Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Theoretische Teilchenphysik
Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Fedele, M. Egner

Klassische Theoretische Physik II

Lösungen Probeklausur

Sommersemester 2022

Aufgabe P1: Panorama

In dieser Aufgabe geht es um allgemeines Physik-Verständnis, es sind nur wenige Rechenschritte nötig. L bezeichnet eine Lagrangefunktion mit geschwindigkeitsunabhängigem Potential, x_j, $j = 1, 2, 3$ sind kartesische Koordinaten.

(a) Die Lagrangefunktion eines Systems aus N Massenpunkten mit Massen m_k und Ortsvektoren $\vec{r}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_3^{(k)}, x_3^{(k)})^T$ sei invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$x_1^{(k)} \to x_1^{(k)} - \epsilon x_2^{(k)}, \quad x_2^{(k)} \to x_2^{(k)} + \epsilon x_1^{(k)}, \quad x_3^{(k)} \to x_3^{(k)}, \quad t \to t.$$

(i) Berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße.
(ii)Welche physikalische Bedeutung hat sie?

(5 Punkte)

(b) Betrachten Sie $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r)$ und geben Sie die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten r und ϕ (ebene Polarkoordinaten) an.

(5 Punkte)

(c) (i) Welche Koordinate(n) in Teilaufgabe (b) ist/sind zyklisch?
(ii) Welche Erhaltungsgröße(n) gehört/gehören dazu?

(5 Punkte)

(d) Ein kräftefreier starrer Körper (z.B. ein Satellit) mit Trägheitstensor

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{22} & \theta_{23} \\ 0 & \theta_{23} & \theta_{22} \end{pmatrix}$$

rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Drehimpuls $\vec{L} = (0, 0, L_3)^T$, wobei $\theta_{23} < \theta_{22}$.
(i) Drücken Sie $\vec{\omega}$ durch L_3 und θ_{jk} aus.
(ii) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente.
(iii) Ist für $\theta_{11} = \theta_{22}$ und $\theta_{23} \neq 0$ die Drehung um die x-Achse stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

(5 Punkte)

Lösung (a)

i) Die Lagrangefunktion hat die Form

$$L = \sum_k \frac{m_k}{2} \dot{\vec{r}}^{(k)2} + V(\vec{r}^{(k)}). \tag{1}$$

Die Erhaltungsgrösse nach dem Noethertheorem ist

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(k)}} \psi_i^{(k)} = \sum_k m_k \sum_i \dot{x}_i^{(k)} \psi_i^{(k)} . \tag{2}$$

Mit

$$\psi_i^{(k)} = \begin{pmatrix} -x_2^{(k)} \\ x_1^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

schliesslich

$$Q = \sum_k m_k \left[-\dot{x}_1^{(k)} x_2^{(k)} + \dot{x}_2^{(k)} x_1^{(k)} \right] \tag{4}$$

ii) Die erhaltene Grösse Q_k ist die z-Komponente des Gesamtdrehimpulses, denn

$$L_z = \sum_k (\vec{r}^{(k)} \times \vec{p}^{(k)})|_z = \sum_k m_k \det \begin{pmatrix} x_1^{(k)} & \dot{x}_1^{(k)} & \vec{e}_x \\ x_2^{(k)} & \dot{x}_2^{(k)} & \vec{e}_y \\ x_3^{(k)} & \dot{x}_3^{(k)} & \vec{e}_z \end{pmatrix} |_z = Q \tag{5}$$

Lösung (b)

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \, , \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2 \dot{\phi} \right) = 0 \, . \tag{7}$$

Lösung (c)

i) Die Koordinate ϕ ist zyklisch, da L nur von $\dot{\phi}$ abhängt.
ii) Deshalb ist der konjugierte Impuls $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$ erhalten, in der Tat ist dies die Bewegungsgleichung für ϕ, Gleichung (7)

