quad y' = \frac{cv}{\sqrt{1 - c^2 v^2}}. \quad (24)$$

(3P)

(c) Betrachten Sie ab jetzt den Spezialfall $v(x) = b/x$ mit $b > 0$. Drücken Sie die Zeit T in Gl. (16) durch x_1 , x_2 , b und c aus und stellen Sie sicher, dass die Argumente der Logarithmen dimensionslos sind. (5 Punkte)

3.3 Lösung (3c)

Wir haben

$$T = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v\sqrt{1-c^2v^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{b/x\sqrt{1-b^2c^2/x^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dxx^2}{b^2c\sqrt{x^2/(b^2c^2)-1}} \quad (25)$$

3. Schritt 1P, letzter Schritt 2P Mit der Variablensubstitution $z = x/(bc)$, $dz = dx/(bc)$ ist mit dem angegebenen Integral

$$\begin{aligned} T &= bc^2 \int_{x_1/(bc)}^{x_2/(bc)} \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}} dz \\ &= \frac{bc^2}{2} \left[z\sqrt{z^2-1} + \ln \left(\sqrt{z^2-1} + z \right) \right]_{x_1/(bc)}^{x_2/(bc)} \\ &= \frac{bc^2}{2} \left[\frac{x_2}{bc} \sqrt{x_2^2/(b^2c^2)-1} - \frac{x_1}{bc} \sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1} + \ln \frac{\sqrt{x_2^2/(b^2c^2)-1} + x_2/(bc)}{\sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1} + x_1/(bc)} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

1. Schritt 1P, Ergebnis 1P

(d) Bestimmen Sie $y(x)$. Eliminieren Sie die Integrationskonstante, die Sie in diesem Schritt finden, mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$, so dass Sie $y(x)$ als Funktion von x , x_1 , c und b erhalten. Geben Sie die Gleichung an, die cb mit x_1 , x_2 und y_2 verknüpft. Sie brauchen die Gleichung weder zu lösen noch zu vereinfachen. (5 Punkte)

3.4 Lösung 3(d)

Wir müssen die folgende DGL (siehe Gl. (24)) lösen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bc/x}{\sqrt{1-b^2c^2/x^2}} \quad (27)$$

(2P) also

$$\int_{y(x_1)}^y dy = \int_{x_1}^x \frac{bc}{x\sqrt{1-b^2c^2/x^2}} dx = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2/(b^2c^2)-1}}. \quad (28)$$

(1P) Mit der Variablensubstitution $z = x/(bc)$, $dz = dx/(bc)$ und $y(x_1) = 0$ ist

$$\begin{aligned} y(x) &= bc \int_{x_1/(bc)}^{x/(bc)} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \\ &= bc \ln \frac{x/(bc) + \sqrt{x^2/(b^2c^2)-1}}{x_1/(bc) + \sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1}}. \end{aligned} \quad (29)$$

(1P) wobei wir das angegebene Integral benutzt haben. Wir haben noch die Randbedingung $y(x_2) = y_2$ die wir benutzen können um c durch y_2 auszudrücken. Die bestimmende (transzendente) Gleichung ist

$$y_2 = bc \ln \frac{x_2/(bc) + \sqrt{x_2^2/(b^2c^2)-1}}{x_1/(bc) + \sqrt{x_1^2/(b^2c^2)-1}}. \quad (30)$$

(1P)

4 Lösungen Aufgabe 4

Aufgabe 4: Satellit mit Materialfehler

Ein Satellit habe den Trägheitstensor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_x & \epsilon & 0 \\ \epsilon & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix},$$

wobei $|\epsilon| \ll \theta, \theta_x$ und $\theta, \theta_x > 0$ ist. Der Satellit rotiere um die Achse $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$, wobei $\vec{\omega}$ von der Zeit t abhängt.

(a) Berechnen Sie $\theta\vec{\omega}$ und $\vec{\omega} \times (\theta\vec{\omega})$. (4 Punkte)

4.1 Lösung 4(a)

$$\begin{aligned} \theta\vec{\omega} &= \begin{pmatrix} \theta_x\omega_1 + \epsilon\omega_2 \\ \epsilon\omega_1 + \theta\omega_2 \\ \theta\omega_3 \end{pmatrix} \quad (2P) \\ \vec{\omega} \times (\theta\vec{\omega}) &= \begin{pmatrix} -\epsilon\omega_1\omega_3 \\ \omega_3(\epsilon\omega_2 + \omega_1(\theta_x - \theta)) \\ \omega_1\omega_2(\theta - \theta_x) + \epsilon(\omega_1^2 - \omega_2^2) \end{pmatrix} \quad (2P) \end{aligned} \quad (31)$$

(b) Der Satellit sollte im All kräftefrei mit $\theta\vec{\omega}^{(0)} = (\omega, 0, 0)^T$ rotieren. Bestätigen Sie, dass das eine Lösung der Euler'schen Gleichungen für $\epsilon = 0$ mit konstantem ω ist.

