

Theoretische Physik B

MECHANIK

Vorlesung SS 2003

P. Wölfle

Institut für Theorie der Kondensierten Materie  
Fakultät für Physik

Universität Karlsruhe

Homepage: <http://www.tkm.uni-karlsruhe.de/lehre/>

Textverarbeitung: D. Scherer

# Inhaltsverzeichnis

## 1. Einleitung

## 2. Lagrangeformalismus der Mechanik

- 2.1 Zwangsbedingungen und -kräfte: Lagrangegleichungen 1. Art
- 2.2 Lagrangegleichungen 2. Art
- 2.3 Erhaltungsgrößen

## 3. Variationsprinzipien der Mechanik

- 3.1 Variationsrechnung
- 3.2 Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamilton'sches Prinzip)
- 3.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen, Noethertheorem

## 4. Bewegte Bezugssysteme

- 4.1 Inertialsysteme, Galileitransformation
- 4.2 Beschleunigte Bezugssysteme

## 5. Starrer Körper

- 5.1 Kinematik
- 5.2 Trägheitstensor
- 5.3 Euler'sche Gleichungen
- 5.4 Lagrangefunktion

## 6. Hamiltonformalismus

- 6.1 Kanonische Gleichungen
- 6.2 Poisson'sche Klammern
- 6.3 Kanonische Transformationen
- 6.4 Phasenraum und Lionville'scher Satz
- 6.5 Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung

## Literatur:

T. Fließbach, *Mechanik* (BI Wissenschaftsverlag)

L.D. Landau und E.M. Lifschitz - *Mechanik* (Akademie-Verlag Berlin)

H. Goldstein - *Klassische Mechanik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt)

J. Honerkamp und H. Römer - *Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik* (Springer, Berlin)

F. Scheck - *Mechanik* (Springer, Berlin)

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands - *The Feynman Lectures on Physics Vol. 1* (Add. Wesley)

## Mathematische Ergänzung:

Bronstein, Semendjajew, Musial, Mühlig - *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch)

R. Shankar - *Basic Training in Mathematics (A Fitness Program for Science Students)* (Plenum Press, New York)

# Kapitel 1

## Einleitung

In dieser Vorlesung sollen die Grundbegriffe der analytischen Mechanik vermittelt werden. Die Mechanik wurde als erste physikalische Theorie schon ab dem 17. Jahrhundert (Newton) formuliert und im 18. und 19. Jahrhundert insbesondere durch Lagrange und Hamilton zu dem Prototyp einer physikalischen Theorie entwickelt. Die Begriffsbildungen und Methoden der Mechanik dienten als Vorbild für die meisten anderen Gebiete der theoretischen Physik, wie die Elektrodynamik und die Quantenmechanik. So ist z.B. das Konzept der Feldtheorie, d.h. der Kontinuumsbeschreibung von Phänomenen durch Amplituden, die von Raum und Zeit abhängen und lokal verknüpft sind (z.B. durch Ableitungen), aus der Kontinuumsmechanik der Flüssigkeiten und elastischen Körper entlehnt.

Die große Bedeutung von Symmetrien und Symmetrietransformationen für physikalische Systeme wurde zum ersten Mal in der Mechanik erkannt. Dieser Teil der Mechanik ist von überragender Bedeutung und wird deshalb hier ausführlich behandelt.

Die analytische Mechanik ist auch heute noch Gegenstand intensiver Forschung. Dabei steht insbesondere das sogenannte chaotische Verhalten im Mittelpunkt des Interesses.

## Kapitel 2

# Lagrangeformalismus der Mechanik

Der Lagrangeformalismus gibt einen allgemeinen Rahmen für die Beschreibung der Dynamik (also der Bewegungsvorgänge) in einem physikalischen System. Wir wollen diesen Formalismus für die Mechanik vorstellen und zunächst eine Motivation dafür geben. Wie wir in der vorangegangenen Vorlesung Theorie A sehen konnten, geben die Newton'schen Bewegungsgleichungen eine vollständige Beschreibung eines Systems von Massenpunkten in  $d$  Dimensionen. In vielen Fällen ist die Bewegung der Körper eingeschränkt, z.B. durch feste Verbindungsstangen zwischen den Körpern. In diesem Fall ist die Ableitung der entsprechenden Newton'schen Bewegungsgleichungen u.U. nicht ohne weiteres möglich. Man spricht dann von *Zwangsbedingungen*, denen das System ausgesetzt ist. Wir wollen zunächst betrachten, was man darunter versteht.

### 2.1 Zwangsbedingungen und Zwangskräfte: Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wir betrachten Systeme von  $N$  Massenpunkten mit Massen  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Wenn alle Massenpunkte in ihren dreidimensionalen Bewegungsmöglichkeiten uneingeschränkt sind, hat das System  $f = 3N$  „Freiheitsgrade“. Wir wollen jetzt solche Fälle voraussetzen, in denen die Massenpunkte *nicht uneingeschränkt* beweglich sind, sondern gewissen Zwangsbedingungen unterworfen sind, z.B.

- a) alle Massenpunkte sind an eine Fläche im Raum gebunden
- b) die Abstände der Massenpunkte sind paarweise konstant (*starrer Körper*).

Zwangsbedingungen lassen sich häufig in der Form

$$A_\mu(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, \dots, N_Z$$

schreiben. Man nennt sie dann *holonom* und weiter *skleronom*, falls  $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$  oder *rheonom*, falls  $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} \neq 0$ .

Wenn die  $N_Z$  Gleichungen  $A_\mu = 0$  unabhängig sind, beträgt die Anzahl  $f$  der Freiheitsgrade des Systems

$$f = 3N - N_Z$$

Beispiele:

a) alle  $m_i$  können sich nur in einer Ebene bewegen:

$$\vec{a} \cdot \vec{r}_i - c = 0 \quad , \quad \vec{a}, c = \text{const.}$$

hier ist  $N_Z = N$  und damit  $f = 2N$

b) alle  $m_i$  sind an eine Ebene gebunden, die sich mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  bewegt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{r}_i - \vec{v}_0 t) - c = 0$$

$N_Z = N$  ,  $f = 2N$

c) Die Abstände der  $m_i$  sind paarweise konstant:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = \text{const.}$$

die verbleibenden Freiheitsgrade im Fall  $N \geq 3$  sind durch die Bewegungsmöglichkeit der Translation des Schwerpunkts und der Rotation des Systems als starrer Körper um drei orthogonale Achsen gegeben und damit ist  $f = 6$ . (Für  $N = 2$  ist  $f = 5$ )

Zwangsbedingungen, die von den Geschwindigkeiten abhängen, nennt man *nicht holonom*.

Der Einfluss der Zwangsbedingungen auf die Bewegung der Massenpunkte lässt sich durch sog. *Zwangskräfte*  $\vec{Z}_i$  beschreiben, die zusätzlich zu den eigentlichen Kräften  $\vec{F}_i$  auf die  $m_i$  wirken, so dass die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Die  $\vec{Z}_i$  werden im Allgemeinen von der Bewegung selbst abhängen und sind damit als Funktion von  $\vec{r}_i$  und  $\dot{\vec{r}}_i$  zu verstehen.

Im einfachsten Fall eines einzigen Massenpunkts  $m$ , dessen Bewegung der Zwangsbedingung

$$A(\vec{r}, t) = 0$$

unterliegt, findet die Bewegung offenbar auf der durch  $A = 0$  definierten, u.U. zeitabhängigen Fläche statt. Auf dieser Fläche soll die Bewegung ohne Einschränkung verlaufen, d.h. die Zwangskraft muss senkrecht zur Fläche gerichtet sein:

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass  $\vec{\nabla} A$  in Richtung der Normalen auf diese Fläche zeigt. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda(t)$  ist dabei noch zu bestimmen.

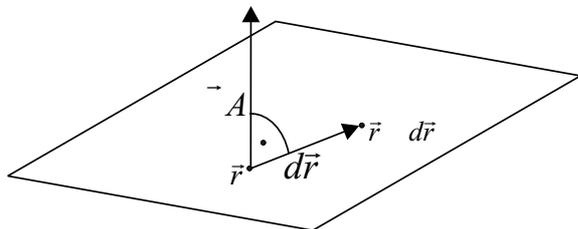
Ergänzung: Die Aussage, dass  $\vec{\nabla} A$  stets senkrecht auf der durch  $A$  definierten Fläche steht, lässt sich so zeigen: Wir betrachten zwei infinitesimal benachbarte Punkte  $\vec{r}$  und  $\vec{r} + d\vec{r}$  auf dieser Fläche, so dass gilt:

$$A(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = 0$$

Die zweite Gleichung entwickeln wir nach  $d\vec{r}$ :

$$A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} + O((d\vec{r})^2) = 0$$

Daraus folgt  $\vec{\nabla}A \cdot d\vec{r} = 0$ , und da  $d\vec{r}$  ein beliebiger (infinitesimaler) Vektor parallel zur Tangentenfläche im Punkt  $\vec{r}$  ist, muss damit  $\vec{\nabla}A$  senkrecht auf der Fläche stehen.

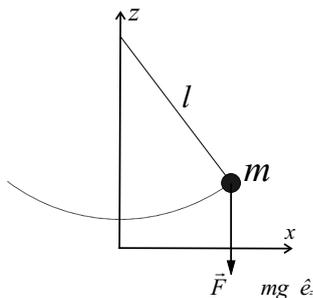


Die Bewegung des Massenpunkts wird also durch folgendes System von Gleichungen beschrieben:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \cdot \vec{\nabla}A(\vec{r}, t)$$

$$A(\vec{r}, t) = 0$$

Als Beispiel betrachten wir das mathematische Pendel in der x-z-Ebene.



$$A(\vec{r}, t) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

$$\vec{\nabla}A = 2(x, 0, z)$$

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x} = 2\lambda x$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z$$

$$x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Dieses Vorgehen lässt sich unmittelbar auf mehrere Teilchen und mehrere Zwangsbedingungen verallgemeinern. Die  $3N$  Bewegungsgleichungen und  $N_Z$  Zwangsbedingungen ergeben *Lagrangegleichungen 1. Art*:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_{\mu}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

$$A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad ; \quad \mu = 1, \dots, N_Z$$

Die Zahl der Zwangsbedingungen ist durch  $N_Z \leq 3N - 1$  begrenzt, damit mindestens ein Freiheitsgrad vorhanden ist.

### Energieaufnahme durch Zwangsbedingungen:

Um die Energiebilanz zu untersuchen, multiplizieren wir die Bewegungsgleichung für das  $i$ -te Teilchen mit  $\dot{\vec{r}}_i$  und verwenden wie früher die Identitäten

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i^2$$

und  $-\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U = \frac{dU}{dt}$

Aus den Zwangsbedingungen folgt (konservative Kräfte vorausgesetzt)

$$A_\mu(\{\vec{r}_i, t\}) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} A_\mu = \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu + \frac{\partial}{\partial t} A_\mu = 0$$

Damit ergibt sich die Energieänderung pro Zeit, die durch die Zwangsbedingungen verursacht wird als

$$\frac{dE}{dt} = - \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\{\vec{r}_i, t\})$$

wobei  $E = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + U(\{\vec{r}_i\})$

die Energie des Systems ist.

## 2.2 Lagrangegleichungen 2.Art

Die im letzten Abschnitt eingeführten Zwangsbedingungen  $\vec{Z}_i$  sind Hilfsgrößen, die i.A. nicht von physikalischer Bedeutung sind. Es ist deshalb anzustreben, sie von vorneherein zu vermeiden, z.B. indem man sie als ersten Schritt zur Lösung der Lagrangegleichungen 1. Art eliminiert. Dieses Verfahren führt jedoch u.U. auf unnötig komplizierte Formulierungen. Eine ökonomische Durchführung dieser Idee wird durch die Verwendung *verallgemeinerter Koordinaten* ermöglicht, die so gewählt sind, dass sie genau den durch die (holonomen) Zwangsbedingungen definierten Unterraum parametrisieren.

### Verallgemeinerte Koordinaten

Die Zahl der Freiheitsgrade eines Systems von  $N$  Teilchen im 3-dimensionalen Raum, das  $N_Z$  Zwangsbedingungen unterliegt, ist  $f = 3N - N_Z$ .

Von den ursprünglichen  $3N$  Koordinaten sind damit nur  $f$  Koordinaten voneinander unabhängig. Wir bezeichnen jede Wahl dieser Koordinaten als verallgemeinerte oder generalisierte Koordinaten

$$q = \{q_1, q_2, \dots, q_f\}$$

Die Wahl der  $q_i$  ist nicht eindeutig, und wird von Symmetriegesichtspunkten und möglichst großer Einfachheit bestimmt.

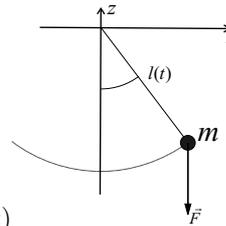
Die Orte aller Teilchen sind durch die Wahl der  $q_i$  festgelegt:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_f; t)$$

und die Zwangsbedingungen sind für beliebige  $q_i$  automatisch erfüllt

$$A_\mu(\vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_f; t), \dots, \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_f; t)) = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, \dots, N_Z$$

Beispiel: Ebenes Pendel mit variabler Fadenlänge  $l(t)$



Der einzige hier vorhandene Freiheitsgrad ist der Winkel  $\varphi(t)$

Mit der Darstellung der kartesischen Koordinaten des Massenpunkts

$$x = l(t) \sin \varphi$$

$$z = -l(t) \cos \varphi$$

$$y = 0$$

ist die Zwangsbedingung  $x^2 + z^2 = l^2(t)$  automatisch erfüllt.

### Lagrangefunktion

Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung für  $m_i$  mit  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$  und summieren über  $i$ :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\mu=1}^Z \lambda_\mu(t) \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad \left| \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right. \quad (\alpha = 1, \dots, f)$$

und benützen, dass aus  $A_\mu(\{q_\alpha\}, t) \equiv 0$  folgt

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \text{und damit} \quad \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

Ergänzung:  $A_\mu$  hängt von  $q_\alpha$  über die kartesischen Koordinaten  $\vec{r}_i(\{q_\alpha\}, t)$  ab. Damit ist

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (\text{Kettenregel})$$

Die Zwangskräfte fallen damit aus obigen Gleichungen heraus:

$$\sum_i \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0$$

Diese  $f$  Gleichungen lassen sich wie folgt umformen. Wir benützen zunächst, dass aus  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q, t)$  durch totale Ableitung nach  $t$  folgt:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \dot{\vec{r}}_i(\{q_{\alpha}, \dot{q}_{\alpha}\}, t)$$

und damit

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}}$$

Für den 1. Term der Bewegungsgleichungen ergibt sich somit unter Benutzung dieser Beziehung

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} T \right\} - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} T$$

wobei  $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2$  die kinetische Energie bezeichnet.