Lösung (d)

i) Wir müssen das folgende Gleichungssytem nach ω_i lösen:

$$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega} \, , \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{11}\omega_1 \\ \Theta_{22}\omega_2 + \Theta_{23}\omega_3 \\ \Theta_{23}\omega_2 + \Theta_{22}\omega_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Die Lösung ist

$$\omega_1 = 0 \, , \qquad \omega_2 = -\frac{\Theta_{23} L_3}{\Theta_{22}^2 - \Theta_{23}^2} \, , \qquad \omega_3 = \frac{\Theta_{22} L_3}{\Theta_{22}^2 - \Theta_{23}^2} \, , \tag{9}$$

ii) Die Eigenwerte von Θ sind Θ_{11} und

$$\Theta_{\pm} = \Theta_{22} \pm \sqrt{\Theta_{22}^2 - \left(\Theta_{22}^2 - \Theta_{23}^2\right)} = \Theta_{22} \pm \Theta_{23} \tag{10}$$

ii) Für $\Theta_{11} = \Theta_{22}$ ist die Drehung um die x-Achse (die eine Hauptträgheitsachse ist) **nicht** stabil, da das zugehörige Hauptträgheitsmoment Θ_{22} immer zwischen $\Theta_{22} \pm \Theta_{23}$ liegt, aber nur Drehungen um Haupträgheitsachsen mit dem grössten oder kleinsten Hauptträgheitsmoment stabil sind.

Aufgabe P2: Galilei-Transformation

Betrachten Sie ein System aus N Massenpunkten mit Lagrangefunktion

$$L(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{2} \dot{\vec{r}}_k{}^2 - \sum_{j \neq l} V(\vec{r}_j - \vec{r}_l). \tag{11}$$

(a) Berechnen Sie, wie sich L unter einer infinitesimalen Transformation

$$\vec{r}_k \to \vec{r}_k{}' = \vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t \qquad \text{für} \quad k = 1, \dots N, \qquad\qquad t \to t' = t$$

transformiert, wobei $\vec{w}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist. Drücken Sie $\frac{d}{d\epsilon} L(\vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t, \dot{\vec{r}} + \epsilon \vec{w})|_{\epsilon=0}$ durch die Gesamtmasse $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k$ aus.

(8 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die drei erhaltenen Noether-Ladungen zur Transformation in Gl. (11) für die Fälle $\vec{w} = \vec{e}_j$, $j = 1, 2, 3$, und fassen Sie sie zu einer vektoriellen Erhaltungsgröße zusammen. Drücken Sie das Ergebnis durch M, $\vec{r}_S$ und den Gesamtimpuls P der N Teilchen aus.

(10 Punkte)

(c) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe b), um die Schwerpunktsbewegung $\vec{r}_S(t)$ zu berechnen. Eliminieren Sie die Noether-Ladung zugunsten von $\vec{r}_S(0)$.

(2 Punkte)

Lösung (a)

Das Potential V ist offensichtlich invariant, wegen $\dot{\vec{r}}_k \to \dot{\vec{r}}_k + \epsilon \vec{w}$ transformiert sich der kinetische Term wie

$$\dot{\vec{r}}_k^2 \to \dot{\vec{r}}_k^2 + 2\epsilon \dot{\vec{r}}_k \vec{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{12}$$

und deshalb

$$L \to L + \sum_k m_k \epsilon \dot{\vec{r}}_k \vec{w} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,, \tag{13}$$

also

$$\frac{d}{d\epsilon} L(\vec{r}_k + \epsilon \vec{w} t, \dot{\vec{r}} + \epsilon \vec{w})|_{\epsilon=0} = \sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \vec{w} = M \dot{\vec{r}}_S \cdot \vec{w} = \frac{d}{dt}\left(M \vec{r}_S \cdot \vec{w}\right)\,, \tag{14}$$

Lösung (b)

Mit $\vec{r}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})^\intercal$ und $\vec{\omega} = \vec{e}_j$ lässt sich die Transformation schreiben als

$$x_i^{(k)} \to x_i^{(k)} + \epsilon\delta_{ij}t. \tag{15}$$

Die erhaltene Noetherladung ist

$$Q = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i^{(k)}} \psi_i^{(k)} - F. \tag{16}$$

mit

$$\psi_i^{(k)} = \delta_{ij}t\,, \qquad F = M\vec{r}_S \cdot \vec{w}\,. \tag{17}$$

