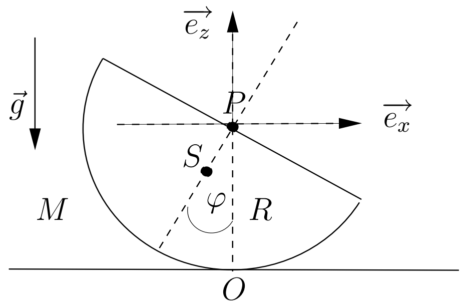
Probeaufgabe 2 (ohne Hilfsmittel). Zeit 40 min.

Aufgabe: Rollende Halbkugel **2 + 3 + 3 + 3 = 11 Pkte.**

Eine homogene Halbkugel (Radius R, Masse M), die auf einer horizontalen Ebene liegt, werde so angestoßen, dass sie im homogenen Erdschwerefeld (g) eine Schaukelbewegung ausführt, bei der der Mittelpunkt P (der ursprünglichen Kugel) sich nur in einer $(x, z)-$Ebene bewegt. Die Halbkugel rolle, ohne zu gleiten.



a) Berechnen Sie den Schwerpunkt S der Halbkugel. Was ergibt sich für $s := \overline{P\,S}$?

b) Berechnen Sie zunächst das Trägheitsmoment Θ der Halbkugel bezüglich einer Achse, die auf der Figurenachse (Symmetrieachse) senkrecht steht und durch den Kreismittelpunkt P geht. Bestimmen Sie danach das Trägheitsmoment Θ_S, welches zur Drehung um eine auf der $(x, z)-$Ebene senkrecht stehenden Achse durch den Schwerpunkt S gehört (siehe Skizze).

Hinweis: $\displaystyle\int d\varphi\,(\cos\,\varphi)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,(\varphi \,+\, \frac{1}{2}\,\sin(2\,\varphi))$.

c) Die *Lagrange*-Funktion $L = L(\varphi, \dot\varphi)$ dieser schaukelnden Halbkugel wird gesucht. Wo liegt und in welche Richtung zeigt die momentane Drehachse? Welcher Winkelgeschwindigkeitsbetrag ω gehört dazu? Wie groß ist die Entfernung $\overline{SO}$?
Hinweis: Als Vektor verändert sich $\vec{\omega}$ nicht bei Parallelverschiebung.

d) Nähern Sie $L(\varphi, \dot\varphi)$ für kleine Schwingungen φ, und bestimmen Sie die *Euler-Lagrange*-Gleichung. Wie groß ist die Kreisfrequenz?

Lösungsvorschlag

Man sollte sich erst klar machen, dass Schaukelbewegung wirklich möglich ist. Der Mittelpunkt P der die Halbkugel begrenzenden Kreisscheibe bewegt sich beim Schaukeln längs der $\pm x-$Richtung.

a) Zur Schwerpunktsberechnung betrachtet man eine homogene Halbkugel mit Figurenachse in $z-$Richtung. Der Schwerpunkt ist wegen Symmetrie um die Figurenachse sicher auf dieser Achse. Also $x_S = 0 = y_S$ und $z_S = \dfrac{1}{M}\displaystyle\iiint\limits_V d^3x\,\rho(\vec{r})z =$
$\dfrac{\rho}{M}\displaystyle\int_0^R dr\,r^2\,2\,\pi \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\;(\sin\,\theta)\,r\,\cos\,\theta \;=\; \frac{2\pi\,\rho}{M}\frac{1}{4}R^4 \int_{-1}^{0} du\,u \;=\; \frac{2\pi\,M\,R^4}{M\,(2/3)\pi R^3}\frac{1}{4}\,\frac{-1}{2} \;=$
$-\dfrac{3}{8}\,R$. Also $\mathbf{s} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}\,\mathbf{R}$. Die verwendete Substitution ist $du = cos\,\theta$, $du = -sin\,\theta\,d\theta$.

b) Halbkugel mit Figurenachse in $z-$Richtung und Drehachse durch P und z.B. in Rtg. $y-$Achse (in die Bildebene hinein). $\Theta_{yy} = \displaystyle\iiint\limits_V d^3x\,\rho(\vec{r})\,(x^2 \,+\, z^2) \;=$