Beweis:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right\} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_{\alpha}}$$

$$\text{wobei } \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \frac{d \dot{\vec{r}}_i}{dt} = \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_{\alpha}}$$

benutzt wurde.

Für die Kraftterme gilt ähnlich:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = \sum_i \left( -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} U(q, t)$$

wobei  $U(q, t) = U(\vec{r}_1(q, t), \vec{r}_2(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t))$  die potentielle Energie des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten, ist.

Die Bewegungsgleichungen lassen sich mit Hilfe obiger Umformungen kompakt schreiben als

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}}}$$

mit  $\alpha = 1, 2, \dots, f$ , wobei  $L$  die **Lagrangefunktion** darstellt, definiert als

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$$

Diese als *Lagrangegleichungen 2. Art* bekannten Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten stellen den wichtigsten Ausgangspunkt zur Lösung von Problemen in der Mechanik dar. Dabei ist ein System eindeutig charakterisiert durch seine Lagrangefunktion  $L$ , i.A. gegeben als Differenz von kinetischer Energie  $T$  und potentieller Energie  $U$ . Diese ist eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten  $q$  und Geschwindigkeiten  $\dot{q}$ , sowie der Zeit  $t$ .

Die Aufstellung von Bewegungsgleichungen für Systeme mit Zwangsbedingungen erfolgt also in drei Schritten:

- 1) Wahl einer geeigneten Parametrisierung des  $f$ -dimensionalen Unterraums des  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraums  $\rightarrow q = \{q_1, q_2, \dots, q_f\}$
- 2) Bestimmung von  $T$  und  $U \rightarrow L$
- 3) Aufstellung der Lagrangegleichungen

## 2.3 Erhaltungsgrößen

Wie bereits in Theorie A diskutiert, spielen Erhaltungssätze eine wichtige Rolle für das qualitative Verhalten eines Systems. Auch für die Lösung der Bewegungsgleichungen sind sie von großem Nutzen. Im Lagrangeformalismus sind Erhaltungsgrößen dadurch charakterisiert, dass die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$  von einem oder mehreren ihrer Argumente *nicht* abhängt.

a) Energieerhaltung

Wir betrachten zuerst den Fall, dass  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Die totale zeitliche Ableitung von  $L$  ergibt dann

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} \right\} = \sum_{\alpha} \left\{ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) \dot{q}_{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \ddot{q}_{\alpha} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right\} \quad (\text{Produktregel})$$

wobei im 2. Schritt die Lagrangegleichung benutzt wurde. Wenn wir den Term auf der rechten Seite der Gleichung auf die linke Seite schreiben, ergibt sich ein Erhaltungssatz:

$$\frac{d}{dt}H = 0$$

wobei die Erhaltungsgröße  $H$  definiert wurde:

$$H = \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) - L$$

$H$  heißt Hamiltonfunktion.

Falls die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit abhängen, ist die kinetische Energie quadratisch in den  $\dot{q}_{\alpha}$

$$T = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta}$$

mit Koeffizienten  $a_{\alpha\beta}$  (verallgemeinerter Massentensor). Wenn zusätzlich  $U$  nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_{\alpha}$  abhängt, ist

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha, \beta} 2a_{\alpha\beta} \dot{q}_{\alpha} \dot{q}_{\beta} = 2T$$

und damit ist

$$H = 2T - L = T + U = E$$

Die Hamiltonfunktion ist dann gleich der Energie des Systems.

b) Zyklische Koordinaten

Im Falle, dass  $L$  von einer der verallgemeinerten Koordinaten  $q_\beta$  nicht explizit abhängt, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0$$

nennt man  $q_\beta$  eine zyklische Koordinate.

Aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0$$

folgt dann, dass der zugehörige verallgemeinerte Impuls  $p_\beta$ :

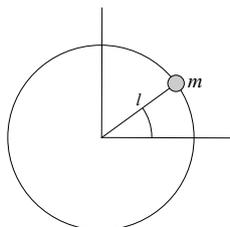
$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta}$$

zeitlich erhalten ist, d.h.  $p_\beta = \text{const.}$

1. Beispiel: Freies Teilchen,  $L = \frac{m}{2} \dot{r}^2$

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} = \text{const.} \quad \text{Impulserhaltung}$$

2. Beispiel: Massenpunkt auf einem Kreis in der x-y-Ebene,  $L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$ ,  $q = l\varphi$



$$J_Z = \frac{1}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml\dot{\varphi} = \text{const.} \quad \text{Drehimpulserhaltung}$$

### Nichtkonservative Kräfte

Im Falle von Kräften, die sich nicht als Gradient eines Potentials schreiben lassen, sind die Lagrangegleichungen 2. Art zu erweitern. Wir gehen aus von den jeweiligen Krafttermen und leiten geeignete Zusatzterme ab.

a) Elektromagnetische Kräfte

Ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  und ein Magnetfeld  $\vec{B}$  üben auf eine Ladung  $Q$  die sogenannte Lorentz-Kraft aus

$$\vec{K} = Q \cdot \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right)$$

Der magnetische Anteil dieser Kraft ist von der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  abhängig und damit nicht konservativ. Wir versuchen eine Verallgemeinerung der Formulierung für konservative Systeme, indem wir im Potential  $U$  auch von  $\dot{\vec{r}}$  abhängige Terme zulassen. Bei unveränderter Anwendung der Lagrange-Gleichung (mit  $(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3)$ , den kartesischen Koordinaten)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

ergibt sich also ein Zusatzterm zur Kraft

$$\vec{K}_{nk} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

Frage: Gibt es eine Funktion  $U_{nk}$ , aus der nach Differentiation bezüglich  $\dot{\vec{r}}$  und Zeitableitung die Lorentz-Kraft folgt?

Antwort: Ja, aber diese Funktion lässt sich nur durch das Vektorpotential  $\vec{A}$  des Magnetfeldes ausdrücken (zunächst ohne Zwangsbedingungen)

$$U_{nk} = -Q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Die elektromagnetischen Potentiale  $\Phi(\vec{r}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  sind definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned}$$

Das gesamte Potential ist gegeben durch

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = Q \cdot \Phi(\vec{r}, t) - Q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Wir setzen in die Lagrangegleichung ein und erhalten folgenden Ausdruck für die Kraft

$$\begin{aligned} \vec{K} &= -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}} \\ &= -Q \vec{\nabla}\Phi + Q \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \vec{\nabla} A_j(\vec{r}, t) - Q \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t) \\ &= Q \vec{E} + Q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - Q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + Q \sum_{j=1}^3 \left( \dot{x}_j \vec{\nabla} A_j(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) \end{aligned}$$

Der letzte Term lässt sich umformen:

$$\sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left( \vec{\nabla} A_j - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \right) = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

womit gezeigt ist, dass  $\vec{K}$  die Lorentzkraft ist.  
Die Lagrangefunktion hat also die Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi(\vec{r}, t) + Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Falls Zwangsbedingungen vorliegen, ist  $\vec{r} = \vec{r}(\{q_\alpha\})$  zu setzen.

## b) Reibungskräfte

Eine realistische Beschreibung mechanischer Systeme aus makroskopischen Körpern erfordert die Berücksichtigung von Reibungs- oder Dämpfungseffekten. Die entsprechenden Kräfte treten nur für bewegte Teilchen auf, d.h. bei endlicher Geschwindigkeit. Für kleine Geschwindigkeiten ist oft ein linearer Zusammenhang gegeben.

$$\vec{K}_{diss,i} = -\gamma_i \dot{\vec{r}}_i \quad ; \quad i\text{-tes Teilchen}$$

Derartige Kräfte führen in der Lagrangegleichung für die  $\alpha$ -te Koordinate zu Zusatztermen

$$\sum_{i=1}^N \vec{K}_{diss,i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

Diese Zusatzterme lassen sich nicht durch einen  $\dot{\vec{r}}$ -abhängigen Zusatz zu  $L$  erfassen. Es ist aber möglich und sinnvoll, eine weitere skalare Funktion  $F$  (neben  $L$ ) zu definieren als

$$F(\dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \gamma_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad \rightarrow \quad F(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \gamma_i \dot{\vec{r}}_i^2(q, \dot{q}, t)$$

Für die verallgemeinerte Dissipationskraft gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{K}_{diss,i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} \end{aligned}$$

Die modifizierten Lagrangegleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

$F$  ist die *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*. Sie ist gleich der halben vom System gegen Reibung abgegebenen Leistung.

# Kapitel 3

## Variationsprinzipien der Mechanik

### 3.1 Variationsrechnung

Die Variationsrechnung behandelt die Lösung von Problemen, bei denen der extremale (minimale oder maximale) Wert einer Größe zu finden ist, die als Integral über einen Funktionalausdruck darzustellen ist. Wir betrachten ein erstes Beispiel:

Gesucht ist die Funktion  $y(x)$ , mit Randwerten  $y(x_1) = y_1$ , die das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$$

zum Minimum macht.

Lösungsstrategie:

$y_0(x)$  sei die gesuchte Funktion. Dann muss für jede infinitesimal davon abweichende Funktion  $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) = y_0(x) + \epsilon \eta(x)$  mit  $\epsilon$  infinitesimal und  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  gelten.

$$J[y_0 + \epsilon \eta(x)] > J[y_0] \quad , \quad \forall \eta(x)$$

Hieraus folgt

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J[y_0 + \epsilon \eta(x)] \right|_{\epsilon=0} = 0$$

in Analogie zur Bedingung für ein Extremum einer Funktion  $f(x)$ :  $f'(x) = 0$  bei  $x = x_0$ .

Aus der Bedingung  $\frac{dJ}{d\epsilon} = 0$  lässt sich eine Differentialgleichung für  $\eta(x)$  ableiten:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J[y_0(x) + \epsilon \eta(x)] \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Nach partieller Integration des zweiten Terms

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) = \underbrace{\left[ \frac{dF}{dy'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$$

folgt

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} J[y_0(x) + \epsilon \eta(x)] \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) \stackrel{!}{=} 0$$

Das Integral soll für beliebiges  $\eta(x)$  verschwinden, was nur möglich ist, wenn der Ausdruck in den Klammern Null ist.

$$\Rightarrow \quad \text{Eulergleichung} \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}$$

Die Lösungen  $y(x)$  dieser DGL 2. Ordnung ergeben *stationäre* Punkte von  $J[y]$ . Falls mehrere Lösungen existieren, ist die zum Minimum gehörige zu finden.

Folgende Kurznotation ist üblich:

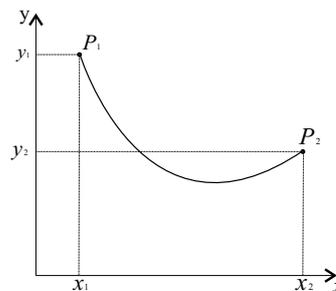
$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int dx \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) = \int dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y = 0$$

„Funktionalableitung“  $\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

### Variationsprobleme mit Nebenbedingung

Wenn die aus einem Extremalprinzip zu bestimmende Funktion  $y(x)$  weiteren Bedingungen genügen muss, spricht man von einem Variationsproblem mit Nebenbedingungen.

Beispiel: Eine Kette mit konstanter Massendichte  $\rho$  und Länge  $L$  werde im Schwerfeld der Erde aufgehängt.



Frage: Welche Kurvenform nimmt die Kette an?

Der Gleichgewichtszustand wird durch den minimalen Wert der potentiellen Energie bestimmt:

$$J = U_{pot} = \int_1^2 g \rho y ds = g \rho \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2} = \min.$$

Element der Bogenlänge:  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$

Die Nebenbedingung besteht darin, dass die Länge der Kette gegeben ist:

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = L$$

Nebenbedingungen der Form  $K[y] = C$  heißen *isoperimetrisch*.

Nebenbedingungen lassen sich mit Hilfe der *Methode der Lagrangemultiplikatoren* in ein verallgemeinertes Extremalprinzip aufnehmen: Statt  $J[y] = \min.$  und  $K[y] = C$  kann man setzen

$$J^*[y, \lambda] = J[y] - \lambda(K[y] - C) = \min.$$

Die Extremalbedingungen sind dann:

$$\frac{\partial J^*}{\partial \lambda} = 0 = K[y] - C$$

und

$$\frac{\delta J^*}{\delta y} = 0 = \frac{\delta J}{\delta y} - \lambda \frac{\delta K}{\delta y}$$

oder ausgeschrieben, mit

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)$$

und

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx G(y, y', x) = C \quad :$$

$$\frac{\delta J^*}{\delta y} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y'} \right) + \frac{\partial F}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

Beweis:

Wir nehmen an  $y = y_0(x)$  sei die Lösung und betrachten kleine Abweichungen

$$y = y_0(x) + \epsilon_1 \eta_1(x) + \epsilon_2 \eta_2(x)$$

wobei  $\eta_1(x)$  und  $\eta_2(x)$  linear unabhängig sind. Dann wird durch

$$K[y] = K(\epsilon_1, \epsilon_2) = C$$

eine Kurve in der  $\epsilon_1$ - $\epsilon_2$ -Ebene festgelegt, die durch den Nullpunkt geht. Für Werte von  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  auf dieser Kurve ist

$$J[y] = J(\epsilon_1, \epsilon_2) = \min.$$

am Punkt  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ .

Es sind also die Gleichungen zu lösen:

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = C \quad \rightarrow \quad \frac{\partial K}{\partial \epsilon_1} d\epsilon_1 + \frac{\partial K}{\partial \epsilon_2} d\epsilon_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial \epsilon_1}}{\frac{\partial K}{\partial \epsilon_2}}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \epsilon_1} + \frac{\partial J}{\partial \epsilon_2} \frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = 0 = \frac{\partial J}{\partial \epsilon_1} - \frac{\partial J}{\partial \epsilon_2} \frac{\frac{\partial K}{\partial \epsilon_1}}{\frac{\partial K}{\partial \epsilon_2}}$$

Diese Gleichung ergibt sich aber aus der Bedingung  $J - \lambda K = \min$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \epsilon_1} - \lambda \frac{\partial K}{\partial \epsilon_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \epsilon_2} - \lambda \frac{\partial K}{\partial \epsilon_2} = 0 \end{aligned} \right\} \frac{\partial J}{\partial \epsilon_1} - \frac{\partial J}{\partial \epsilon_2} \cdot \frac{\frac{\partial K}{\partial \epsilon_1}}{\frac{\partial K}{\partial \epsilon_2}} = 0$$

q.e.d.