Einsetzen liefert dann

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} m_k \dot{x}_i^{(k)} \psi_i^{(k)} - M\vec{r}_S \cdot \vec{e}_j && (18)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{3} m_k \dot{x}_i^{(k)} \delta_{ij}t - M\vec{r}_S \cdot \vec{e}_j && (19)\\ &= \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{e}_j t - M\vec{r}_S \cdot \vec{e}_j = \vec{P}\cdot\vec{e}_j t - M\vec{r}_S \cdot \vec{e}_j\,. && (20) \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes der drei $\vec{e}_j$, also ist der gesamte Vektor $\vec{Q}$ erhalten:

$$\vec{Q} = \vec{P}t - M\vec{r}_S\,. \tag{21}$$

Lösung (c)

Wir haben mit $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_S$

$$M\dot{\vec{r}}_S t = \vec{Q} + M\vec{r}_S(t) = M\left(\vec{r}_S(t) - \vec{r}_S(0)\right)\,, \tag{22}$$

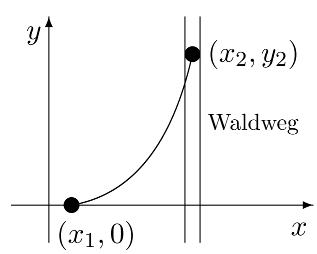
wobei wir $\vec{Q} = \vec{Q}(0) = -M\vec{r}_S(0)$ benutzt haben. Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\vec{r}_S(t) = \dot{\vec{r}}_S(0)t + \vec{r}_S(0)\,, \tag{23}$$

also bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig.

Aufgabe P3: Schlümpfe auf der Flucht

Vor Gargamel flüchtende Schlümpfe durchqueren eine sumpfige (x,y)-Ebene, um einen parallel zur y-Achse verlaufenden geraden Waldweg zu erreichen. Die Geschwindigkeit $v = v(x)$, mit der sie laufen können, hängt von x, aber nicht von y ab. Die Schlümpfe befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $(x_1, 0)$ und möchten in möglichst kurzer Zeit T ihr Fluchtfahrzeug bei (x_2, y_2) erreichen. Dabei ist $x_2 > x_1 > 0$ und $y_2 > 0$.



(a) Formulieren Sie das Variationsproblem um den Weg $y(x)$, der die Zeit T minimiert, zu finden. Benutzen Sie dazu $dt = \frac{ds}{v(x)}$ mit dem Wegelement $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ und bestimmen Sie die Funktion $F(y'(x), y(x), x)$ in

$$T = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y'(x), y(x), x) \tag{24}$$

(5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass im vorliegenden Fall die Lösung des Variationsproblems durch

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \tag{25}$$

mit einer Integrationskonstanten c gegeben ist. Lösen Sie Gl. (25) nach $y'(x)$ auf, um $y'(x)$ durch $v(x)$ und c auszudrücken. Betrachten Sie nur Lösungen mit $y'(x) > 0$.

(5 Punkte)

(c) Betrachten Sie ab jetzt den Spezialfall $v(x) = \frac{x}{a}$ mit $a > 0$. Drücken Sie die Zeit T in Gl. (24) durch x_1, x_2 und a/c aus und stellen Sie sicher, dass die Argumente der Logarithmen dimensionslos sind.

Hinweis: $\int dz \frac{1}{z\sqrt{1-c^2z^2}} = \ln z - \ln(1+\sqrt{1-c^2z^2})$

(5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie $y(x)$. Eliminieren Sie die Integrationskonstante, die Sie in diesem Schritt finden, mit Hilfe der Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$. Drücken Sie danach c durch a, x_1, x_2 und y_2 aus.

Hinweis: Man spart etwas Rechenarbeit, wenn man zunächst c zugunsten von $w \equiv \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - x_1^2}$ eliminiert und w durch x_1, x_2 und y_2 ausdrückt.

(5 Punkte)

Lösung (a)

Für die Gesamtzeit T gilt

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x)}\,, \tag{26}$$

also

$$F(y'(x), y(x), x) = F(y'(x), x) = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x)}\,. \tag{27}$$

Lösung (b)

Allgemein gilt für die Lösung des Variationsproblems

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,, \tag{28}$$

also hier da F nicht explizit von y abhängt

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0\,, \tag{29}$$

und deshab

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c\,, \tag{30}$$

mit eine Konstanten c. Wir haben explizit

$$c = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}\,, \tag{31}$$

also aufgelöst

$$y'^2 = \frac{c^2v^2}{1-c^2v^2}\,, \qquad\qquad y' = \frac{cv}{\sqrt{1-c^2v^2}}\,. \tag{32}$$

Lösung (c)