(2 Punkte)

4.2 Lösung 4(b)

$$\dot{\vec{\omega}}^{(0)} = 0 \quad \text{and with Gl. (31)} \quad \vec{\omega} \times (\theta\vec{\omega}^{(0)}) = 0, \quad 2P$$

(c) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $\omega_1(t) = \omega + \epsilon\omega_1^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $\omega_{2,3}(t) = \epsilon\omega_{2,3}^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ die Lösung $\vec{\omega}(t)$ für die kräftefreie Bewegung zur Ordnung ϵ .

Hinweise: (i) Verwenden Sie die Abkürzung $\Omega = \omega(\theta_x - \theta)/\theta$.

(ii) Die Lösung hat zwei Integrationskonstanten.

(8 Punkte)

4.3 Lösung 4(c)

Using Gl. (31) the Euler equations are

$$\begin{pmatrix} \theta_x\dot{\omega}_1 + \epsilon\dot{\omega}_2 \\ \epsilon\dot{\omega}_1 + \theta\dot{\omega}_2 \\ \theta\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\epsilon\omega_1\omega_3 \\ \omega_3(\epsilon\omega_2 + \omega_1(\theta_x - \theta)) \\ \omega_1\omega_2(\theta - \theta_x) + \epsilon(\omega_1^2 - \omega_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (32)$$

Inserting the ansatz and discarding $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ terms gives

$$\begin{aligned}\theta_x \epsilon \dot{\omega}_1^{(1)} &= M_1 = 0 \\ \theta \epsilon \dot{\omega}_2^{(1)} + (\theta_x - \theta) \epsilon \omega \omega_3^{(1)} &= M_2 = 0 \\ \theta \epsilon \dot{\omega}_3^{(1)} - (\theta_x - \theta) \omega \epsilon \omega_2^{(1)} + \epsilon \omega^2 &= M_3 = 0\end{aligned}\quad (2P) \quad (33)$$

The first equation gives $\omega_1^{(1)} = \text{const.}$ In terms of Ω :

$$\dot{\omega}_2^{(1)} + \Omega \omega_3^{(1)} = 0 \quad (34)$$

$$\dot{\omega}_3^{(1)} - \Omega \omega_2^{(1)} = -\frac{\omega^2}{\theta} \quad (35)$$

Determining $\ddot{\omega}_2^{(1)} + \Omega \dot{\omega}_3^{(1)} = 0$ from the first equation and inserting $\dot{\omega}_3^{(1)}$ from the second equation into this gives

$$\ddot{\omega}_2^{(1)} + \Omega^2 \omega_2^{(1)} = \frac{\Omega \omega^2}{\theta} \quad (2P) \quad (36)$$

Gl. (36) is an inhomogeneous linear differential equation. A special solution is the constant solution $\omega_2^{(1)} = \omega^2/(\Omega\theta)$. Adding the general solution (known from the lecture) gives

$$\omega_2^{(1)}(t) = A \cos(\Omega t) - B \sin(\Omega t) + \frac{\omega^2}{\Omega\theta} \quad (2P) \quad (37)$$

with integration constants A, B . Deriving this w.r.t. t gives $\dot{\omega}_2^{(1)}$ which can be inserted into Gl. (34) to find

$$\omega_3^{(1)}(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad (2P) \quad (38)$$

(d) Nun untersuchen wir, wie man den Materialfehler $\epsilon \neq 0$ finden kann, bevor man den Satelliten ins All schießt. Wir rotieren dazu den Satelliten auf einer Werkbank mit zeitlich konstantem $\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)^T$. Weil die Achse fixiert ist, kann der Satellit nicht präzessieren. Die Achse übt also ein Drehmoment $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)^T$ aus, das man messen könnte, um den Materialfehler aufzuspüren. Bestimmen Sie $\vec{M}$. (6 Punkte)

4.4 Lösung 4(d)

Setting $\omega_2 = \omega_3 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$ in Gl. (32) gives

$$\begin{aligned}M_1 &= 0, & 2P \\ M_2 &= 0, & 2P \\ M_3 &= \epsilon \omega^2, & 2P.\end{aligned}$$