### 3.2 Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamilton'sches Prinzip)

Frage: Lassen sich die Lagrangegleichungen als Eulergleichung eines Variationsprinzips auffassen?

Die Form der Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

legt nahe, sie als Eulergleichungen für das Stationaritätsprinzip

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = \text{stationär}$$

aufzufassen.  $S$  ist die *Wirkung*, bzw. das *Wirkungsfunktional*. Dabei sind die Randbedingungen

$$q_\alpha(t_1) = q_{1\alpha} \quad , \quad q_\alpha(t_2) = q_{2\alpha} \quad \text{gegeben.}$$

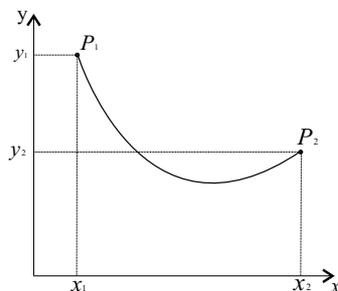
Meist wird  $S$  *minimal*. Man spricht deshalb vom *Prinzip der kleinsten Wirkung*.

Die Bestimmung des Bewegungsablaufs eines mechanischen Systems lässt sich also so formulieren:

1. Man finde die Lagrangefunktion  $L$ , meist gegeben durch  $L = T - U$ , und damit die Wirkung  $S$ .
2. Man betrachte alle Wege  $q(t) = \{q_\alpha(t)\}$ , die von den Anfangspunkten  $q_{1\alpha}$  zur Zeit  $t_1$  zu den Endpunkten  $q_{2\alpha}$  zur Zeit  $t_2$  führen und finde die Wege  $q_\alpha(t)$ , die das Minimum (oder Extremum) von  $S$  ergeben. Falls  $\bar{q}(t)$  der gesuchte Weg ist, gilt

$$S[q(t)] \geq S[\bar{q}(t)]$$

für alle  $q(t)$ .



3. Aus der Stationaritätsbedingung  $\frac{\delta S}{\delta q} = 0$  folgen die Lagrangegleichungen.

Die Lagrangegleichungen 1. Art lassen sich ebenso aus der Stationaritätsbedingung für die Wirkung, aber nun mit den Nebenbedingungen

$$A_\mu(x, t) = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, \dots, z$$

ableiten. Man kann die Nebenbedingungen mit Hilfe von Lagrangeparametern  $\lambda_\mu(t)$  berücksichtigen, was zu dem Variationsproblem

$$\delta S^*[x, \lambda, t] = 0 \quad \text{führt,}$$

$$\text{mit} \quad S^*[x, \lambda, t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L(x, \dot{x}, t) + \sum_{\mu=1}^z \lambda_\mu(t) A_\mu(x, t) \right].$$

Hier ist die Variation sowohl nach  $x(t) = \{x_i(t)\}$ , als auch nach  $\lambda_\mu(t)$  vorzunehmen.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung stellt die allgemeinste und kompakteste Formulierung der Mechanik dar. Sie ist vollkommen unabhängig von der „Darstellung“, d.h. von der Wahl der Koordinaten (Kartesisch, Winkel, etc.). Ein weiterer Vorteil ist, dass sich die Form der Lagrangefunktion durch Symmetriebedingungen stark einschränken lässt.

Für die Lagrangefkt. eines freien Teilchens muss gelten:

1.  $L$  kann nicht explizit von  $t$  abhängen (Homogenität der Zeit)
2.  $L$  kann nicht explizit von  $\vec{r}$  abhängen (Homogenität des Raums)
3.  $L$  muss isotrop sein.

Damit kann  $L$  nur eine Funktion von  $\dot{\vec{r}}^2$  sein. Die einfachste Möglichkeit ist

$$L = \text{const.} \cdot \dot{\vec{r}}^2$$

Mit  $\text{const.} = \frac{m}{2}$  ist das die bekannte Form.

*Unbestimmtheit* der Lagrangefunktion:

Zu  $L$  kann ein beliebiger Term hinzugefügt werden, der eine *totale Zeitableitung* einer Funktion von  $q$  und  $t$  (aber nicht  $\dot{q}$ ) darstellt:

$$L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

Dieser Zusatzterm führt zu einer additiven Konstanten in  $S$ :

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q, t) = f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1) = \text{const.}$$

Beispiele:

(i) Galileitransformation:

Mit  $\dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}} + m\vec{v}$  folgt:

$$L \quad \rightarrow \quad L + m\dot{\vec{r}}\vec{v} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 = L + \frac{d}{dt}(m\vec{r} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 t)$$

(ii) Eichtransformation in der Elektrodynamik:

Die Definition der elektromagnetischen Potentiale  $\Phi, \vec{A}$  durch

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

legt  $\vec{A}$  und  $\Phi$  nur bis auf *Eichtransformationen* fest. Offenbar sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  unter einer Transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \quad , \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

mit beliebigem  $\Lambda(\vec{r}, t)$  *invariant*.

$L$  ändert sich dabei wie  $\left[ L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi + \frac{q}{c} \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \right]$ :

$$L \rightarrow L + \frac{q}{c} \frac{d\Lambda(\vec{r}, t)}{dt}.$$

Damit folgt die Invarianz der Bewegungsgleichungen ohne weitere Rechnung.

### 3.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Noethertheorem

Das Prinzip der kleinsten Wirkung stellt den besten Ausgangspunkt für die Beschreibung allgemeiner Zusammenhänge in der Mechanik dar. Das wichtigste Beispiel dafür ist die Ableitung eines allgemeinen Zusammenhangs zwischen bestimmten Symmetrien des betrachteten Systems und daraus folgenden Erhaltungssätzen.

Wir betrachten das Verhalten der Wirkung  $S$ , bzw. der Lagrangefunktion  $L(x, \dot{x}, t)$  unter einer beliebigen infinitesimalen Transformation

$$x_i \rightarrow x_i^* = x_i + \epsilon \cdot \psi_i(x, \dot{x}, t)$$

$$t \rightarrow t^* = t + \epsilon \cdot \varphi(x, \dot{x}, t)$$

mit  $\epsilon$  infinitesimal, wobei  $\psi_i(x, \dot{x}, t)$  und  $\varphi(x, \dot{x}, t)$  beliebige Funktionen sind.

Beispiele:

(i) Zeittranslation  $t^* = t + \epsilon$  ,  $x_i^*(t^*) = x_i(t)$

(ii) Räumliche Translation  $x_i^* = x_i + \epsilon$  ,  $t^* = t$

(iii) Drehung  $\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon \hat{\omega} \times \vec{r}$  ,  $t^* = t$

(iv) Galileitransformation  $\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon \hat{v} t$  ,  $t^* = t$

Wir vergleichen die transformierte Wirkung

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \dot{x}^*, t^*)$$

mit den transformierten Randbedingungen

$$x_i^*(t_2^*) = x_i(t_2) + \epsilon \psi_i(x(t_2), \dot{x}(t_2), t_2)$$

mit der ursprünglichen Wirkung  $S$ .

Falls  $S^* = S$ , ist die Wirkung *invariant* unter der betrachteten Transformation und es gilt

$$\frac{\partial S}{\partial \epsilon} = 0$$

Hieraus lässt sich ein Erhaltungssatz für eine Größe  $Q(x, \dot{x}, t)$  ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(x, \dot{x}, t) &= 0 \quad , \quad \text{wobei} \\ Q &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi. \end{aligned}$$

Beweis:

$$S^* = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x, \frac{dx}{dt}, t) + \epsilon \left[ \frac{d}{d\epsilon} \left\{ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right\} \right]_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2)$$

Damit  $S^* = S$  muss gelten

$$\frac{d}{d\epsilon} \left\{ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right\}_{\epsilon=0} = 0$$

Zunächst folgt aus  $t^* = t + \epsilon\varphi$

$$\frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon \frac{d\varphi}{dt}$$

und aus  $x_i^* = x_i + \epsilon\psi_i$

$$\frac{dx_i^*}{dt^*} = \frac{dx_i^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \left( \frac{dx_i}{dt} + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \left( 1 - \epsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) = \dot{x}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt} + O(\epsilon^2).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\epsilon} \left\{ L \left( x_i + \epsilon\psi_i, \dot{x}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt}, t + \epsilon\varphi \right) \left( 1 + \epsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) \right\}_{\epsilon=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \psi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{d\psi_i}{dt} - \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \varphi + L \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i \right) + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \\ & \quad \text{wobei } \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \text{ benutzt wurde.} \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\frac{d}{dt}Q(x, \dot{x}, t) = 0$$

mit der Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi = \text{const.}$$

Es gilt also folgender allgemeiner Zusammenhang, der als **Noethertheorem** bezeichnet wird:

Eine Symmetrie des Systems, die in der Invarianz der Wirkung gegenüber einer einparametrischen Raum-Zeit-Transformation besteht (festgelegt durch die Funktionen  $\psi_i$  und  $\varphi$ ) ist verknüpft mit der Existenz einer Erhaltungsgröße  $Q$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Symmetrie } S & \rightarrow & \text{Erhaltungsgröße} \\ S^* = S & & Q = Q(x, \dot{x}, t) = \text{const.} \end{array}$$

Dieser tiefliegende Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Systems unter Symmetrietransformationen und der beobachtbaren Konsequenz der Existenz von Erhaltungsgrößen ist von grundlegender Bedeutung für die gesamte Physik.

Beispiele:

1. Homogenität der Zeit:  $L$  hängt nicht explizit von der Zeit ab:

$$\begin{array}{l} x_i^* = x_i \quad \rightarrow \quad \psi_i = 0 \\ t^* = t + \epsilon \quad \rightarrow \quad \varphi = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i$$

$$\text{Falls } L = T - U = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - U(x)$$

$$\text{ist } Q = T - U - 2T = -(U + T) = -E$$

→ **Energieerhaltung**

2. Homogenität des Raums:  $L$  ist invariant gegen zeitunabhängige räumliche Verschiebungen, z.B. in x-Richtung

$$\begin{array}{l} \vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \epsilon \hat{x} \quad \rightarrow \quad \psi_{nx} = 1 \quad , \quad \psi_{ny} = \psi_{nz} = 0 \\ t^* = t \quad \rightarrow \quad \varphi = 0 \end{array}$$

$$Q = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = \sum_n p_{nx} = P_x = \text{const.}$$

wobei  $\vec{p}_n = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_n}$  der Impuls des  $n$ -ten Teilchens ist und  $\vec{P}$  der **Gesamtimpuls** des Systems ist.

3. Isotropie des Raums: Invarianz von  $L$  gegen Rotationen um eine beliebig gerichtete Achse durch einen Bezugspunkt (der als Ursprung gewählt wird), z.B. Drehungen um Achse  $\hat{\omega}$  für einen Massenpunkt

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon(\hat{\omega} \times \vec{r})$$

$$x_i^* = x_i + \epsilon \sum_{kl} \epsilon_{ikl} \omega_k x_l \quad \rightarrow \quad \psi_i = \sum_{kl} \epsilon_{ikl} \hat{\omega}_k x_l \quad , \quad \psi = \hat{\omega} \times \vec{r}$$

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i = \sum p_i \epsilon_{ikl} \hat{\omega}_k x_l = \vec{p} \cdot (\hat{\omega} \times \vec{r}) = \hat{\omega} \cdot \vec{L}$$

Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ .

$Q$  ist die **Drehimpulskomponente** in Richtung der Drehachse.

### Erweitertes Noethertheorem

Die Invarianzbedingung  $S^* = S$  ist stärker als die eigentlich einzig wesentliche Bedingung, dass die Bewegungsgleichungen invariant unter der betrachteten Transformation sind. Dies ist äquivalent zu

$$\delta S^* = \delta S$$

Da  $\delta S$  nur bis auf totale Zeitableitungsterme bestimmt ist, können auch solche Transformationen als Invarianzprobleme zugelassen werden, die die Lagrangefunktion um eine totale Zeitableitung ändern, d.h. die Invarianzbedingung lautet:

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} f(x, t)$$

und damit ergibt sich als Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi - f(x, t) = const.$$

Beispiel: Galileiinvarianz

$$\vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \epsilon t \hat{u} \quad , \quad \vec{\psi}_n = t \hat{u} \quad , \quad t^* = t$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n^2 - \sum_{\substack{n,m \\ n < m}}^N U_{nm}(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|)$$

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L^* \cdot \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \cdot \hat{u} = \frac{d}{dt} (M \vec{R} \cdot \hat{u}) = \frac{df}{dt}$$

d.h. es gilt nicht  $S^* = S$ , sondern nur  $\delta S^* = \delta S$ !

$$Q = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n} \vec{\psi}_n - f(x, t) = M(\dot{\vec{R}}t - \vec{R}) \cdot \hat{u} = const.$$

Da dies für beliebige Richtung  $\hat{u}$  gilt, ist also

$$\dot{\vec{R}}t - \vec{R} = \text{const.} \quad \rightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0$$

Dies folgt aber bereits bei Translationsinvarianz aus der Impulserhaltung:  $M\dot{\vec{R}} = \text{const.}$

Ergänzung:

Das sogenannte Noether-Theorem wurde von der Mathematikerin Emmy Noether in einer grundlegenden Untersuchung zur modernen Algebra formuliert. Sie hat mit ihren Arbeiten nicht nur die theoretische Physik, sondern auch die Mathematik des 20. Jahrhunderts entscheidend beeinflusst. 1882 als Tochter des Mathematikprofessors Max Noether geboren, wirkte sie nach dem Studium der Mathematik ab 1919 als Dozentin in Göttingen. Nach dem Entzug der Lehrberechtigung 1933 durch die Nationalsozialisten emigrierte sie in die USA, wo sie 1935 in Princeton starb.