Wir haben

$$T = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{v(x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v\sqrt{1-c^2v^2}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x/a\sqrt{1-x^2c^2/a^2}} \tag{33}$$

Mit der Variablensubstitution $z = x/a, dz = dx/a$ ist

$$\begin{aligned} T &= a\int_{x_1/a}^{x_2/a} \frac{dz}{z\sqrt{1-c^2z^2}} \\ &= a\left[\ln\frac{x_2}{a} - \ln\frac{x_1}{a} - \ln\left(1+\sqrt{1-x_2^2c^2/a^2}\right) + \ln\left(1+\sqrt{1-x_1^2c^2/a^2}\right)\right] \\ &= a\left[\ln\frac{x_2}{x_1} - \ln\frac{1+\sqrt{1-x_2^2c^2/a^2}}{1+\sqrt{1-x_1^2c^2/a^2}}\right]\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Lösung (d)

Wir müssen die folgende DGL lösen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xc/a}{\sqrt{1-x^2c^2/a^2}} \tag{35}$$

also

$$\int_{y(x_1)}^{y} dy = \int_{x_1}^{x} \frac{xc/a}{\sqrt{1-x^2c^2/a^2}} dx \tag{36}$$

Die Stammfunktion der rechten Seite ist mit $y(x_1) = 0$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{c}\sqrt{1-x^2c^2/a^2}\Big|_{x_1}^{x} = -\frac{a}{c}\left(\sqrt{1-x^2c^2/a^2} - \sqrt{1-x_1^2c^2/a^2}\right) \\ &= \sqrt{a^2/c^2 - x_1^2} - \sqrt{a^2/c^2 - x^2}\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Wir haben noch die Randbedingung $y(x_2) = y_2$ die wir benutzen können um c durch y_2 auszudrücken. Wir angegeben ist es sinnvoll $w = \sqrt{a^2/c^2 - x_1^2}$ zu definieren. Dann ist

$$y(x) = w - \sqrt{w^2 + x_1^2 - x^2}\,, \qquad\qquad y_2 = y(x_2) = w - \sqrt{w^2 + x_1^2 - x_2^2}. \tag{38}$$

Die zweite Gleichung aufgelöst nach w gibt

$$w = \frac{y_2^2 + x_2^2 - x_1^2}{2y_2}\,, \tag{39}$$

Damit kann nun $y(x)$ als Funktion von x_1, x_2, y_2 geschrieben werden:

$$y(x) = \frac{y_2^2 + x_2^2 - x_1^2}{2y_2} - \sqrt{\frac{(y_2^2 + x_2^2 - x_1^2)^2}{4y_2^2} + x_1^2 - x^2}. \tag{40}$$

Aufgabe P4: Kippender Schornstein

Ein alter Schornstein der Länge $2l$ wird gesprengt und kippt um. Die Drehachse ist der Fußpunkt des Schornsteins. Wir wählen die Koordinaten des Schwerpunkts als $x = l\sin\phi$ und $z = l\cos\phi$ und vernachlässigen die Querschnittsfläche A des Schornsteins. Dabei dürfen wir die Dichte ρ des Schornsteins als konstant annehmen.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$\theta = A\rho\int_0^{2l} dz\, z^2$$

für die Drehung um den Fußpunkt, ausgedrückt durch die Masse m des Schornsteins. Bestimmen Sie die kinetische Energie $T = \frac{\theta}{2}\dot{\phi}^2$.

(2 Punkte)

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment für die Drehung um den Schwerpunkt. Welcher zusätzliche Term für die kinetische Energie kommt nun hinzu? Verifizieren Sie, dass Sie dasselbe Ergebnis erhalten wie in Teilaufgabe (a).

(3 Punkte)

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung des Schwerpunkts im Schwerefeld mit $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ an und stellen Sie die Bewegungsgleichung für ϕ auf.

(2 Punkte)

(d) Führen Sie die erste Integration aus, um $\ddot{\phi}$ zu eliminieren und $\dot{\phi}$ durch ϕ auszudrücken. Eliminieren Sie die Integrationskonstante aus der Anfangsbedingung, dass der Schornstein zum Zeitpunkt $t = 0$ die (kleine) Neigung ϕ_0 hat. Betrachten Sie nur Lösungen mit $\dot{\phi} \geq 0$.

