Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Zwischenklausur SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman

Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

16.06.2010

Arbeitszeit: 120 Minuten

---

1. Quickies (13 Punkte)

Beantworten sie die folgenden Fragen so kurz wie möglich

(a) Was versteht man unter einer Zwangsbedingung? Wie erhält man die entsprechende Zwangskraft daraus? (1 Punkt)

(b) Gegeben sei eine Lagrangefunktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ mit $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_f)$. Schreiben sie die Euler-Lagrange Gleichungen auf. (1 Punkt)

(c) Wie lässt sich die Energie durch die Lagrange-Funktion aus (b) ausdrücken? (1 Punkt)

(d) Wie leitet sich aus der Lagrangefunktion aus (b) die Hamiltonfunktion ab? (1 Punkt)

(e) Schreiben sie die Hamilton-Gleichungen auf. (1 Punkt)

(f) Wie ist die Wirkung definiert? Was besagt das Prinzip der kleinsten Wirkung? (1 Punkt)

(g) Wie lautet die Lagrange-Funktion für einen freien Massepunkt der Masse m in kartesischen Koordinaten ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)? Bestimmen sie die Bewegungsgleichung. (1 Punkt)

(h) Das Koordinatensystem aus (g) sei mit K bezeichnet. Finden sie nun die Lagrange-Funktion des Massepunktes aus (g) in einem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ dazu relativ bewegten Koordinatensystem K' (Koordinaten $\vec{x}' = (x', y', z')^T$, zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen beide Koordinatensysteme zusammenfallen). Wie lautet die entsprechende Bewegungsgleichung in K'? (2 Punkte)

(i) Wie lautet die Hamilton-Funktion für einen freien Massepunkt der Masse m in kartesischen Koordinaten? Begründen sie mithilfe der Poisson-Klammern, dass der Impuls $\vec{p}$ erhalten ist. (2 Punkte)

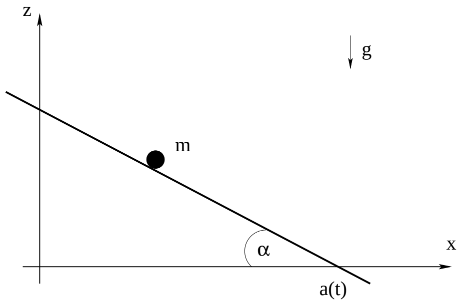
(j) Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\right) - U(x, y)\,.$$

Finden sie die zugehörige Hamilton-Funktion H. (2 Punkte)

2. Lagrange-Formalismus 1. Art - Beschleunigte schiefe Ebene (5 Punkte)

Betrachten sie einen Massepunkt der Masse m, welcher sich auf einer schiefen Ebene befindet. Im folgenden beschränken wir uns auf ein zweidimensionales Problem indem wir nur den Schnitt mit der $x - z$ Ebene betrachten (die schiefe Ebene habe einen *konstanten* Neigungswinkel α gegenüber der Horizontalen). Die schiefe Ebene werde in positive x-Richtung mit konstanter Beschleunigung β beschleunigt, d.h. $a(t) = \frac{\beta}{2}t^2$ (siehe Abbildung).



(a) Finden sie die zugehörige Zwangsbedingung $F(x, z, t)$. (1 Punkt)

(b) Schreiben sie die zugehörigen Lagrangegleichungen 1. Art auf. (1 Punkt)

(c) Extrahieren sie aus diesen Gleichungen den Wert für $\beta = \beta(\alpha)$, so dass der Massepunkt auf der schiefen Ebene in Ruhe bleibt? (3 Punkte)
Hinweis: Was muss für $\ddot{z}(t)$ in diesem Fall gelten?

3. Lagrange-Formalismus 2. Art - Sphärischer Oszillator (9 Punkte)

Betrachten sie einen sphärischen Oszillator, d.h. ein Teilchen der Masse m in drei Raumdimensionen in einem Potential

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \qquad \text{mit} \quad r = |\vec{r}|$$

(a) Schreiben sie die zugehörige Lagrangefunktion in kartesischen und in Kugelkoordinaten auf. (2 Punkte)

(b) Begründen sie, dass die Energie in diesem Problem erhalten ist. Welche der folgenden beiden Größen sind in diesem Problem ebenfalls erhalten: (i) Impuls, (ii) Drehimpuls? Begründen sie Ihre Antwort jeweils (keine lange Rechnungen erforderlich). (3 Punkte)

(c) Benutzen sie nun eine der Erhaltungsgrößen (nicht die Energie) um die Dimensionalität (d.h. die Anzahl der Freiheitsgrade) der Lagrangefunktion zu reduzieren. Finden sie dann die Euler-Lagrange Gleichungen in kartesischen Koordinaten und geben sie deren allgemeine Lösung an. Was für eine Trajektorie beschreibt der Massepunkt im allgemeinen? (4 Punkte)

4. Hamilton-Formalismus - Kepler-Problem (8 Punkte)

Betrachten sie die Lagrange-Funktion des Keplerproblems

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \gamma\frac{m_1 m_2}{r}\,.$$

(a) Geben sie die entsprechende Hamiltonfunktion zu diesem Problem an. (1 Punkt)

(b) Schreiben sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf. (1 Punkt)

(c) Geben sie nun die Lösung dieser Bewegungsgleichungen an, bei welcher die Trajektorie einen Kreis darstellt. (2 Punkte)

(d) Finden sie damit eine Relation zwischen dem Radius des Orbits R und der Umlaufdauer T. Schätzen sie die Umlaufdauer T für Erde und Mond mit den Werten $m_{\text{Mond}} \approx 7 \cdot 10^{22} kg$, $m_{\text{Erde}} \approx 6 \cdot 10^{24} kg$, $R \approx 400000 km$ und $\gamma \approx 7 \cdot 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$ grob ab. (4 Punkte)