# Kapitel 4

## Bewegte Bezugssysteme

Transformationen von einem festen Bezugssystem in ein bewegtes sind sowohl von praktischem Interesse, z.B. wenn sich Massenpunkte unter dem Einfluss von zeitlich veränderlichen Zwangsbedingungen bewegen, als auch von grundsätzlichem Interesse, wenn es z.B. um die Frage geht, in welchem Bezugssystem die physikalischen Gesetze die einfachste Form annehmen. Im Folgenden betrachten wir nur *lineare* Transformationen.

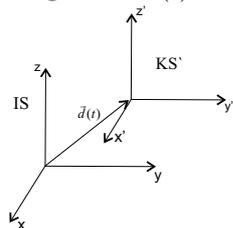
### 4.1 Bewegte Inertialsysteme. Galileitransformation

Wir gehen aus von einem Inertialsystem  $IS$  mit kartesischen Koordinaten  $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$  und betrachten ein weiteres kartesisches Koordinatensystem  $KS'$  mit  $(x' y' z') = (x'_1, x'_2, x'_3)$ .

Frage: Wie darf sich  $KS'$  relativ zu  $IS$  bewegen, so dass die Newton'schen Axiome in  $KS'$  gelten?

1. Fall: Die Achsen von  $IS$  und  $KS'$  seien *parallel*, wobei der Ursprung von  $KS'$  mit dem Ursprung von  $IS$  durch den Vektor  $\vec{d}(t)$  verbunden sei.

Es gilt also  $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{d}(t)$ .



Falls  $KS'$  ein Inertialsystem sein soll, muss mit (1. Axiom)

$$m\ddot{\vec{r}} = 0 \quad \text{auch gelten} \quad m\ddot{\vec{r}}' = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung  $\ddot{\vec{d}} = 0$ . Integration liefert

$$\vec{d}(t) = \vec{v}t + \vec{a}$$

wobei  $\vec{v}$  die Relativgeschwindigkeit der beiden Koordinatensysteme ist.  $IS'$  darf sich also gegenüber  $IS$  mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Zusätzlich ist auch eine konstante Verschiebung erlaubt.

2. Fall: Die Achsen von  $IS$  und  $KS'$  seien gegeneinander verdreht; den Ursprung wählen wir der Einfachheit halber gleich.

Es gilt also

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j$$

wobei  $\alpha_{ij}$  die Elemente einer *orthogonalen Matrix* („Drehmatrix“) sind, für die gelten muss

$$\sum_l \alpha_{il} \alpha_{lj}^T = \delta_{ij}$$

d.h. die transponierte Matrix  $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji}$  ist die Inverse der Matrix  $\alpha$ :

$$\alpha^{-1} = \alpha^T$$

(folgt aus der Forderung  $(\vec{r}')^2 = \vec{r}^2$ , d.h. Abstände bleiben bei der Drehung unverändert)

Das 1. Axiom lautet in  $KS'$

$$m\ddot{x}'_i = m \sum_{j=1}^3 (\ddot{\alpha}_{ij} \dot{x}_j + 2\dot{\alpha}_{ij} \dot{x}_j)$$

wobei  $\ddot{x}_j = 0$ , gültig in  $IS$ , benutzt wurde.

Man sieht, dass nur eine zeitunabhängige Drehung, d.h.  $\ddot{\alpha}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} = 0$  zulässig ist, wenn  $KS'$  ein Inertialsystem sein soll.

Damit lautet die allgemeinste Transformation, die Inertialsysteme ineinander transformiert:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j + v_i t + a_i \\ t' &= t - t_0 \end{aligned} \right\} \dot{x}'_i = \sum_j \alpha_{ij} \dot{x}_j + v_i$$

wobei noch eine Verschiebung der Zeitvariablen als einzige mögliche Transformation von  $t$  hinzugenommen wurde. Derartige Transformationen nennt man *Galileitransformationen* (GT).

Die allgemeine Galileitransformation ist durch 10 Parameter charakterisiert: 3 Drehwinkel, 3 Geschwindigkeitskomponenten  $v_1, v_2, v_3$ , drei räumliche Verschiebungen  $a_1, a_2, a_3$  und eine Zeitverschiebung  $t_0$ . Zwei hintereinander ausgeführte GT lassen sich durch eine einzige GT bewirken. Zu jeder GT gibt es eine Inverse, die durch die negativen Werte der 10 Parameter charakterisiert ist. Die GT bilden also eine *Gruppe*.

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen transformieren sich offenbar wie

$$m_i \ddot{x}_i = K_i \quad \rightarrow \quad m_i \ddot{x}'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} K_j \equiv K'_i$$

wobei  $K'_i$  i.A. ungleich  $K_i$  ist. Die Bewegungsgleichung ist also *forminvariant* oder *kovariant*, aber nicht invariant.

Für ein abgeschlossenes System von  $N$  Massenpunkten gilt, wie früher gezeigt

$$\vec{K}_\nu = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_\nu} U(\{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|\})$$

für das  $\nu$ -te Teilchen. Da der *Abstand*  $|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|$  unter GT invariant ist, gilt hier

$$(K'_\nu)_i = \sum_j \alpha_{ij} (K_\nu)_j = \sum_j \alpha_{ij} \left( -\frac{\partial}{\partial x_j^\nu} \right) U(\{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|\}) = -\frac{\partial}{\partial x_i^{\nu'}} U(\{|\vec{r}_\nu' - \vec{r}_\mu'|\})$$

also der gleiche Ausdruck in den neuen Koordinaten wie in den alten Koordinaten. Dabei wurde benutzt

$$\sum_j \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \alpha_{ij} \sum_l \frac{\partial x_l'}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l'} = \sum_{j,l} \alpha_{ij} \alpha_{lj} \frac{\partial}{\partial x_l'} = \frac{\partial}{\partial x_i'}$$

Damit sind die Newton'schen Bewegungsgleichungen für *abgeschlossene* Systeme *invariant* unter GT.

### Grenzen der Galileiinvarianz

Die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik sind nicht kovariant unter GT. Sie beschreiben die Ausbreitung von Wellenfronten mit der Geschwindigkeit  $c$  (Lichtgeschwindigkeit). Bei GT mit Geschwindigkeit  $v$  würde also  $\dot{x} = c$  in  $\dot{x}' = c + v$  übergehen. Experimentell wird aber  $\dot{x}' = c$  beobachtet.

Falls man experimentell ausschließen kann, dass es ein bevorzugtes IS gibt (definiert durch ein Medium „Äther“, das die Lichtwelle trägt), bleibt nur die Möglichkeit das Transformationsgesetz zwischen IS zu ändern. Dies wird im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie durch die Lorentztransformation LT erreicht. Die GT ergibt sich dann als Grenzfall der LT für Geschwindigkeiten  $v \ll c$ .

## 4.2 Beschleunigte Bezugssysteme

In beschleunigten Bezugssystemen gelten die Newton'schen Axiome nicht. Wir geben im Folgenden die Zusatzterme in den Bewegungsgleichungen für linear beschleunigte und für rotierende Bezugssysteme an.

### i) Lineare Beschleunigung

Das vorher definierte Bezugssystem  $KS'$  sei relativ zu  $IS$  *konstant* beschleunigt, d.h. für den Abstandsvektor  $\vec{d}$ , der die Koordinatenursprünge verbindet, gilt

$$\vec{d}(t) = \frac{1}{2} \vec{b} t^2 \quad \text{und damit:} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \frac{1}{2} \vec{b} t^2$$

Vorausgesetzt dass  $t' = t$ , transformiert sich das 1. Axiom

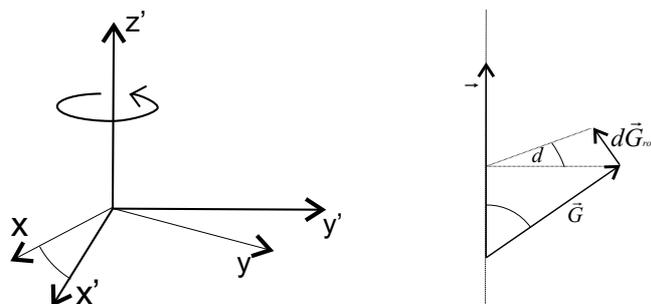
$$m\ddot{\vec{r}}(t) = 0; IS \quad \rightarrow \quad m\ddot{\vec{r}}'(t) = -m\vec{b}; KS'$$

Es wirkt also in  $KS'$  eine konstante Kraft, die als *Scheinkraft* bezeichnet wird.

Beispiel: In einem frei im Schwerfeld der Erde fallenden Laborraum wird die Schwerkraft exakt durch die Scheinkraft der gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung kompensiert.

## ii) Rotierendes Bezugssystem

Wir betrachten ein Koordinatensystem  $KS'$ , das relativ zum Ruhesystem  $IS$  um eine Drehachse  $\hat{\omega}$  um den Winkel  $\varphi(t)$  gedreht wird. Wir definieren die *Winkelgeschwindigkeit*  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$  und den Vektor  $\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$



Ein Vektor  $\vec{G}$ , der im System  $KS'$  zeitunabhängig ist, wird vom System  $IS$  aus betrachtet zeitabhängig. Die Änderung von  $\vec{G}$  im infinitesimalen Zeitintervall  $dt$  ist

$$d\vec{G}_{\text{rot}} = d\varphi(\hat{\omega} \times \vec{G}) = (\vec{\omega} \times \vec{G})dt$$

denn  $\hat{\omega} \times \vec{G}$  ist ein Vektor senkrecht zu  $\hat{\omega}$  und  $\vec{G}$  mit Betrag  $G \cdot |\sin \theta| =$  Abstand zur Drehachse

Für einen zeitabhängigen Vektor  $\vec{G}(t)$  gilt analog

$$d\vec{G}_{\text{IS}} = d\vec{G}_{\text{KS}'} + [\vec{\omega} \times \vec{G}(t)]dt$$

und damit gilt für die Zeitableitung von  $\vec{G}$

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{IS}} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{\text{KS}'} + \vec{\omega} \times \vec{G}(t)}$$

Anwendung auf die Bewegungsgleichung eines Massenpunkts ergibt  
i) für die Geschwindigkeit ( $\vec{r} : IS$ ,  $\vec{r}' : KS'$ )

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

ii) für die Beschleunigung

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$$

iii) für das 1. Axiom

$$m\ddot{\vec{r}} = 0$$

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{-2m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} \underbrace{-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}_{\text{Trägheitskraft}}$$

Die Trägheitskraft entsteht durch die *Winkelbeschleunigung*.

Im rotierenden System treten also Scheinkräfte auf mit folgenden Eigenschaften:

a) Zentrifugalkraft: „Fliehkraft“

- Richtung:  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'\omega^2$  radial nach außen,  $\perp \vec{\omega}$

- Betrag:  $\omega^2 r' \sin \theta$

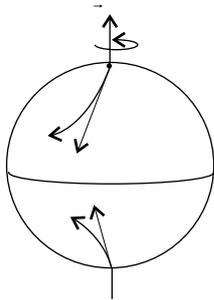
b) Corioliskraft:

- Richtung:  $\perp \vec{\omega}$  und  $\perp \dot{\vec{r}}'$

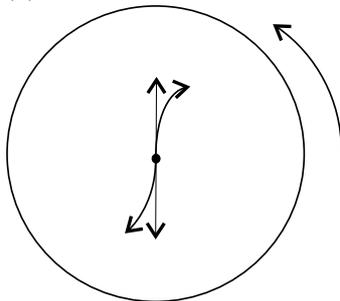
- Betrag:  $\omega v \cdot \sin \chi$  ,  $\chi = \angle(\vec{\omega}, \vec{v})$

Beispiel:

(1) Windbewegung auf der rotierenden Erdkugel



(2) Foucault'sches Pendel



Andere Ableitung der Beschleunigung im rotierenden System:

Vektoren im IS:  $\vec{G}$  und im rotierenden KS:  $\vec{G}'$  sind durch Drehmatrix verknüpft (z-Achse  $\parallel \vec{\omega}$  o.B.d.A)

$$\vec{G}(t) = D(t)\vec{G}'(t) = \sum_{j=1}^3 D_{ij}(t)G'_j(t) \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{G}} = D(t)\dot{\vec{G}}' + \dot{D}\vec{G}'$$

Vergleich mit  $\dot{\vec{G}}|_{IS} = \dot{\vec{G}}|_{KS'} + \vec{\omega} \times \vec{G}_{KS'}$

liefert  $\dot{D} = D \cdot \vec{\omega} \times \dots$

$$\text{oder } \dot{D}_{ij} = \sum_{lk} D_{il} \epsilon_{lkj} \omega_k = \begin{pmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\varphi}$$

Anwendung auf  $\vec{r}$ :

$$\dot{\vec{r}} = D \cdot (\dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Anwendung auf  $\dot{\vec{r}}$ :

$$\ddot{\vec{r}} = D \ddot{\vec{r}}' + 2\dot{D} \dot{\vec{r}}' + \ddot{D} \cdot \vec{r}'$$

$$\ddot{D} = \dot{D} \cdot \vec{\omega} \times \dots + D \cdot \dot{\vec{\omega}} \times \dots = D \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \dots + \dot{\vec{\omega}} \times \dots)$$

$$\ddot{\vec{r}} = D \cdot \left[ \ddot{\vec{r}}' + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \right]$$

# Kapitel 5

## Starrer Körper

### 5.1 Kinematik

Die Bewegung eines starren Körpers ist wesentlich reichhaltiger als die eines Massenpunkts. Wir betrachten zunächst die grundlegende Beschreibung der Bewegung, d.h. die Zahl und die Definition der Freiheitsgrade sowie der Bewegungsgrößen.

Ein starrer Körper besteht aus einer beliebigen Anzahl von Massenpunkten, die starr miteinander verbunden sind und daher feste Abstände besitzen:

- 1)  $N$  Massenpunkte  $m_n$  in Positionen  $\vec{r}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$
- 2)  $|\vec{r}_n - \vec{r}_m| = r_{nm} = \text{const.}$  ,  $n, m = 1, \dots, N$

Diese  $\frac{1}{2}N(N - 1)$  Zwangsbedingungen sind jedoch nicht unabhängig. Für  $N = 3$  ergeben sich *drei* Zwangsbedingungen. Falls für  $N$  Massenpunkte  $R_N$  Zwangsbedingungen existieren, sind es für  $N + 1$  Massenpunkte  $R_{N+1} = R_N + 3$ , denn die Angabe von 3 Abständen legt die Position des  $(N + 1)$ -ten Teilchens fest. Daraus folgt:  $R_N = 3(N - 2)$

Die Zahl der Freiheitsgrade ist damit

$$f = 3N - R_N = 6$$

unabhängig von  $N$ .