(4 Punkte)

(e) Bestimmen Sie die z-Komponente der Zwangskraft (als Funktion von ϕ), die auf den Schwerpunkt wirkt, für den Fall $\phi_0 = 0$.

(4 Punkte)

(f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\phi(t)$ mit $(\dot{\phi}(0))^2 = \frac{3}{2}\frac{g(1-\cos\phi_0)}{l}$.
Hinweise: (i) Eine nützliche Abkürzung ist die Zeitkonstante $T = \sqrt{2l/(3g)}$.
(ii) $\displaystyle\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{d\phi'}{\sqrt{1-\cos\phi'}} = \sqrt{2}\left(\ln\tan\frac{\phi}{4} - \ln\tan\frac{\phi_0}{4}\right)$

(5 Punkte)

Lösung (a)

Das Trägheitsmoment für eine Drehung um den Fußpunkt ist

$$\Theta = A\rho\int_0^{2l} z^2 dz = A\rho\frac{8}{3}l^3 = \frac{4}{3}ml^2\,, \tag{41}$$

mit der Gesamtmasse $m = 2\rho A l$. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{\Theta}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{2}{3}ml^2\dot{\phi}^2\,. \tag{42}$$

Lösung (b)

Das Trägheitsmoment für eine Drehung um den Schwerpunkt ist

$$\Theta_{\mathrm{SP}} = A\rho \int_{-l}^{l} z^2 dz = A\rho \frac{2}{3} l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \,, \tag{43}$$

In der Tat ist dies konsistent mit dem Steinerschen Satz:

$$\Theta = \Theta_{\mathrm{SP}} + m l^2 \,. \tag{44}$$

Für die kinetische Energie kommt nun die Bewegung des Schwerpunktes hinzu, $\Delta T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_{\mathrm{SP}}^2$, mit

$$\vec{r}_{\mathrm{SP}} = \begin{pmatrix} l \sin\phi \\ l\cos\phi \end{pmatrix} \,, \qquad \dot{\vec{r}}_{\mathrm{SP}} = \begin{pmatrix} l\dot{\phi}\cos\phi \\ -l\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} \,, \qquad \dot{\vec{r}}_{\mathrm{SP}}^2 = l^2 \dot{\phi}^2 \,. \tag{45}$$

Also insgesamt

$$T = \frac{1}{6} m l^2 \dot{\phi}^2 + \frac{m}{2} l^2 \dot{\phi}^2 = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 \,, \tag{46}$$

in Übereinstimmung mit Teilaufgabe (a).

Lösung (c)

Das Potential ist

$$V = m g z_{\mathrm{SP}} = m g l \cos\phi \,, \tag{47}$$

also ist die Lagrangefunktion

$$L = T - V = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 - m g l \cos\phi \,, \tag{48}$$

und die Bewegungsgleichung

$$\frac{4}{3} m l^2 \ddot{\phi} - m g l \sin\phi = 0 \,. \tag{49}$$

Lösung (d)

Da L nicht explizit von der Zeit abhängt ist die Energie $E = T + V$ erhalten:

$$E = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}^2 + m g l \cos\phi = const. \tag{50}$$

Aufgelöst nach $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3}{2 m l^2} \left(E - m g l \cos\phi \right) \,. \tag{51}$$

Wir eleminieren E aus der Anfangsbedingung

$$E = E(t=0) = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}_0^2 + m g l \cos\phi_0 \,, \tag{52}$$

also insgesamt

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2 m l^2}} \sqrt{\frac{2}{3} m l^2 \dot{\phi}_0^2 + m g l \cos\phi_0 - m g l \cos\phi} \,. \tag{53}$$

Lösung (e)

Wir erhalten die z-Komponente der Zwangskraft Z_z aus

$$Z_z = m\ddot{z} + mg = -ml\left(\ddot{\phi}\sin\phi + \dot{\phi}^2\cos\phi\right) + mg\,. \tag{54}$$