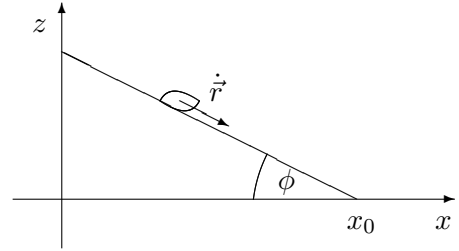
5 Lösungen Aufgabe 5

Aufgabe 5: Paketrutsche

Auf einer durch

$$z = (x_0 - x) \tan \phi \quad \text{mit } 0 < \phi < \pi/2 \text{ fest, } x_0 > 0,$$

definierten Rampe rutsche in der x - z -Ebene ein Paket mit Masse m und Ortsvektor $\vec{r}(t) = (x(t), 0, z(t))^T$ herab. Es wirke die Schwerkraft $-mg\vec{e}_z$ und die Stokes'sche Reibungskraft $\vec{F}_R = -\alpha\dot{\vec{r}}$ mit $\alpha > 0$.



- (a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$, wobei in V nur die Schwerkraft zu berücksichtigen ist, als Funktion von x und $\dot{x}$. (3 Punkte)

5.1 Lösung 5(a)

Wir haben als Funktion der generalisierten Koordinate x

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (x_0 - x) \tan \phi \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ -\dot{x} \tan \phi \end{pmatrix}, \quad (39)$$

also die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \tan^2 \phi). \quad (40)$$

1P Mit der potentiellen Energie

$$V = mgz = -mg(x - x_0) \tan \phi, \quad (41)$$

1P ist schließlich die Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 (1 + \tan^2 \phi) + mg(x - x_0) \tan \phi. \quad (42)$$

1P

- (b) Bestimmen Sie die generalisierte Reibungskraft $Q = \vec{F}_R \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{x}}$ (3 Punkte)

5.2 Lösung 5(b)

Wir haben

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan \phi \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_R = -\alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ -\dot{x} \tan \phi \end{pmatrix}, \quad (43)$$

1P also für die generalisierte Reibungskraft

$$Q = -\alpha \dot{x} (1 + \tan^2 \phi). \quad (44)$$

2P

(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q \quad (45)$$

um $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (die wir auch in den folgenden Teilaufgaben betrachten) zu finden. (7 Punkte)

5.3 Lösung 5(c)

Mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} (1 + \tan^2 \phi) , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = mg \tan \phi , \quad (46)$$

lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} (1 + \tan^2 \phi) - mg \tan \phi = -\alpha \dot{x} (1 + \tan^2 \phi) , \quad (47)$$

2P oder

$$\ddot{x} = \frac{g \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi} - \frac{\alpha}{m} \dot{x} . \quad (48)$$

Die Lösung erhalten wir, wenn wir die allg. Lösung der homogenen Gleichung zur speziellen Lösung der inhomogenen addieren (volle Punkte gibt es auch, wenn die Lösung in Gleichung (76) direkt hingeschrieben wird oder die Bewegungsgleichung 2x integriert wird). Die allg. Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} = -\frac{\alpha}{m} \dot{x} . \quad (49)$$

1P lautet

$$x_{\text{hom}}(t) = Ae^{-\alpha/m t} + B , \quad (50)$$

1P eine spezielle Lösung der inhomogenen ist

$$x_{\text{inh}} = \frac{mg \tan \phi}{\alpha(1 + \tan^2 \phi)} t . \quad (51)$$

1P Die Randbedingungen fixieren

$$B = -A = -\frac{g \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi} \frac{m^2}{\alpha^2} , \quad (52)$$

also insgesamt

$$x(t) = \frac{g \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi} \frac{m^2}{\alpha^2} \left[e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m} t \right] . \quad (53)$$

2P

(d) Entwickeln Sie $x(t)$ um $\alpha = 0$ zur niedrigsten nichtverschwindenden Ordnung, um den Grenzfall ohne Reibung zu erhalten. (5 Punkte)

5.4 Lösung 5(d)

Für kleine α ist

$$e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t = \frac{\alpha^2}{2m^2}t^2 + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (54)$$

2P also in diesem Fall

$$x(t) \rightarrow \frac{g \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi} \frac{t^2}{2}, \quad (55)$$

3P was in der Tat die Lösung der Bewegungsgleichung (17) mit $\alpha = 0$ ist.

(e) Bestimmen Sie analog den führenden Term im Grenzfall großer Reibung. (2 Punkte)

5.5 Lösung 5(e)

Für große α ist

$$e^{-\alpha t/m} - 1 + \frac{\alpha}{m}t \simeq \frac{\alpha}{m}t, \quad (56)$$

1P also in diesem Fall

$$x(t) \rightarrow \frac{g \tan \phi}{1 + \tan^2 \phi} \frac{m}{\alpha} t. \quad (57)$$

1P Punkte gibts auch, wenn der -1 -Term mitgenommen wurde