Die 6 Freiheitsgrade ergeben sich unmittelbar, wenn man zunächst die 3 Schwerpunktskoordinaten abspaltet. Die verbleibenden Freiheitsgrade im Schwerpunktssystem ( $\vec{R} = 0$ ) sind Drehungen um alle möglichen Achsen durch den Schwerpunkt, von denen es in 3 Dimensionen 3 unabhängige, z.B. die Drehungen um drei kartesische Achsen, gibt.

Auch wenn irgendein anderer Punkt des Körpers festgehalten wird, bleiben nur die 3 Drehfreiheitsgrade übrig. Diese Systeme nennt man *Kreisel*.

### Winkelgeschwindigkeit

Wir definieren 2 Koordinatensysteme, ein *körperfestes* KS:  $x_1, x_2, x_3$  mit Achsen  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  und ein *raumfestes* IS:  $x, y, z$  mit Achsen  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ .

Die Basisvektoren  $\hat{e}_i(t)$  sind i.A. zeitabhängig, d.h. KS ist kein Inertialsystem.

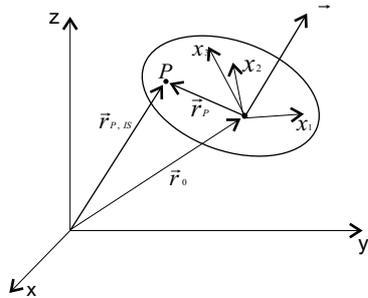
Der Ursprung des körperfesten KS habe im IS den Ortsvektor  $\vec{r}_0(t)$ , seine Geschwindigkeit sei  $\vec{v}_0(t)$ .

Das körperfeste KS drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}(t) = \hat{\omega}(t) \cdot \omega(t) \quad , \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

relativ zu IS, wobei  $d\varphi$  der Drehwinkel im Zeitelement  $dt$  zur Zeit  $t$  um die *momentane* Achse  $\hat{\omega}$  ist. Sowohl  $\hat{\omega}$  als auch  $\omega$  sind i.A. zeitabhängig.

Ein beliebiger Punkt  $P$  des starren Körpers habe den Ortsvektor  $\vec{r}_{P,IS}$  im IS.



Der Vektor vom Ursprung 0 von KS zum Punkt P ist

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{P,IS} - \vec{r}_0$$

und die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  im IS ist

$$\vec{v}_{IS} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}_P}{dt}$$

Da der Punkt  $P$  in KS ruht, also

$$\left( \frac{d\vec{r}_P}{dt} \right)_{KS} = 0 \quad \text{gilt also}$$

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{r}_P}{dt} \right)_{IS} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_P}$$

auch wenn  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ .

Wir wollen nun untersuchen, ob diese Gleichung von der Wahl des Ursprungs von KS abhängt. Wir nehmen an, dass bei Wahl des Ursprungs  $0'$  mit  $\vec{r}'_0 = \vec{r}_0 - \vec{a}$  die Winkelgeschwindigkeit von KS durch  $\vec{\omega}'$  gegeben sei. Damit gilt für den Punkt  $P$

$$\vec{v}_{P,IS} = \vec{v}'_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_P$$

während vorher

$$\vec{v}_{P,IS} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_P \quad \text{war.}$$

$$\text{Wegen} \quad \vec{r}'_P = \vec{r}_P + \vec{a}$$

muss also

$$\vec{v}'_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P + \vec{a}) \stackrel{!}{=} \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

gelten.

Da diese Gleichung für alle  $\vec{r}_P$  gelten muss, folgt

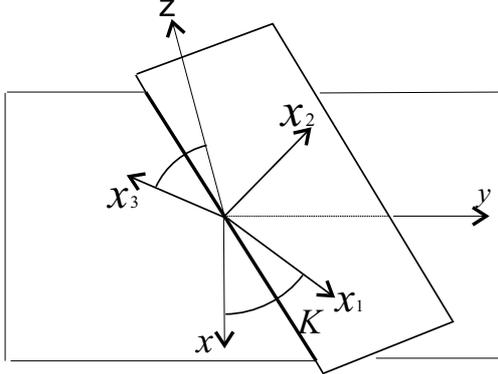
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

$$\text{und } \vec{v}_0 = \vec{v}_0' + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  hängt also *nicht* von der Wahl von KS ab, sondern charakterisiert den Rotationszustand des Körpers in eindeutiger Weise.

### Euler'sche Winkel

Da aufeinanderfolgende Drehungen des KS nicht miteinander vertauschen, wenn sie nicht um die gleiche Achse stattfinden, ist die Definition verallgemeinerter Koordinaten für eine allgemeine Drehung nicht trivial. Die von dem deutsch-russischen Mathematiker Euler angegebene Parametrisierung ist am gebräuchlichsten:



Wir definieren zunächst eine „Knotenlinie“  $K$  als Schnittgerade der  $x$ - $y$ -Ebene mit der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Der Einheitsvektor  $\hat{e}_K$  bildet mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\phi$ , mit der  $x_1$ -Achse den Winkel  $\psi$ . Als dritte Variable  $\theta$  wählt man den Winkel zwischen  $z$ -Achse und  $x_3$ -Achse.

Man kann sich die „schiefe“ Lage eines Körpers mit Eulerwinkeln  $(\psi, \theta, \phi)$  vorstellen als entstanden aus drei aufeinanderfolgenden Drehungen:

1. Drehung um die  $z$ -Achse mit Winkel  $\phi$
2. Drehung um die  $x$ -Achse mit Winkel  $\theta$
3. Drehung um die  $z$ -Achse mit Winkel  $\psi$

Wir definieren Winkelgeschwindigkeiten für jede dieser drei Drehungen:

$$\vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} \hat{e}_3$$

$$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \hat{e}_K$$

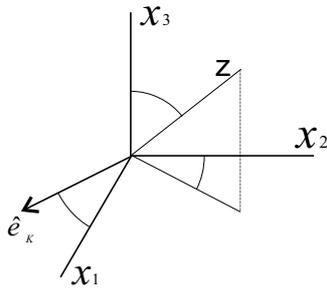
$$\vec{\omega}_\phi = \dot{\phi} \hat{e}_z$$

wobei die Richtungen  $\hat{e}_K$  und  $\hat{e}_z$  im KS so gegeben sind:

$$\hat{e}_K = \cos \psi \hat{e}_1 - \sin \psi \hat{e}_2 = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_z = \sin \theta \sin \psi \hat{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3$$

(folgt aus Projektion der  $z$ -Achse in die  $x_1 - x_2$ -Ebene).



Ein beliebiger Vektor der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  lässt sich zerlegen in die drei Komponenten

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\phi$$

denn infinitesimale Drehungen, die nacheinander ausgeführt werden, sind additiv:

$$d\vec{\varphi} = \vec{\omega}_\psi dt + \vec{\omega}_\theta dt + \vec{\omega}_\phi dt + O(dt^2)$$

Für Drehungen um endliche Winkel gilt ein komplizierter nichtlinearer Zusammenhang, den wir später betrachten werden.

Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  kann wahlweise im System KS oder IS dargestellt werden.

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 \quad KS$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{e}_x + \omega_y \hat{e}_y + \omega_z \hat{e}_z \quad IS$$

Dabei sind die Komponenten in KS gegeben durch

$$\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_1 = (\dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_K + \dot{\phi} \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi$$

$$\omega_2 = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$$

$$\omega_3 = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

Diese Ausdrücke werden später für die Lagrangeformulierung in den verallgemeinerten Koordinaten  $\psi, \theta, \phi$  benötigt.

### Ergänzung zu den „Euler-Drehungen“:

Die Drehung eines Vektors wird durch eine „Drehmatrix“ beschrieben.

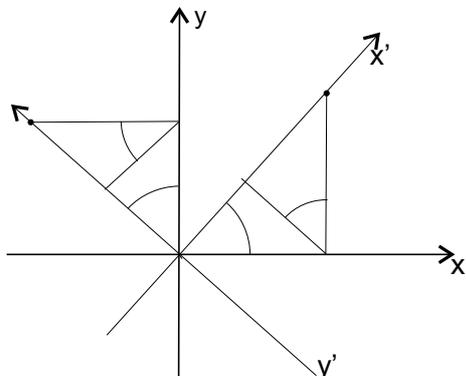
$$x'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} x_j$$

Für Drehungen um die  $z$ -Achse gilt:

$$z' = z \text{ (oder } x'_3 = x_3)$$

$$y' = \cos \phi y - \sin \phi x$$

$$x' = \cos \phi x + \sin \phi y$$



also

$$D(\hat{z}, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog gilt für Drehungen um die  $x$ -Achse

$$D(\hat{x}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Eine allgemeine Drehung um die Eulerwinkel  $\psi, \theta, \phi$  wird also beschrieben durch die Drehmatrix

$$D(\psi, \theta, \phi) = D(\hat{z}, \phi) \cdot D(\hat{x}, \theta) \cdot D(\hat{z}, \psi)$$

wobei aufeinanderfolgende Drehungen durch das Matrixprodukt beschrieben werden.

## 5.2 Trägheitstensor

### Kinetische Energie

Die kinetische Energie eines Systems von  $N$  Massenpunkten ist

$$T = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m_n \dot{\vec{r}}_{nIS}^2$$

Mit  $\vec{r}_n = \vec{r}_{nIS} - \vec{r}_0$  und  $\dot{\vec{r}}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n$  folgt

$\dot{\vec{r}}_{nIS} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n$  und damit ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \left\{ \dot{\vec{r}}_0^2 + 2\dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \right\}$$

Wir setzen voraus, dass entweder  $\dot{\vec{r}}_0 = 0$  (Ursprung im Unterstützungspunkt des Kreisel) oder  $\sum m_n \vec{r}_n = 0 \rightarrow \vec{R} = 0$  in KS.

Dann separieren wir Translation und Rotation:

$$T = \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

In KS gilt mit  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $\vec{r}_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3})$  und  $(\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 = \omega^2 r_n^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)^2$ :

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j}) \omega_i \omega_j$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_i \omega_j$$

Das *Trägheitsmoment*  $\Theta$  ist in Analogie zu sehen zur Masse  $m$ , ist also eine Eigenschaft des starren Körpers:

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

Im Gegensatz zur Masse ist  $\Theta$  i.A. eine Tensorgröße

$$\Theta_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - x_{n,i} x_{n,j}) \quad \text{Trägheitstensor}$$

In vielen Fällen besitzt ein Körper eine so große Zahl von Massenpunkten (Atome, Atomkerne, Elektronen), dass es sinnvoll ist, eine kontinuierliche Massenverteilung anzugeben, als Quotient der Summe der Massen in einem Volumenelement  $\Delta V$  um  $\vec{r}$ , und  $\Delta V$ :

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V} \quad \text{Massendichte}$$

wobei  $\Delta m(\vec{r}) = \sum_n m_n = \sum_{\alpha=1}^{N_0} m_{(\nu,\alpha)}$  (mit  $n \in \Delta V$  um  $\vec{r}$ )

Wir teilen das Volumen in  $N_1$  Teilvolumina  $\Delta V$  mit je  $N_0$  Teilchen auf. Die Summe über die einzelnen Teilchen lässt sich dann durch ein Integral über ein Volumen ersetzen.

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} &= \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{\Delta V} (\vec{r}_n^2 \delta_{ij} - x_i^{(n)} x_j^{(n)}) \Delta V \\ &= \sum_{\nu=1}^{N_1} \left( \sum_{\alpha=1}^{N_0} \frac{m_{(\nu,\alpha)}}{\Delta V} \right) (\vec{r}_{(\nu,\alpha)}^2 \delta_{ij} - x_i^{(\nu,\alpha)} x_j^{(\nu,\alpha)}) \Delta V \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Theta_{ij} = \int d^3r \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

wobei

$$\vec{r} = \frac{1}{N_0} \sum_{\alpha=1}^{N_0} \vec{r}_{(\nu, \alpha)}$$

der Ort des  $\nu$ -ten Volumenelements  $\Delta V$  ist.

## Drehimpuls

Die relevante Bewegungsgröße für Drehbewegungen ist der Drehimpuls. Je nach Bezugssystem und Bezugspunkt können wir definieren

$$\vec{L}_{IS} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_{n,IS} \times \dot{\vec{r}}_{n,IS})$$

bezogen auf den Ursprung von IS,

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n)$$

bezogen auf den Ursprung von KS.

Die Zeitableitung bezieht sich in beiden Fällen auf IS. Da wir i.A. an Drehbewegungen des starren Körpers um seinen Schwerpunkt, bzw. einen anderen festgehaltenen Punkt interessiert sind, und nicht an Drehungen des starren Körpers um eine Achse außerhalb, betrachten wir den 2. Ausdruck. Mit Hilfe von

$$\dot{\vec{r}}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n$$

ergibt sich

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)$$

und mit

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \quad \text{ist}$$

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{n=1}^N m_n \sum_{j=1}^3 (r_n^2 \delta_{ij} - x_i^{(n)} x_j^{(n)}) \omega_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j \quad \text{in den kartesischen Koordinaten von KS.} \end{aligned}$$

Andere Schreibweisen dieser Zusammenhänge ergeben sich durch die Definition der Matrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix}$$

und der Spaltenvektoren

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

als

$$L = \Theta \omega$$

oder, darstellungsunabhängig unter Verwendung der Einheitsvektoren mit Definition der *Dyade*

$$\overleftrightarrow{\Theta} = \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} \hat{e}_i \circ \hat{e}_j$$

als

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}$$

Das *dyadische Produkt* oder Tensorprodukt zweier Vektoren ist so definiert, dass gilt

$$(\hat{e}_i \circ \hat{e}_j) \cdot \vec{a} = \hat{e}_i (\hat{e}_j \cdot \vec{a})$$

und

$$\vec{a} \cdot (\hat{e}_i \circ \hat{e}_j) = (\vec{a} \cdot \hat{e}_i) \hat{e}_j$$

oder auch

$$(\hat{e}_i \circ \hat{e}_j) \times \vec{a} = \hat{a}_i \circ (\hat{e}_j \times \vec{a}) \quad \text{etc.}$$

Damit lässt sich die kinetische Energie schreiben als

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \omega^T \Theta \omega = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}$$

wobei  $\omega^T$  die zu  $\omega$  *transponierte* Matrix bezeichnet. Die Transposition vertauscht Zeilen und Spalten einer Matrix und macht aus einem Spaltenvektor einen Zeilenvektor:

$$A_{ij}^T = A_{ji}$$

$$\omega^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Das *Trägheitsmoment*  $\Theta_{nn}$  bezüglich einer Drehachse  $\hat{n}$  ergibt sich aus  $\overleftrightarrow{\Theta}$  durch skalare Multiplikation mit  $\hat{n}$

$$\Theta_{\hat{n}\hat{n}} = \hat{n} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \hat{n}$$

### Transformation auf Hauptachsen

Die Matrix  $\Theta$  ist reell und symmetrisch:

$$\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$$

und kann damit durch eine geeignete orthogonale Transformation  $\alpha$  diagonalisiert werden:

$$\Theta' = \alpha \Theta \alpha^T = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

dabei ist  $\alpha$  eine bestimmte orthogonale Matrix (siehe später).