Einsetzen von $\ddot{\phi}$ aus der Bewegungsgleichung $\ddot{\phi} = \frac{3g}{4l}\sin\phi$ und $\dot{\phi}^2$ mit $\phi_0 = 0$ gibt

$$\begin{aligned} Z_z &= -ml\left(\frac{3g}{4l}\sin^2\phi + \frac{3}{2ml^2}\left(\frac{2}{3}ml^2\dot{\phi}_0^2 + mgl - mgl\cos\phi\right)\cos\phi\right) + mg \\ &= -\frac{3mg}{4}\sin^2\phi - ml\dot{\phi}_0^2\cos\phi - \frac{3mg}{2}\cos\phi + \frac{3mg}{2}\cos^2\phi + mg \\ &= \frac{mg}{4} - ml\dot{\phi}_0^2\cos\phi - \frac{3mg}{2}\cos\phi + \frac{9mg}{4}\cos^2\phi \end{aligned} \tag{55}$$

Lösung (f)

Die zu lösende Gleichung ist

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\sqrt{\frac{2}{3}ml^2\dot{\phi}_0^2 + mgl\cos\phi_0 - mgl\cos\phi}\,, \tag{56}$$

und mit der angegebenen Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\sqrt{\frac{2}{3}ml^2\frac{3g(1-\cos\phi_0)}{2l} + mgl\cos\phi_0 - mgl\cos\phi} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2ml^2}}\sqrt{mlg(1-\cos\phi_0) + mgl\cos\phi_0 - mgl\cos\phi} \\ &= \sqrt{\frac{3g}{2l}}\sqrt{1-\cos\phi} \end{aligned} \tag{57}$$

Mit $T = \sqrt{\frac{2l}{3g}}$ und $\phi(0) = \phi_0$ haben wir also

$$\frac{1}{T}\int_0^t dt = \frac{t}{T} = \int_{\phi_0}^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\cos\phi}} \tag{58}$$

und mit dem angegebenen Integral schließlich

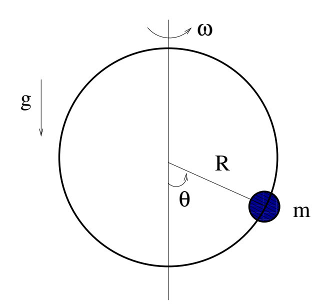
$$\frac{t}{T} = \sqrt{2}\left(\ln\tan\frac{\phi}{4} - \ln\tan\frac{\phi_0}{4}\right) \tag{59}$$

und

$$\phi(t) = 4\arctan\left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}T}}\tan\frac{\phi_0}{4}\right)\,. \tag{60}$$

Aufgabe P5: Perle auf rotierendem Draht

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei und unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einem ringförmigen Draht mit dem Radius R, welcher seinerseits mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ parallel zu $\vec{g}$ um seinen Durchmesser rotiert.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Lagrangesche Bewegungsgleichungen für θ auf.

(5 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die kritische Winkelgeschwindigkeit Ω, unterhalb derer der tiefste Punkt des Drahtes eine stabile Gleichgewichtslage der Perle ist.
Hinweis: Schreiben Sie dieEnergie als $E = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + U_{\text{eff}}(\theta)$ und untersuchen Sie das Verhalten von $U_{\text{eff}}(\theta)$.

(5 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die stabile Gleichgewichtslage für $\omega > \Omega$.
(Damit ist die Lösung $\theta = \theta_0 = \text{const.}$ gemeint.)

(5 Punkte)

(d) Entwickeln Sie (für $\omega > \Omega$) $U_{\text{eff}}(\theta)$ um $\theta = \theta_0$ bis zur Ordnung $(\theta - \theta_0)^2$, so dass Sie das Potential eines harmonischen Oszillators finden. Geben Sie die Kreisfrequenz kleiner Schwingungen der Perle um die Gleichgewichtslage an.

(5 Punkte)

Lösung (a)

Wir führen zuerst Kugelkoordinaten ein

$$x = R\cos\phi\sin\theta\,, \qquad y = R\sin\phi\sin\theta\,, \qquad z = -R\cos\theta\,, \tag{61}$$

mit der Bedingung konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi} = \omega$. Der kinetische Term ist damit

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) \tag{62}$$

und mit dem Potential $V = mgz = -mgR\cos\theta$ ist die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}R^2\left(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + mgR\cos\theta\,. \tag{63}$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich über

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}, \tag{64}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR\sin\theta \tag{65}$$

zu

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta = 0. \tag{66}$$

Lösung (b)

Die Lagrangefunktion kann geschrieben werden als die Differenz von kinetischer und potentieller Energie

$$L = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - U_{\text{eff}} \tag{67}$$

$$= \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2\theta + mgR\cos\theta, \tag{68}$$

sodass sich das Potential U_{eff} ergibt mit

$$U_{\text{eff}} = -\frac{m}{2} R^2 \omega^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta. \tag{69}$$

