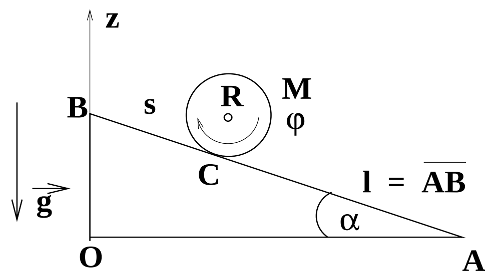

Probeaufgabe (ohne Hilfsmittel). Zeit 25 min.

Aufgabe: Rollender Zylinder auf einer schiefen Ebene 2 + 3 + 1 = 6 Pkte.

Es soll die Bewegungsgleichung eines auf einer schiefen Ebene (Steigung α, Länge $l = \overline{AB}$) im Einfluss des homogenen Erdschwerefeldes (g) rollenden (nicht gleitenden) homogenen Zylinders (Radius R, (Länge L), Masse M, Drehwinkel φ) gefunden werden. Die auf der schiefen Ebene zurückgelegte Strecke ist $s = \overline{BC}, s = s(t)$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:



a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders mit der Symmetrieachse als Drehachse .

b) Schreiben Sie die *Lagrange*-Funktion auf. Eliminieren Sie φ mit die Rollbedingung durch s und R. Welche Höhe h hat der Schwerpunkt von der Horizontalen $\overline{0A}$? Rechnen Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichung zum gefundenen $L = L(s, \dot{s})$ aus.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $s(t = 0) = s_0$ und $v(t = 0) = v_0$.

Probeaufgabe. Lösung

---

a) $\Theta = \Theta_3 = \iiint_V d^3x\, \rho(\vec{x})\, (\vec{x}^2 - x_3^2) = \rho \iiint_V d^3x\, (x_1^2 + x_2^2) = \frac{M}{\pi R^2 L} 2\pi \frac{1}{4} R^4 L = \frac{1}{2} M R^2$ (in Zylinderkoordinaten berechnet).

b) Nichtinertialsystem Lagrangefunktion: Kinetische Energie aus Translation des Schwerpunktes und Drehung. $T = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$. Abgerollte Strecke bei Winkeländerung um φ ist $s = R\varphi$. Damit $T = \frac{1}{2}(M + \frac{\Theta}{R^2})\dot{s}^2$. Potentielle Energie im Schwerefeld g: $U(s) = M g z = M g\,((l - s) \sin \alpha + R \cos \alpha)$, da Höhe $h = (l - s) \sin \alpha + R \cos \alpha$.

$$L = L(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}(M + \frac{\Theta}{R^2})\dot{s}^2 - M g\,((l - s) \sin \alpha + R \cos \alpha).$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$(M + \frac{\Theta}{R^2})\ddot{s} - M g \sin \alpha = 0.$$

c) $\ddot{s} = \frac{M R^2}{M R^2 + \Theta} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ (mit Θ von Teil **a)**).

$s(t) = \frac{1}{3} g \sin(\alpha)\, t^2 + v_0\, t + s_0$.