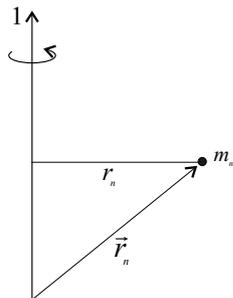
Die drei Größen  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  nennt man die *Eigenwerte* der Matrix  $\Theta$ . Sie stellen die *Hauptträgheitsmomente* dar.

Die Transformation  $\alpha$  entspricht einer (zeitunabhängigen) Drehung des körperfesten Koordinatensystems  $KS \rightarrow KS'$ , in dem  $\Theta$  eine Diagonalmatrix ist, das sog. *Hauptachsensystem*.

Für die Hauptträgheitsmomente gilt:

$$\Theta_1 = \Theta'_{11} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n^2 - x_{n,1}^2) = \sum_{n=1}^N m_n (x_{n,2}^2 + x_{n,3}^2) \geq 0$$

und zyklisch. Die Masse  $m_n$  trägt also zu  $\Theta_1$  bei mit dem Gewicht ihres Abstandsquadrats zur Achse 1.



Bestimmung von  $\alpha$ :

Wir gehen aus von einem gegebenen Trägheitstensor in KS:  $\Theta = (\Theta_{ij})$

Es soll  $\alpha$  bestimmt werden, so dass

$$\Theta' = \alpha \Theta \alpha^T \quad \text{diagonal ist, oder}$$

$$\Theta'_{ij} = \sum_{l,k} \alpha_{il} \Theta_{lk} \alpha_{kj}^T = \Theta_i \delta_{ij} \quad (*)$$

Für orthogonale Matrizen gilt  $\alpha^{-1} = \alpha^T$ , d.h.

$$\alpha \alpha^T = \alpha^T \alpha = I \quad \text{Einheitsmatrix}$$

Wir multiplizieren (\*) von links mit  $\alpha^T$

$$\sum_{k=1}^3 \Theta_{ik} \alpha_{kj}^T = \alpha_{ij}^T \Theta_j$$

und definieren Vektoren

$$\omega^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^T \\ \alpha_{2j}^T \\ \alpha_{3j}^T \end{pmatrix}$$

$$\text{so, dass} \quad \Theta \omega^{(j)} = \Theta_j \omega^{(j)} \quad , \quad j = 1, 2, 3$$

Dieses System von linearen homogenen Gleichungen hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\det(\Theta - \Theta_j I) = 0$$

wobei  $I$  die Einheitsmatrix ist. Die Determinante ist ein Polynom 3. Grades in  $\Theta_j$  mit den drei Nullstellen  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ . Diese sind die *Eigenwerte* von  $\Theta$ . Die Eigenvektoren sind die  $\omega^{(j)}$ . Sie sind orthogonal,

$$\left( \omega^{(i)} \right)^T \omega^{(j)} = \delta_{ij},$$

falls  $\Theta_i \neq \Theta_j$ , was aus

$$\left. \begin{array}{l} (\omega^{(j)})^T \cdot | \quad \Theta \omega^{(i)} = \Theta_i \omega^{(i)} \\ (\omega^{(i)})^T \cdot | \quad \Theta \omega^{(j)} = \Theta_j \omega^{(j)} \end{array} \right\} \Rightarrow (\Theta_i - \Theta_j)(\omega^{(i)})^T \omega^{(j)} = 0$$

folgt. Falls  $\Theta_i = \Theta_j$  können  $\omega^{(i)}$  und  $\omega^{(j)}$  orthogonal gewählt werden.

Die Eigenwerte  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  sind darstellungsunabhängige Größen, die den Körper bezüglich seiner Rotationseigenschaften um Achsen durch den gewählten Ursprung von KS charakterisieren. Dies folgt aus der Invarianz des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\Theta' - \Theta_i I) = \det[\alpha(\Theta - \Theta_i I)\alpha^T] = \det(\alpha) \det(\Theta - \Theta_i I) \det(\alpha^T) = \det(\Theta - \Theta_i I)$$

denn  $\det(\alpha\alpha^T) = \det(\alpha) \det(\alpha^T) = \det(I) = 1$

Die physikalische Bedeutung der Hauptachsen ist, dass bei Rotation um eine Hauptachse Drehimpuls  $\vec{L}$  und Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  parallel sind.

Bei Körpern mit symmetrischem Aufbau sind die Hauptachsen parallel zu den Symmetrieachsen.

Wenn der Trägheitstensor  $\Theta$  eines Körpers bezüglich eines beliebigen körperfesten Bezugspunkts einmal bekannt ist, ergibt sich der Trägheitstensor  $\Theta'$  bezüglich eines beliebigen anderen Punkts, z.B. um  $\vec{a}$  verschoben, durch eine einfache Umrechnung:

$$\Theta'_{ij} = \sum_{n=1}^N m_n [(\vec{r}_n + \vec{a})^2 \delta_{ij} - (x_{n,i} + a_i)(x_{n,j} + a_j)] \quad (5.1)$$

$$= \sum_n m_n [(\vec{r}_n^2 + 2\vec{r}_n \cdot \vec{a} + \vec{a}^2) \delta_{ij} - (x_{n,i}x_{n,j} + x_{n,i}a_j + x_{n,j}a_i + a_i a_j)] \quad (5.2)$$

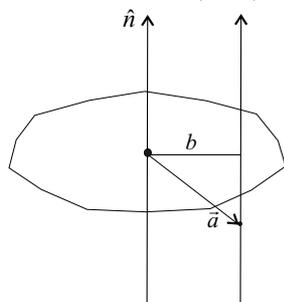
$$= \Theta_{ij} + M \left[ (2\vec{R} \cdot \vec{a} + a^2) \delta_{ij} - (R_i a_j + R_j a_i + a_i a_j) \right] \quad (5.3)$$

wobei  $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_n m_n \vec{r}_n$  der Schwerpunktsvektor ist.

Falls  $\Theta_{ij}$  sich auf ein KS mit Ursprung im Schwerpunkt bezieht, ist  $\vec{R} = 0$ . Für das Trägheitsmoment  $\Theta_{\hat{n}\hat{n}}$  um eine Achse  $\hat{n}$  durch den Ursprung und  $\Theta'_{\hat{n}\hat{n}}$  um eine dazu parallel verschobene Achse gilt der *Steiner'sche Satz*:

$$\Theta'_{\hat{n}\hat{n}} = \Theta_{\hat{n}\hat{n}} + Mb^2$$

wobei  $\vec{b} = \vec{a} - \hat{n}(\vec{a} \cdot \hat{n})$



Nachtrag: Drehungen bzw. Spiegelungen des Raums (bzw. des KS) bilden die Gesamtheit der Operationen, die die Abstände zwischen Massenpunkten konstant halten:

Aus  $x'_n = \alpha x_n$  (oder  $\vec{r}'_n = \vec{\alpha} \cdot \vec{r}_n$ ) und

$$|\vec{r}_n - \vec{r}_m|^2 = |\vec{r}'_n - \vec{r}'_m|^2 \rightarrow \sum_i \sum_k \alpha_{ik} \Delta x_k \sum_j \alpha_{ij} \Delta x_j \stackrel{!}{=} \sum_j (\Delta x_j)^2$$

folgt  $\sum_i \alpha_{ik}^T \alpha_{ij} = \delta_{jk} \rightarrow \alpha^T \alpha = I$  orthogonale Transformation

### Definition und Eigenschaften von Tensoren

Eine Größe  $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , die die Komponenten eines von den Koordinaten abhängigen Objekts in einem kartesischen Koordinatensystem ( $i_j = 1, 2, 3$ ) beschreibt, heißt Tensor N-ter Stufe, falls unter orthogonalen Transformationen (Drehungen und Spiegelungen)  $\alpha_{im}$  folgendes Verhalten gilt:

$$A'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{m_1=1}^3 \dots \sum_{m_N=1}^3 \alpha_{i_1 m_1} \alpha_{i_2 m_2} \dots \alpha_{i_N m_N} A_{m_1 m_2 \dots m_N}$$

Tensoren nullter Stufe: A (keine Indizes), *invariant* unter orthog. Transformationen, heißen *Skalare*

Tensoren erster Stufe:  $A'_i = \sum_n \alpha_{in} A_n$  *Vektoren*

Tensoren zweiter Stufe:  $A'_{i_1 i_2} = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \alpha_{i_1 m_1} \alpha_{i_2 m_2} A_{m_1 m_2}$

(Merke:  $A' = \alpha A \alpha^T$ )

Rechenoperationen mit Tensoren:

1. Addition:  $\beta A_{i_1 \dots i_N} + \gamma B_{i_1 \dots i_N} = C_{i_1 \dots i_N}$

2. Multiplikation

a) Direkte Multiplikation:  $A_{i_1 \dots i_N} B_{i_{N+1} \dots i_{N+M}} = C_{i_1 \dots i_{N+M}}$  Tensor (N+M)-ter Stufe

b) Skalare Multiplikation:  $\sum_{j_1 \dots j_L} A_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_L} B_{j_1 \dots j_L i_{N+1} \dots i_{N+M}} = C_{i_1 \dots i_{N+M}}$

3. Kontraktion von Indizes:  $\sum_{k=1}^3 A_{i_1 \dots k \dots k \dots i_N} = C_{i_1 \dots i_{N-2}}$  Tensor (N-2)-ter Stufe

### Pseudotensoren

Levi-Civita-Tensor

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, k, l) = (1, 2, 3) \text{ und zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } (i, k, l) = (2, 1, 3) \text{ und zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\epsilon'_{ikl} = \sum_{i'} \sum_{k'} \sum_{l'} \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \alpha_{ll'} \epsilon_{i'k'l'}$$

für  $i = k$  gilt:  $\epsilon'_{iil} = \sum_{i',k',l'} \underbrace{\alpha_{ii'} \alpha_{ik'}}_{\delta_{i'k'}} \alpha_{ll'} \epsilon_{i'k'l'} = 0$

für  $(i, k, l) = (1, 2, 3)$ :  $\epsilon'_{123} = \sum_{i',k',l'} \alpha_{1i'} \alpha_{2k'} \alpha_{3l'} \epsilon_{i'k'l'} = \det \alpha$

und ebenso für beliebige Permutationen von  $(1, 2, 3)$ .

Damit ist  $\epsilon'_{ikl} = \det \alpha \epsilon_{ikl}$

Definition:

Eine Größe  $A_{i_1 \dots i_N}$ , die sich wie

$$A'_{i_1 \dots i_N} = \det(\alpha) \sum \alpha_{i_1 m_1} \dots \alpha_{i_N m_N} A_{m_1 \dots m_N}$$

transformiert, heißt *Pseudotensor* N-ter Stufe.

Bemerkung zu  $\det \alpha$ :

Aus  $\det \alpha = \det \alpha^T$  und  $\det(\alpha^T \alpha) = 1 = \det(\alpha^T) \det(\alpha) = (\det \alpha)^2$

folgt  $\det \alpha = \pm 1$ .

Falls  $\det \alpha = 1$  handelt es sich um eigentliche Drehungen,

falls  $\det \alpha = -1$  sind noch Spiegelungen an Ebenen, bzw. Inversion ( $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ) eingeschlossen.

Bsp:

Spiegelung an x-y-Ebene:  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Inversion:  $\alpha = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### 5.3 Euler'sche Gleichungen

Die Bewegungsgleichung für Rotationen eines starren Körpers ist die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls  $\vec{L}$ , die wir schon früher betrachtet hatten

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$$

wobei  $\vec{M}$  das auf den Körper wirkende Drehmoment ist. Im körperfesten Koordinatensystem KS gilt

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}$$

wie im letzten Abschnitt gezeigt.

Das Drehmoment  $\vec{M}$  ist durch die äußeren Kräfte  $\vec{K}_n^{(a)}$  gegeben, die an den n-ten Massenpunkt angreifen.

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{K}_n^{(a)}$$

Wie früher gezeigt, tragen die Wechselwirkungskräfte zwischen den Massenpunkten nicht zu  $\vec{M}$  bei.

Zweckmäßig legen wir das körperfeste KS parallel zu den Hauptachsen des Trägheitstensors  $\Theta$ . Dann ist

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$$

in KS, und

$$\left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{IS} = \left( \frac{d}{dt} (\overleftarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}) \right)_{IS} = \left( \frac{d}{dt} (\overleftarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}) \right)_{KS} + \vec{\omega} \times (\overleftarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega}) = \vec{M}$$

sowie

$$\left( \frac{d}{dt} \overleftarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} \right)_{KS} = \left( \overleftarrow{\Theta} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_{KS}$$

folgt für die Komponenten von  $\vec{\omega}$  in KS (Hauptachsen!) das System von drei gekoppelten DGL 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_3 \omega_1 &= M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned}$$

die sogenannten *Euler'schen Gleichungen* des starren Körpers.

Die Komponenten von  $\vec{\omega}$ , p,q,r sind wie früher bereits abgeleitet mit den Eulerwinkeln  $\phi, \theta, \psi$  verknüpft durch

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Nachteil dieser Formulierung ist, dass das Drehmoment durch seine Komponenten im körperfesten KS darzustellen ist, i.A. aber im IS gegeben ist. Die Umrechnung von IS auf KS erfordert aber die Kenntnis der Bewegung des Körpers, also die Lösung des Problems.

Wir betrachten deshalb in diesem Abschnitt nur die kräftefreie Rotation, wie sie z.B. näherungsweise für einen Satelliten im Weltraum gegeben ist.