Eine stabile Gleichgewichtslage liegt vor wenn die Perle an einem lokalen Minimum θ_0 von U_{eff} befindet (mit $\dot{\theta} = 0$). Das bedeutet dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial\theta}|_{\theta_0} &= -mR^2\omega^2 \sin\theta_0\cos\theta_0 + mgR\sin\theta_0 = 0\,, \\
\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial\theta^2}|_{\theta_0} &= -mR^2\omega^2\left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right) + mgR\cos\theta_0 > 0\,.
\end{aligned} \tag{70}$$

Die Bedingung dass für $\omega = \Omega$ der tiefste Punkt $\theta_0 = 0$ stabil ist lautet dann

$$-mR^2\Omega^2 + mgR > 0\,, \tag{71}$$

also

$$\Omega < \sqrt{g/R}\,. \tag{72}$$

Lösung (c)

Für den Fall einer stabilen Gleichgewichtslage $\theta = \theta_0 = \text{const}$, ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$0 = -mR^2\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 + mgR\sin\theta_0. \tag{73}$$

Diese Gleichung lässt sich umformen zu

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right). \tag{74}$$

Lösung (d)

Wir entwickleln nun U_{eff} um die Lösung θ_0 mit $\cos\theta_0 = \frac{g}{R\omega^2}$ bis zur zweiten Ordnung in $\theta - \theta_0$. Wir haben bis zu dieser Ordnung

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \sin\theta_0 + \cos\theta_0(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\sin\theta_0(\theta-\theta_0)^2\,, \\
\cos\theta &= \cos\theta_0 - \sin\theta_0(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^2\,,
\end{aligned} \tag{75}$$

also

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}} &= -mR\left(\frac{R}{2}\omega^2\sin^2\theta + g\cos\theta\right) \\
&= -mR\left[\frac{R}{2}\omega^2\left(\sin^2\theta_0 + 2\sin\theta_0\cos\theta_0(\theta-\theta_0) + \cos^2\theta_0(\theta-\theta_0)^2 - \sin^2\theta_0(\theta-\theta_0)^2\right)\right] \\
&\quad - mRg\left(\cos\theta_0 - \sin\theta_0(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^2\right)
\end{aligned} \tag{76}$$

Wir benutzen nun zuerst $g = R\omega^2\cos\theta_0$

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}} &= -\frac{m}{2}R^2\omega^2\left(\sin^2\theta_0 + 2\sin\theta_0\cos\theta_0(\theta-\theta_0) + \cos^2\theta_0(\theta-\theta_0)^2 - \sin^2\theta_0(\theta-\theta_0)^2\right) \\
&\quad - mR^2\omega^2\left(\cos^2\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0(\theta-\theta_0) - \frac{1}{2}\cos^2\theta_0(\theta-\theta_0)^2\right) \\
&= -\frac{m}{2}R^2\omega^2\left[1 + \cos^2\theta_0 - \left(1-\cos^2\theta_0\right)(\theta-\theta_0)^2\right] \\
&= -\frac{m}{2}R^2\omega^2\left[1 + \frac{g^2}{R^2\omega^4} - \left(1 - \frac{g^2}{R^2\omega^4}\right)(\theta-\theta_0)^2\right]
\end{aligned} \tag{77}$$

Bis auf eine unbedeutende Konstante ist also

$$U_{\text{eff}} = \frac{m}{2} R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4}\right) (\theta - \theta_0)^2 \,. \tag{78}$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die Lagrangefunktion liefert

$$\begin{aligned} L &= \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - U_{\text{eff}} & (79)\\ &= \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{m}{2} R^2 \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4}\right) (\theta - \theta_0)^2 \,, & (80) \end{aligned}$$

woraus sich folgende Bewegungsgleichung ergibt:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right) (\theta - \theta_0) = 0, \tag{81}$$

beziehungsweise mit $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta\theta = \ddot{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Delta\theta + \omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right) \Delta\theta = 0. \tag{82}$$

Hieraus kann nun die Schwingungsfrequenz um die stabile Gleichgewichtslage θ_0 abgelesen werden:

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^4}} \,. \tag{83}$$