

Quickies Theo B
Prof. Mühlleitner

Marius Sulzer

Was sind verallgemeinerte Koordinaten? Wie viele gibt es?

Verallgemeinerte Koordinaten sind Koordinaten, die die Zwangsbedingungen des Systems automatisch berücksichtigen. Die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten ist gleich der Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems: $f = 3N - N_Z$ mit N Massenpunkten und N_Z Zwangsbedingungen.

Was besagt das Noether-Theorem (in Worten)?

Das Noethertheorem besagt, dass es zu jeder infinitesimalen Transformation, die die Lagrange-Gleichung invariant lässt, eine zugehörige Erhaltungsgröße gibt.

Welche 10 Erhaltungsgrößen findet man für ein freies Teilchen bei Anwendung der Galilei-Transformationen?

- Impulserhaltung (3): $m\dot{\vec{r}}$
- Drehimpulserhaltung (3): $m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$
- Schwerpunktsbewegung (3): $\vec{r} = \dot{\vec{r}} \cdot t + \vec{r}_0$
- Energieerhaltung (1): $E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2$

Wie lautet der Satz von Steiner und was ist seine Bedeutung?

Der Satz von Steiner beschreibt die Berechnung des Trägheitstensors Θ' um einen beliebigen Punkt P ausgehend vom Trägheitstensor Θ um den Schwerpunkt S :

$$\Theta' = \Theta + M(\vec{a}^2 \mathbb{1} - \vec{a} \vec{a}^T) \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \vec{S}P$$

Gegeben ist die Lagrangefunktion

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, t) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - V(r)).$$

Welche Variablen sind zyklisch? Was sind die zugehörigen kanonischen Impulse?

Die Bedingung für zyklische Koordinaten q lautet, dass die Lagrangefunktion L nicht von ihnen abhängt: $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$. Damit lässt sich direkt an der Lagrangefunktion ablesen, dass nur φ zyklisch ist. Der zugehörige kanonische Impuls lautet: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$.

Oft hängt die Funktion $F(y, y')$ der EL-Gleichungen nicht explizit von x ab. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

s. Übungen

Was beschreibt der oder die Eulerwinkel? Wie viele gibt es?

Eulerwinkel beschreiben den Übergang von einem Koordinatensystem in ein dazu beliebig gedrehtes. Es gibt 3 verschiedene Eulerwinkel.

Eine mögliche Konvention ist:

- $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$: Drehung um die z -Achse: φ
- $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}''$: Drehung um die x' -Achse: ϑ
- $\vec{r}'' \rightarrow \vec{r}'''$: Drehung um die z'' -Achse: ψ

Was sind Zwangsbedingungen? Nennen Sie zwei verschiedene Arten mit zugehöriger Bedingung.
Welche Beziehung gilt für die Anzahl der Freiheitsgrade f eines Systems aus N Massenpunkten und N_Z Zwangsbed.?

Zwangsbedingungen beschreiben Einschränkungen der Bewegungsfreiheit des Systems. Mögliche Arten sind:

- holonom:
Zwangsbed. kann geschrieben werden als $A_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$
- nicht-holonom:
Zwangsbed. kann nicht durch o.a. Form ausgedrückt werden, z.B. geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingungen.
- skleronom:
 $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$
- rheonom:
 $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} \neq 0$

Was versteht man unter einer zyklischen Koordinate? Zeigen Sie, dass dies direkt auf eine Erhaltungsgröße führt.
Wie nennt man diese? Zeigen Sie, dass der zugehörige generalisierte Impuls erhalten ist.

Falls q_i eine zyklische Koordinate ist, ist L unabhängig von q_i , also $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.
Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= \text{const.} = p_i \end{aligned}$$

p_i bezeichnet den verallgemeinerten Impuls.

Wie verändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn die Lagrange-Funktion L mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert wird (mit Rechnung!)?

Wir definieren $L' = c \cdot L$. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = c \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right)$$

Da $c \neq 0$, muss der Ausdruck innerhalb der Klammer 0 sein, was die ursprüngliche Bewegungsgleichung für L ist. Die Bewegungsgleichungen bleiben somit unverändert.

Aufgabe:

Drücken Sie den Einheitsvektor in z -Richtung $\vec{e}_z$ in der Basis $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) aus.

Dabei spannen die $\vec{e}_i$ das Koordinatensystem auf, das durch eine Drehung um die Eulerwinkel aus dem Koordinatensystem aufgespannt durch $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ hervorgegangen ist. Geben Sie das Ergebnis in expliziter Form als Funktion der Drehwinkel an.

Drehen von $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^T$ um die Eulerwinkel liefert $\vec{e}_z$ in der Basis $\vec{e}_i$.

$$\begin{aligned}\vec{e}_z &= D_\psi D_\vartheta D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}\end{aligned}$$