Fortsetzung auf der Rückseite bzw. Seite 2

(mit Polarkoordinaten und $u := \cos\theta$)

$= \dfrac{M}{V}\displaystyle\int_0^R dr\, r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^0 du\, r^2\, ((1-u^2)\,(\cos\varphi)^2 + u^2) =$

$\dfrac{M}{(2/3)\,\pi\, R^3}\,\dfrac{R^5}{5}\left((\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin(2x))\Big|_0^{2\pi}\;(u - \dfrac{u^3}{3})\Big|_{-1}^0 + 2\pi\,\dfrac{u^3}{3}\Big|_{-1}^0 \right) =$

$\dfrac{3\,M\,R^2}{10\,\pi}\left(\pi\,(1-\dfrac{1}{3}) + 2\pi\,\dfrac{1}{3}\right) = \mathbf{\Theta_{yy} = \dfrac{2}{5}\,M\,R^2}$. Vergleich mit Kugelträgheitsmoment bezüglich Achse durch ihren Mittelpunkt und Masse $2\,M$: $\Theta_{Kugel} = \frac{4}{5}\,M\,R^2$. Also gerade das halbe Trägheitsmoment der Kugel aus der die Halbkugel durch Halbieren entstand.

Trägheitsmoment bezüglich Achse in Richtung $y-$Achse durch den Schwerpunkt S via Satz von *Steiner*: $\Theta_S = \Theta_{yy} - \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 M\,R^2 = \mathbf{\dfrac{83}{320}\,M\,R^2}$.

c) Die momentane Drehachse liegt in der Ebene, auf der die Halbkugel rollt und deutet senkrecht zur Zeichenebene, also in $\pm y-$Richtung, je nach Schaukelbewegung in bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn, in positive $y-$Richtung (in die Zeichenebene hinein). (Vergleichen Sie die Übung mit dem rollenden Kreiskegel von **Blatt 11. Aufgabe 2**). In diese wechselnde Richtung zeigt also $\vec{\omega}$.

Für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit erhält man $\omega = \dot{\varphi}$, da die Drehung mit φ geschieht. Der Betrag der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S bezüglich der momentanen Drehachse ergibt sich als $r\,\omega$ mit dem Lot r des Schwerpunktes S auf die momentane Drehachse, also aus $r := \overline{SO}$. $v_S = r\,\dot{\varphi}$.

Die kinetische Energie ist $T = \dfrac{1}{2}\,M\,v_s^2 + \dfrac{1}{2}\,\Theta_S\,\dot{\varphi}^2 == \dfrac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,(M\,r^2 + \Theta_S)$. Kosinussatz für das Lot r: $r^2 = s^2 + R^2 - 2\,s\,R\,\cos\varphi = \dfrac{R^2}{64}\,(73 - 48\,\cos\varphi)$.

Zusammen mit Teil **b)** Resultat für Θ_S: $T = \dfrac{1}{2}\,M\,R^2\,\dot{\varphi}^2\left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{4}\cos\varphi\right)$.

Man kann T auch direkt als reine Rotation um die momentane Drehachse durch O nehmen und das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse verwenden.

Potentielle Energie: $\vec{F} = -M\,g\,\vec{e_z} = -\dfrac{\partial}{\partial z}U$. $U = M\,g\,z$. $U(\varphi) = -M\,g\,s\,\cos\varphi$ (Potentialnullpunkt ($z = 0$) in Höhe R über der Ebene).

$L = L(\varphi,\dot{\varphi}) = T(\dot{\varphi}) - U(\varphi) = \dfrac{1}{2}\,M\,R^2\left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{4}\cos\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + M\,g\,s\,\cos\varphi$.

d) Näherung für $|\varphi| \ll 1$ mit $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots$.

$$\mathbf{L_N(\boldsymbol{\varphi},\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\frac{13}{20}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}}^2 + M\,g\,s\,(1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^2)} \qquad .$$

Euler-Lagrange-Gleichung: $M\,R^2\,\dfrac{13}{20}\,\ddot{\varphi} + M\,g\,s\,\varphi = 0$.

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\Omega}^2\,\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}\text{, mit der Kreisfrequenz } \boldsymbol{\Omega} = \sqrt{\mathbf{\frac{15}{26}\frac{g}{R}}} \;.$$