## Freie Rotation um eine Hauptachse

Die kräftefreie Bewegung eines Massenpunkts ist gleichförmig und geradlinig, d.h.  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \text{const.}$  Es ist deshalb naheliegend, zu *vermuten*, dass im Falle der Rotationsbewegung die Winkelgeschwindigkeit konstant sein wird. Aus  $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$  folgt

$$\begin{aligned}(\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 &= 0 \\(\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1 &= 0 \\(\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 &= 0\end{aligned}$$

Für  $\Theta_1 \neq \Theta_2$ ,  $\Theta_2 \neq \Theta_3$ ,  $\Theta_3 \neq \Theta_1$  existiert eine Lösung nur falls mindestens zwei Komponenten von  $\vec{\omega}$  Null sind, also

$$\begin{aligned}\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const.} \quad , \quad \omega_2 = \omega_3 = 0 \\ \text{oder } \omega_2 = \omega_2^0 = \text{const.} \quad , \quad \omega_3 = \omega_1 = 0 \\ \text{oder } \omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.} \quad , \quad \omega_1 = \omega_2 = 0\end{aligned}$$

Für  $\vec{M} = 0$  gilt Drehimpulserhaltung, also  $\vec{L} = \text{const.}$ , oder

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} = \Theta_1\omega_1\hat{e}_1 = \text{const.} \quad , \quad \hat{e}_1 = \text{Richtung der 1. Hauptachse}$$

für die erste Lösung. Damit ist  $\hat{e}_1 = \text{const.}$ , also zeitunabhängig.

Der Körper rotiert also um die erste Hauptachse  $\hat{e}_1$ , die in IS raumfest ist, mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ .

*Stabilität* der Lösung:

Es gibt drei derartige Lösungen für die drei Hauptachsen. Nur zwei davon sind stabil. Um dies zu zeigen, betrachten wir kleine Abweichungen von der gefundenen Lösung. Falls diese Abweichungen im Lauf der Zeit katastrophal anwachsen, ist die Lösung instabil.

Wir nehmen also an, es sei

$$\omega_1 = \omega_1^0 \quad , \quad \omega_2 \ll \omega_1^0 \quad , \quad \omega_3 \ll \omega_1^0$$

Dann können wir quadratische Terme von  $\omega_2, \omega_3$  vernachlässigen in den Eulergleichungen

$$\begin{aligned}\Theta_1\dot{\omega}_1 &= -(\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 \simeq 0 \\ \Theta_2\dot{\omega}_2 &= -(\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1 \simeq -(\Theta_1 - \Theta_3)\omega_3\omega_1^0 \\ \Theta_3\dot{\omega}_3 &= -(\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 \simeq -(\Theta_2 - \Theta_1)\omega_2\omega_1^0\end{aligned}$$

Das erhaltene System linearer DGL 1. Ordnung mit konst. Koeffizienten lässt sich durch den Ansatz mit der Exponentialfunktion lösen.

Zunächst folgt aus der 1. Gleichung nach wie vor  $\dot{\omega}_1 = 0$ , also  $\omega_1 = \text{const.} = \omega_1^0$ .  
Die 2. und 3. Gleichung lassen sich ineinander einsetzen und ergeben

$$\Theta_2 \ddot{\omega}_2 = -(\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1^0 \dot{\omega}_3 = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3} (\omega_1^0)^2 \omega_2$$

oder

$$\ddot{\omega}_2 + H \omega_2 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\omega}_3 + H \omega_3 = 0$$

mit

$$H = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2 \Theta_3}$$

Dies sind die DGL für einen ungedämpften Oszillator, also für ein schwingendes System, falls  $H > 0$   
Mit  $\omega_2 = \omega_2^0 e^{kt}$  folgt

$$k^2 \omega_2 + H \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm \sqrt{-H}$$

(i) Für  $H < 0$ , also  $\Theta_2 < \Theta_1 < \Theta_3$  oder  $\Theta_3 < \Theta_1 < \Theta_2$  ( $\Theta_1$  liegt zwischen  $\Theta_2$  und  $\Theta_3$ ) ist  $k$  reell,  $k = \pm k_0$ , und die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= a e^{-k_0 t} + b e^{+k_0 t} \\ \omega_3(t) &= c e^{-k_0 t} + d e^{+k_0 t} \end{aligned}$$

Falls  $b$  oder  $d \neq 0$  ist, steigt  $\omega_2$  oder  $\omega_3$  (oder beide) exponentiell an, womit die Instabilität der Lösung  $\omega_1 = \omega_1^0$ ,  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  gezeigt ist.

(ii) Für  $H > 0$  dagegen, also wenn  $\Theta_1$  das größte oder kleinste der Trägheitsmomente ist, folgt

$$k = \pm i \sqrt{H}$$

und

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \text{Re} \left\{ a e^{-i\sqrt{H}t} + b e^{i\sqrt{H}t} \right\} = a \cos(\sqrt{H}t + b) \\ \omega_2(t) &= \text{Re} \left\{ c e^{-i\sqrt{H}t} + d e^{i\sqrt{H}t} \right\} = c \cos(\sqrt{H}t + d) \end{aligned}$$

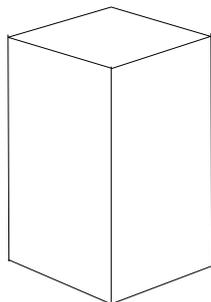
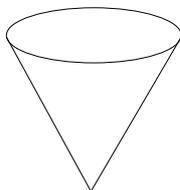
Die Lösung oszilliert also um  $\omega_2 = \omega_3 = 0$  mit kleinen Amplituden  $\ll \omega_1^0$ .

Die obige Überlegung zeigt, dass es zwar spezielle Lösungen gibt, die der naiven Erwartung „ $\omega = \text{const.}$ “ entsprechen, dass aber die allgemeine Lösung des kräftefreien Kreisels komplexer ist. Wir betrachten nun einen Spezialfall.

### Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Falls  $\Theta_1 = \Theta_2$  und  $\Theta_3 \neq \Theta_1$  spricht man von einem symmetrischen starren Körper oder Kreisel. Offenbar ist jeder rotationssymmetrische Körper von dieser Art, aber die Rotationssymmetrie ist nicht Voraussetzung.

Beispiele:



Kreiskegel

Parallelepiped (Quader mit quadratischer Grundfläche)

Eulergleichungen:

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}$$

Also ist  $\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.}$  und

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 - R\omega_2 &= 0 & , & & R = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \omega_3^0 \\ \dot{\omega}_2 + R\omega_1 &= 0\end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Differenzieren ergibt sich

$$\ddot{\omega}_1 + R^2 \omega_1 = 0$$

also eine Oszillorgleichung mit den Lösungen

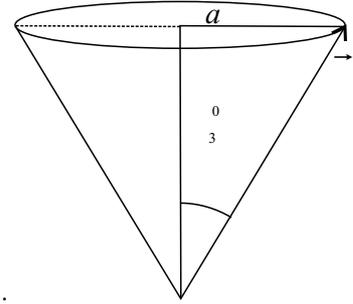
$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= a \sin(Rt + \psi_0) \\ \omega_2(t) &= a \cos(Rt + \psi_0)\end{aligned}$$

Diese Lösung stimmt für  $a \ll \omega_3^0$  mit der schon vorher gefundenen überein.

Da die Amplitude der Oszillationen von  $\omega_1(t)$  und  $\omega_2(t)$  gleich ist, ergibt sich, dass der Betrag der Winkelgeschwindigkeit zeitlich konstant ist:

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = a^2 + \omega_3^2 = \text{const.}$$

Die Projektion von  $\vec{\omega}$  auf die 3. Achse ist konstant ( $\omega_3^0$ ), während die Projektion in die  $x_1 = x_2$ -Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $R$  rotiert. Diese Bewegung heißt *Präzession*. Bei dieser Bewegung umfährt  $\vec{\omega}$



des sogenannten Polkegel, dessen Öffnungswinkel  $\gamma$  durch  $a$  und  $\omega_3^0$  gegeben ist.

$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_3^0} = \text{const.}$$

Erdrotation:

Die Drehachse  $\vec{\omega}$  stimmt fast mit der Figurenachse (Nordpol - Südpol) überein. Am Nordpol ist die Abweichung 10m, d.h.  $a \ll \omega_3^0$ . Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist durch die tägliche Erdrotation gegeben:

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}} \sim \omega_3^0$$

Damit ist die Präzessionsfrequenz für  $\vec{\omega}$

$$R = \frac{\Delta\Theta}{\Theta} \omega_3^0 \sim \frac{1}{430} \omega_3^0 \cdot \frac{2\pi}{\text{Jahr}}$$

wobei  $\Delta\Theta$  durch die Abplattung der Erdkugel zustande kommt.

Um den zeitlichen Verlauf der Bewegung vollständig zu bestimmen, müssen wir noch die Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeitskomponenten integrieren:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi = a \sin(Rt + \psi_0) \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = a \cos(Rt + \psi_0) \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi} = \omega_3^0 \end{aligned}$$

Um die Interpretation der Eulerwinkel zu vereinfachen, wählen wir die z-Achse des IS-Systems entlang des Drehimpulsvektors  $\vec{L}$ :

$$\vec{L} = L \hat{e}_z = \text{const.}$$

Für die Komponenten von  $\vec{L}$  im körperfesten System KS gilt dann

$$(L_1, L_2, L_3) = L \cdot (\hat{e}_z \hat{e}_1(t), \hat{e}_z \hat{e}_2(t), \hat{e}_z \hat{e}_3(t)) = L \cdot (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)$$

d.h.

(i)  $\vec{L}$  ist unabhängig von  $\phi$

(ii)  $\theta, \psi$  sind die sphärischen Polarwinkel von  $\vec{L}$ , bis auf die Vertauschung von x- und y-Achse!

Die DGL für  $\theta$  und  $\psi$  lassen sich durch Ausnutzung der drei Erhaltungssätze für die Drehimpulskomponenten sofort integrieren. Aus  $\vec{L} = \Theta\vec{\omega}$  folgt

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{L_1}{\Theta_1} = \frac{L}{\Theta_1} \sin\theta \sin\psi = a \sin(Rt + \psi_0) \\ \omega_2 &= \frac{L_2}{\Theta_1} = \frac{L}{\Theta_1} \sin\theta \cos\psi = a \cos(Rt + \psi_0) \\ \omega_3 &= \frac{L_3}{\Theta_3} = \frac{L}{\Theta_3} \cos\theta = \omega_3^0\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt die zeitliche Konstanz von  $\theta$

$$\cos\theta = \frac{\omega_3^0 \Theta_3}{L} \quad \rightarrow \quad \theta = \theta_0 = \text{const.}$$

Aus dem Quotienten der Gleichungen für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  folgt

$$\tan\psi(t) = \tan(Rt + \psi_0) \quad \rightarrow \quad \psi(t) = Rt + \psi_0$$

Dies wieder in die Gleichung für  $\omega_1$  (oder  $\omega_2$ ) eingesetzt, ergibt

$$\sin\theta_0 = \frac{a\Theta_1}{L}$$

Kombination der Gleichungen für  $\cos\theta$  und  $\sin\theta$  liefert

$$\tan\theta_0 = \frac{a}{\omega_3^0} \frac{\Theta_1}{\Theta_3}$$

$$\begin{aligned}\text{und} \quad \sin^2\theta_0 + \cos^2\theta_0 &= \left(\frac{a\Theta_1}{L}\right)^2 + \left(\frac{\omega_3^0\Theta_3}{L}\right)^2 = 1 \\ \Rightarrow L^2 &= (a\Theta_1)^2 + (\omega_3^0\Theta_3)^2\end{aligned}$$

d.h. für gegebenen Drehimpuls  $L$  sind die Amplituden der Oszillationen von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  voneinander abhängig. Falls auch der Öffnungswinkel  $\gamma$  des Polkegels gegeben ist, gilt

$$\frac{a}{\omega_3^0} = \tan\gamma \rightarrow a^2 = \frac{L^2}{\Theta_1^2 + \Theta_3^2 \tan^2\gamma}$$

Der Winkel  $\phi$  ergibt sich durch Integrieren der Gleichung für  $p$ ,

$$\omega_1 = \dot{\phi} \sin\theta_0 \sin\psi = a \sin(Rt + \psi_0)$$

$$\text{Aus} \quad \sin\psi = \sin(Rt + \psi_0) \quad \text{folgt} \quad \dot{\phi} = \frac{a}{\sin\theta_0} = \frac{L}{\Theta_1}$$

Damit lautet die vollständige Lösung

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{L}{\Theta_1} t + \phi_0 \\ \psi(t) &= Rt + \psi_0 \\ \theta(t) &= \theta_0\end{aligned}$$

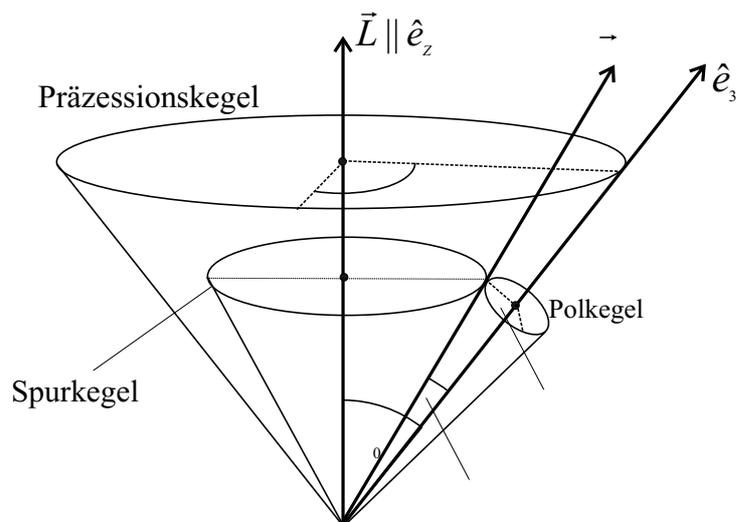
wobei  $\phi_0$  und  $\psi_0$  weitere Integrationskonstanten sind und  $L, R, \theta_0$  sich ausdrücken lassen durch die beiden Konstanten  $\omega_3^0, a$ .

Zur Interpretation von  $\phi, \psi, \theta$ :

$\theta$ : Winkel zwischen Figurenachse ( $x_3$ ) und z-Achse

$\phi$ : Drehung der Figurenachse um die z-Achse

$\psi$ : Drehung des Körpers um die Figurenachse



$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_z + \dot{\psi}\hat{e}_3$  (da  $\dot{\theta} = 0$ ) liegt  $\vec{\omega}$  in der Ebene ( $\hat{e}_z, \hat{e}_3$ )!

