Lösungen zur Probeklausur

Aufgabe 1

a) Zyklische Variablen sind Variablen, die nicht in der Lagrangefunktion vorkommen. Nur ihre Ableitungen treten auf. Damit folgt aufgrund der Euler-Lagrange-Gleichung 1 P

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L - \frac{\partial}{\partial q}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p\,.$$

Damit ist der generalisierte Impuls $p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}L$ erhalten. 1 P

b) Die gesuchte Größe ist 1 P

$$Z(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t)\,.$$

Beweis: 1 P

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(q,\dot{q},t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t)\right) =$$

$$\dot{q}\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) + \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t) - \ddot{q}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,\dot{q},t) = (mit E-L-G)$$

$$\dot{q}\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) - \dot{q}\frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) = 0$$

c) Betrachte Variation des Wirkungsfunktionals $S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\mathrm{d}t'$.
Prinzip der kleinsten Wirkung: $\delta S = 0$.
Variation der Bahnkurve $q(t) \to q(t) + \epsilon\delta(t)$ 2 P

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[q(t)+\epsilon\delta(t)] - S[q(t)] \\
&= \int_{t_0}^{t_1} L(q(t')+\epsilon\delta(t),\dot{q}(t')+\epsilon\dot{\delta}(t),t')\mathrm{d}t' - \int_{t_0}^{t_1} L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\mathrm{d}t' \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(q(t'),\dot{q}(t'),t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}L(q(t')+\epsilon\delta(t),\dot{q}(t')+\epsilon\dot{\delta}(t),t')|_{\epsilon=0}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]\mathrm{d}t' \\
&- \int_{t_0}^{t_1} L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\mathrm{d}t' \\
&= \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta(t)\frac{\partial}{\partial q(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t') + \dot{\delta}(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\right]\mathrm{d}t' \\
&= \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial}{\partial q(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t') - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\right]\delta(t)\mathrm{d}t' \\
&+ \epsilon\left[\delta(t)\frac{\partial}{\partial \dot{q}(t')}L(q(t'),\dot{q}(t'),t')\right]_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet da die Endpunkte der Bahn fest liegen und nicht variiert werden. Da die Variation $\delta(t)$ beliebig ist, muss der Term in eckigen Klammern unter dem Integral verschwinden. Dies entspricht der Euler-Lagrange-Gleichung.

d) kinetische Energie T in Kugelkoordinaten

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) \quad \text{oder} \quad \cos^2(\theta)$$

also ist die gesamte Lagrangefunktion 1 P

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) - \frac{Mg}{r}$$

Zyklische Variable ist also ϕ und dir zugehörige Erhaltungsgröße der Drehimpuls. 1 P

e) Die einzige offensichtliche Symmetrietransformation ist eine Rotation um den x_1-Achse. Die infinitesimale Variablentransformation ist 1 P

$$x_2 \rightarrow x_2^* = x_2 - \epsilon x_3\,, \quad x_2 \rightarrow x_3^* = x_3 + \epsilon x_2$$

Das Noether-Theorem hat hier die Form 1 P

$$J = x_2\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}L - x_1\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}L(x_1 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = (x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2)\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q,p)$$

Aufgabe 2

a)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr = \frac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - mgr$$

1 P

b)

$$r: \qquad 2m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + mg = 0 \qquad (1)$$

$$\varphi: \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mr^2\dot{\varphi} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 0 \qquad (2)$$

2 P

c) Es gibt eine zyklische Variable

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mr^2\dot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad mr^2\dot{\varphi} = L = konstant$$

Ersetze $\dot{\varphi}$ in Gl. (1) durch L, man erhält 1 P

$$2m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + mg = 0$$

Multipliziere mit $\dot{r}$ und man erhält eine totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + mgr\right) = 0$$

Damit ergibt sich eine DGL erster Ordnung 1 P

$$m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + mgr = E$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{r} = \sqrt{E/m - \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r^2} - gr}$$

$$\Rightarrow \qquad t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r' \left(\frac{E}{m} - \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r'^2} - gr'\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d) Gleichgewichtslage $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$ in Gl. (1) 1 P

$$-\frac{L^2}{mr^3} + mg = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \left(\frac{L^2}{m^2g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Entwickeln von Gl. (1) um die Gleichgewichtslage 1 P

$$0 = \ddot{r} - \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r^3} + \frac{g}{2} \approx \ddot{r} - \frac{1}{2}\frac{L^2}{m^2r_0^3} + (r - r_0)\frac{3}{2}\frac{L^2}{m^2(r_0)^4} + \frac{g}{2} + \mathcal{O}\left((r-r_0)^2\right)$$

$$= \ddot{r} + (r - r_0)\frac{3}{2}\frac{L^2}{m^2(r_0)^4} + \mathcal{O}\left((r-r_0)^2\right)$$

mit $r = x + r_0$ erhält man einen harmonischen Oszillator 1 P

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

mit Frequenz

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{L^2}{m^2 (r_0)^4}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$r(t) = r_0 + A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Aufgabe 3

a) kinetische Energie in Kugelkoordinaten 1 P

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

also für festes θ 1 P

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgr\cos\theta$$

b) Bewgungsgleichungen: 2 P

$$r: \qquad m\ddot{r} - mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mg\cos\theta = 0$$

$$\phi: \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 2r\dot{r}\sin^2\theta\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\ddot{\phi} = 0$$

zyklische Variable ϕ

c) Virialsatz: 1 P

$$2\langle T\rangle = k\langle U\rangle$$

Potential ist eine homogene Funktion vom Grad 1, also

$$2\langle T\rangle = \langle U\rangle$$

d) mechanische Ähnlichkeit:

$$\frac{t}{t'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^{1-k/2}\Big|_{k=1}$$

Potential ist eine homogene Funktion vom Grad 1, also 1 P

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{r}{r'}}$$

Aufgabe 4

a) Lagrangefunktion 1 P

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - \frac{1}{2}k_1 r^2 - \frac{1}{4}k_2 r^4$$

Bewegungsgleichungen: 1 P

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r + k_1 r + k_2 r^3 = 0 \tag{3}$$

b) mögliche Gleichgewichtslagen 1 P

$$r = 0\,, \quad r^2 = \frac{m\omega^2 - k_1}{k_2}$$

(i) $r_0 = 0$ entwickle (3) 1 P

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r + k_1 r = 0$$

Gleichgewichtslage, falls $k_1 > m\omega^2$, harmonischer Oszillator mit Frequenz $\omega'^2 = \frac{k_1 - m\omega^2}{m}$

(ii) $r_0 = \sqrt{\frac{m\omega^2 - k_1}{k_2}}$ nur möglich, falls $k_1 < m\omega^2$: entwickle (3) 1 P

$$\begin{aligned}
& m(\ddot{r}_0 + \ddot{x}) - (m\omega^2 - k_1)(r_0 + x) + k_2(r_0 + x)^3 = 0 \\
\Rightarrow \quad & m\ddot{x} - (m\omega^2 - k_1)x + 3k_2 r_0^2 x = 0 \\
\Rightarrow \quad & m\ddot{x} + 2(m\omega^2 - k_1)x = 0
\end{aligned}$$

harmonischer Oszillator mit Frequenz $\omega'^2 = 2(m\omega^2 - k_1)$ 1 P