Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie
der Kondensierten Materie

Theoretische Physik B - Zwischenklausur, Lösungen SS 10

Prof. Dr. Alexander Shnirman
Dr. Boris Narozhny, Dr. Holger Schmidt

LK
16.06.2010

---

1. Quickies (13 Punkte)

(a) Als Zwangsbedingung wird in der klassischen Mechanik eine Einschränkung der Bewegungsfreiheit eines Massenpunktes bezeichnet.

Holonome Zwangsbedingungen können als Gleichungen zwischen den Koordinaten x_i des Systems formuliert werden (s holonome Zwangsbedingungen):

$$f_l(x_1, x_2, ..., x_{3N}, t) = 0, \quad l = 1, ..., s.$$

Die Zwangskräfte ergeben sich damit zu

$$Z_n = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l(t) \frac{\partial f_l(x_1, ..., x_n, ..., x_{3N}, t)}{\partial x_n}$$

(b) Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten für $i = 1, \ldots, f$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

(c) Die Energie ist gegeben durch

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

(d) Die Hamilton-Funktion lautet

$$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(p_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i(p_i, t), t),$$

wobei die $\dot{q}_i$ Funktionen von den kanonischen Impulsen sind.

(e) Die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

(f) Die Wirkung ist gegeben durch

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt.$$

Das Hamiltonsche Prinzip oder das Prinzip der kleinsten Wirkung ist ein Extremalprinzip und besagt, dass sich die physikalischen Teilchen stets so verhalten, dass eine

Größe - eben die Wirkung S, welche die Teilchenbahnen bewertet, kleiner ist als bei allen anderen denkbaren Teilchenbahnen. Genauer gesehen erweist sich in vielen Fällen die Wirkung nicht als minimal, sondern nur als stationär. In Formeln

$$\delta S = 0\,.$$

(g) Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\,.$$

Das führt auf die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\vec{x}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0.$$

(h) Die Galilei0-Transformation zwischen den Koordinatensystemen K und K' führt auf

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}} - \vec{v}$$
$$L' = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{x}}^2 - 2\dot{\vec{x}}\vec{v} + \vec{v}^2\right),$$

oder

$$L' = L + \frac{d}{dt}\frac{m}{2}\left(2\vec{x}\vec{v} + v^2 t\right)\,.$$

Da der zweite Term eine totale zeitliche Ableitung ist, kann er weggelassen werden. Somit ist die Lagrange-Funktion invariant unter einer Galilei-Transformation. Die entsprechende Bewegungsgleichung in K' lautet

$$\ddot{\vec{x}}' = 0.$$

(i)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right)\,.$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \{H, \vec{p}\} = 0.$$

(j)

$$p_x = m\dot{x} + m\dot{y}, \quad p_y = 2m\dot{y} + m\dot{x},$$
$$\dot{x} = \frac{1}{m}\left(2p_x - p_y\right), \quad \dot{y} = \frac{1}{m}\left(p_y - p_x\right)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(2p_x^2 - 2p_x p_y + p_y^2\right) + U(x,y).$$

2. Lagrange-Formalismus 1. Art - Beschleunigte schiefe Ebene (5 Punkte)

(a) Es muss gelten

$$\frac{z}{a(t) - x} = \tan\alpha$$

und damit lautet die Zwangsbedingung

$$F(x,z,t) = z\cos\alpha - (a(t) - x)\sin\alpha = 0\,.$$

Da später benötigt wird die zweifache zeitliche Ableitung angegeben

$$\ddot{z}(t)\cos\alpha - (\beta - \ddot{x})\sin\alpha = 0$$

(b) Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{\vec{x}} = -mg\vec{e}_z + \lambda\nabla g$$

bzw. komponentenweise

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \sin\alpha \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda\cos\alpha\,. \end{aligned}$$

Dies wird ergänzt durch die Bedingung $F(x, z, t) = 0$.

(c) Elimination von λ ergibt

$$\ddot{x}\cos\alpha - \ddot{z}\sin\alpha = g\sin\alpha \qquad (1)$$

Damit der Massepunkt in Ruhe bleibt muss $\ddot{z} = 0$ gelten (er darf also keine Beschleunigung erfahren). Aus der zweifach zeitlich abgeleiteten Zwangsbedingung erhält man daraus die Bedingung

$$(\beta - \ddot{x})\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \ddot{x}\,.$$

Einsetzen dieser Bedingung in Gl. (1) liefert das gewünschte Ergebnis

$$\beta(\alpha) = g\tan\alpha.$$

3. Lagrange-Formalismus 2. Art - Sphärischer Oszillator (8 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned} L(x,y,z) &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2+y^2+z^2\right), \\ L(r,\theta,\phi) &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{m}{2}\omega^2 r^2. \end{aligned}$$

(b) Die Energie ist erhalten, da die Lagrangefunktion, i.b. das Potential U nicht explizit von der Zeit abhängen

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = const.$$

Der Impuls ist *nicht* erhalten, da das Problem nicht translationsinvariant ist. Dies sieht man auch mittels

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} \neq const,$$

das U eine Funktion von $\vec{r}$ ist.

Der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = const,$$

ist erhalten, da $U(\vec{r})$ eine Zentralfeld ist (zugehörige Zentralkraft $\vec{F} = -\nabla U = -m\omega^2\vec{r}$).

(c) Weil $\vec{L}$ erhalten ist, bewegt sich das Teilchen in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}$. Wählt man die z-Richtung in Richtung von M, so liegt $\vec{x}$ immer in der xy-Ebene, ebenso wie $\dot{\vec{x}}$. Damit lautet die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right),$$

was auf folgende Bewegungsgleichungen führt

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Deren allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \quad y = b\cos(\omega t + \beta)$$

mit vier Konstanten a, α, b, β. Im allgemeinen ist die Bahnkurve also eine Ellipse.

4. Hamilton-Formalismus - Kepler-Problem (9 Punkte)

(a) Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \gamma\frac{m_1 m_2}{r}.$$

(b) Die kanonischen Gleichungen führen auf

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = +\frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

(c) Zuerst einmal ist p_ϕ zeitlich konstant und somit auch $\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T}$ und es gilt

$$p_\phi = mr^2\frac{2\pi}{T}$$

Auf einer Kreisbahn ist $r(t) = r$ zeitlich konstant und folglich gilt $\dot{r} = 0$. Damit ist auch $p_r = 0$, was $\dot{p}_r = 0$ impliziert. Damit hat man

$$\frac{p_\varphi^2}{mr^3} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

woraus

$$p_\varphi^2 = \gamma m m_1 m_2 r, \quad r = const.$$

folgt.

(d) Einsetzen von p_ϕ von oben ergibt schließlich die gewünschte Beziehung

$$T^2 = R^3(2\pi)^2\frac{m}{\gamma m_1 m_2} = R^3(2\pi)^2\frac{1}{\gamma(m_1+m_2)},$$

was für Erde und Mond für T ungefähr einen Monat ergibt.