Der Polkegel „rollt“ um den Spurkegel.

Wegen  $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{e}_z + \dot{\psi}\hat{e}_3$  (da  $\dot{\theta} = 0$ ) liegt  $\vec{\omega}$  in der Ebene ( $\hat{e}_z, \hat{e}_3$ )!

## 5.4 Lagrangefunktion

Die Schwäche der bisherigen Betrachtung liegt in der Behandlung eines Drehmoments. Die Beschreibung der Wirkung äußerer Kräfte ist i.A. einfacher in der Form einer skalaren Funktion, d.h. des Potentials, als in der Form eines Kraft- oder Drehmomentvektors. Dies wird durch die Lagrangeformulierung ermöglicht. Wir betrachten den Fall einer reinen Rotationsbewegung, d.h. der Ursprung des körperfesten KS ist entweder im Schwerpunkt oder in Unterstützungspunkt. Als verallgemeinerte Koordinaten wählen wir die Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$ . Die Lagrangefunktion ist dann darstellbar als

$$L(\phi, \theta, \psi; \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}; t) = T_{\text{rot}} - U = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} - U(\phi, \theta, \psi, t)$$

wobei die Potentialfunktion  $U$  die Drehmomente beschreibt.

Die kinetische Energie ist am einfachsten im körperfesten Hauptachsensystem

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} [\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2] \\ &= \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{\Theta_2}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial L}{\partial \psi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi}\end{aligned}$$

i.A. also drei gekoppelte nichtlineare DGL 2. Ordnung.

### Schwerer symmetrischer Kreisel

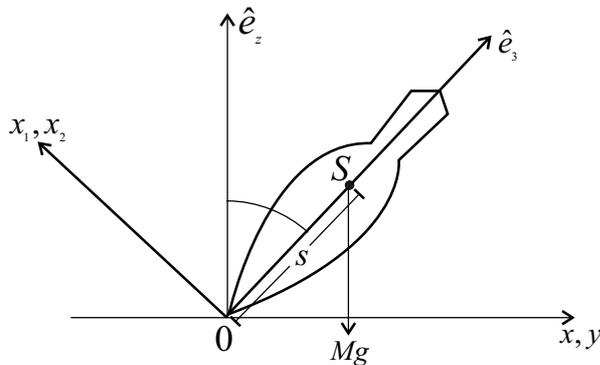
Als einfachstes Beispiel betrachten wir den Einfluss des Schwerfelds auf einen symmetrischen Kreisel, dessen Trägheitsmomente bezüglich des Schwerpunkts durch

$$\Theta_1 = \Theta_2 \quad \text{und} \quad \Theta_3$$

gegeben seien. Als Figurenachse ist damit die dritte Hauptachse  $\hat{e}_3$  zu identifizieren. Falls nun der Kreisel in einem Unterstützungspunkt in der Figurenachse auf der x-y-Ebene des IS aufliegt, sind die Trägheitsmomente bezüglich des Stützpunkts 0 geändert:

$$\begin{aligned}\Theta'_1 &= \Theta_1 + Ms^2 \equiv \Theta_\perp \\ \Theta'_1 &= \Theta'_2 \quad , \quad \Theta'_3 = \Theta_3\end{aligned}$$

wobei  $M$  die Masse des Kreisels und  $s$  der Abstand des Schwerpunkts vom Stützpunkt ist.



Für den symmetrischen Kreisel muss gelten, dass die Lagrangefunktion nicht von Drehungen um die Figurenachse, also dem Winkel  $\psi$ , abhängt, wohl aber von  $\dot{\psi}$ ! In der Tat lassen sich die Beiträge zu  $T_{\text{rot}}$  wegen  $\Theta'_1 = \Theta'_2$  so zusammenfassen, dass  $\psi$  herausfällt:

$$\begin{aligned}T_{\text{rot}} &= \frac{\Theta_\perp}{2} \left[ (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 \right] + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \\ &= \frac{\Theta_\perp}{2} \left[ \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right] + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2\end{aligned}$$

Die potentielle Energie im Schwerfeld hängt nur vom Winkel der Figurenachse ( $\hat{e}_3$ ) zur Richtung des Schwerfelds (z-Achse,  $\hat{e}_z$ ) ab und ist

$$U = Mgs \cos \theta$$

Die Lagrangefunktion  $L = T_{\text{rot}} - U$  hängt also von  $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$  ab.

Die Unabhängigkeit von  $L$  von den Variablen  $t, \phi, \psi$  gibt zu drei Erhaltungsgrößen Anlass:

1. Homogenität der Zeit  $\rightarrow$  Energieerhaltung

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = T_{\text{rot}} + U = \text{const.}$$

2. Invarianz gegen Rotationen um z-Achse ( $\phi \rightarrow \phi + \epsilon$ )  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung bezüglich z-Achse

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_{\perp} \dot{\phi} \sin^2 \theta + \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const.}$$

Diese Symmetrie ist immer in  $T_{\text{rot}}$  vorhanden: Die kinetische Energie ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems IS und damit von (zeitunabhängigen) Drehungen. Diese Invarianz, die im kräftefreien Fall zur Erhaltung des Drehimpulses  $\vec{L}$  in allen Komponenten führt, ist hier durch das äußere Feld reduziert auf die Drehsymmetrie um die z-Achse.

3. Invarianz gegen Rotationen um die Figurenachse  $\hat{e}_3$  ( $\psi \rightarrow \psi + \epsilon$ )  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung bez. 3-Achse

$$L_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{const.}$$

Wie schon angesprochen ist diese Invarianz eine Folge der angenommenen Symmetrie des Kreisels:  $\Theta_1 = \Theta_2$  und der Tatsache, dass die potentielle Energie nicht von Drehungen um die Figurenachse abhängt, da diese den Schwerpunkt invariant lassen.

Merke: Ein symmetrischer Kreisel muss nicht rotationssymmetrisch sein!

Die Existenz der Erhaltungssätze erlaubt eine erste Integration der Bewegungsgleichungen bezüglich aller drei Variablen  $\phi, \psi, \theta$ , so dass nur noch DGL 1. Ordnung zu lösen sind. Wie im Fall des Zentralpotentials erlauben die Drehimpulserhaltungssätze eine vollständige Elimination von  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\psi}$ :

$$L_3 : \quad \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \frac{L_3}{\Theta_3}$$

eingesetzt in  $L_z$ :

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Theta_{\perp} \sin^2 \theta} \left[ L_z - \Theta_3 \frac{L_3}{\Theta_3} \cos \theta \right]$$

Der Energieausdruck ist damit

$$E = \frac{1}{2} \Theta_{\perp} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 \Theta_{\perp} \sin^2 \theta} + \frac{(L_3)^2}{2 \Theta_3} + Mgs \cos \theta$$

Wir definieren eine Energieverschiebung

$$E' = E - \frac{(L_3)^2}{2\Theta_3} - Mgs$$

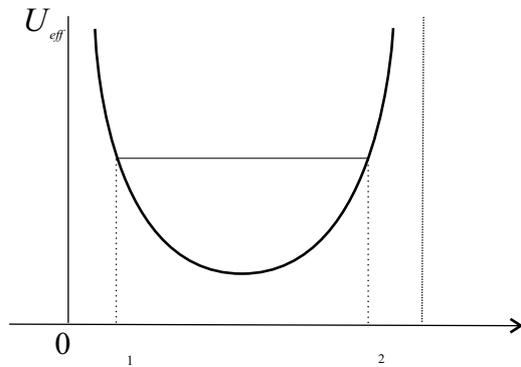
und erhalten den Energieausdruck für ein eindimensionales Problem

$$E' = \frac{1}{2}\Theta_{\perp}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta)$$

das äquivalent ist zum Problem eines Teilchens der Masse  $\Theta_{\perp}$ , das sich entlang der Koordinate  $\theta$  im Potential  $U_{\text{eff}}(\theta)$  bewegt, das definiert ist als

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(\mathbf{L}_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\Theta_{\perp} \sin^2 \theta} - Mgs(1 - \cos \theta)$$

für  $0 \leq \theta \leq \pi$ .



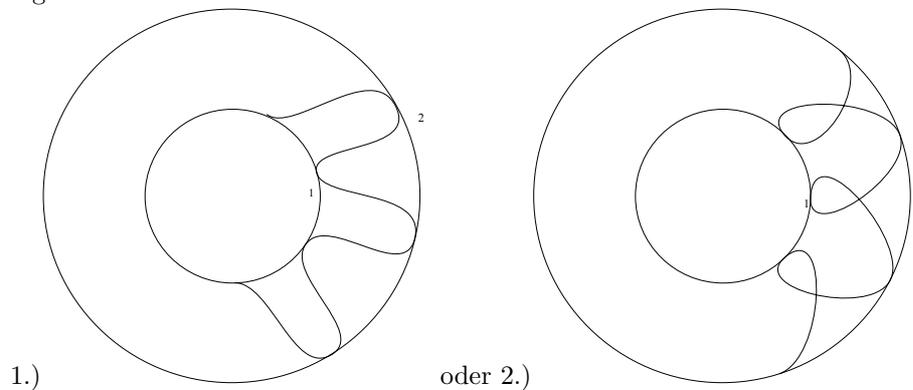
Für  $\theta \rightarrow 0, \pi$  strebt  $U_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ . Man überzeugt sich leicht, dass  $U_{\text{eff}}$  ein Minimum besitzt. Damit ist der Fall der finiten, periodischen Bewegung gegeben, d.h.  $\theta(t)$  oszilliert zwischen den Werten  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$ . Die Figurenachse vollführt also eine sog. *Nutation*.

Diese Nickbewegung ist der Präzession der Figurenachse überlagert, die sich aus

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{\Theta_{\perp} \sin^2 \theta}$$

ergibt.

Die Nutation kann der Präzession vorauslaufen oder nachhinken. In der Projektion von oben (entlang  $\hat{e}_z$ ) ergibt sich dann



1.)

oder 2.)

Die Drehung um die Figurenachse wird durch Integration von

$$\dot{\psi} = \frac{L_3}{\Theta_3} - \dot{\phi} \cos \theta$$

erhalten.

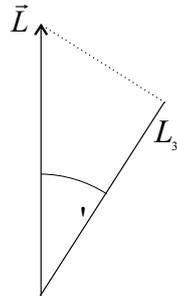
Für große Rotationsenergie  $T_{\text{rot}} \gg |U|$  sollte die Bewegung in die reine Präzession übergehen, die im letzten Abschnitt diskutiert wurde (extremer Fall 2: sehr langsame Präzession um  $\hat{z}$ , schnelle Präzession um  $\vec{L}$ ). In diesem Falls, d.h. für  $g = 0$ , ist der Vektordrehimpuls erhalten:  $\vec{L} = \text{const.}$  und damit ist die Energie gegeben als

$$E = \frac{1}{2} \frac{(L_3)^2}{\Theta_3} + \frac{1}{2} \frac{L_{\perp}^2}{\Theta_1}$$

wobei

$$\vec{L}_{\perp} = \vec{L} - L_3 \hat{e}_3$$

Mit der Wahl des IS-Koordinatensystems  $\hat{z} \parallel \vec{L}$  ist



$$L_3 = L \cos \theta' \quad , \quad L_{\perp} = L \sin \theta' \quad , \quad L_z = L$$

$$E = \frac{1}{2} L^2 \frac{\cos^2 \theta'}{\Theta_3} + \frac{1}{2} L^2 \frac{\sin^2 \theta'}{\Theta_1}$$

Verglichen mit dem Ausdruck auf S. 50, angewandt auf diese Situation

$$E = \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{\theta}'^2 + \frac{L^2 (1 - \cos^2 \theta')^2}{2 \Theta_1 \sin^2 \theta'} + \frac{L^2 \cos^2 \theta'}{2 \Theta_3}$$

ergibt sich

$$\dot{\theta}' = 0$$

und damit

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta'}{\Theta_1 \sin^2 \theta'} = \frac{L}{\Theta_1} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{L}{\Theta_1} t + \phi_0$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_3}{\Theta_3} - \dot{\phi} \cos \theta' = \frac{L \cos \theta'}{\Theta_3} - \frac{L \cos \theta'}{\Theta_1} \equiv R$$

$$\Rightarrow \quad \psi = Rt + \psi_0 \quad \text{wie vorher.}$$

# Kapitel 6

## Hamiltonformalismus

Die Hamilton'sche Formulierung der Mechanik betont die verallgemeinerten Impulse als Bewegungsgrößen gleichwertig zu den verallgemeinerten Koordinaten. Anders ausgedrückt, sie führt die DGL 2. Ordnung für die Koordinaten in eine doppelt so große Anzahl DGL 1. Ordnung für die Koordinaten und Impulse über. Sie ist damit der geeignete Ausgangspunkt für die Anknüpfung an die Quantenmechanik, die durch eine DGL 1. Ordnung für den Zustandsvektor beschrieben wird.

### 6.1 Kanonische Gleichungen

Gegeben sei die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$ . Durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad i = 1, \dots, f$$

werden verallgemeinerte Impulse definiert. Diese können dazu benutzt werden, die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  zu eliminieren, denn aus

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{folgt} \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t)$$

z.B.  $L = \frac{m}{2} \dot{q}^2 \quad , \quad p = m\dot{q} \quad , \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$

Wir definieren die *Hamiltonfunktion*  $H$ :

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t) p_i - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

$H$  hat die Bedeutung der Energie des Systems. Im Gegensatz zur Lagrangefunktion, die eine Funktion von  $q, \dot{q}, t$  ist, ist die Hamiltonfunktion eine Funktion von  $q, p, t$ .

Aus dem vollständigen Differential der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} dL(q, \dot{q}, t) &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

wobei

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{und die Lagrangegleichung} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$$

benutzt wurde, folgt

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_i \dot{q}_i p_i - L\right) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

Durch Vergleich ergeben sich die *kanonischen* oder *Hamilton'schen Bewegungsgleichungen*

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, f$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Dies ist ein System von  $2f$  DGL 1. Ordnung in  $t$ , die an die Stelle der  $f$  DGL 2. Ordnung in der Lagrangeformulierung treten.

1. Beispiel:

Teilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\vec{r})$  in 3D:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad , \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}}$$

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(\vec{r})$$

$$\rightarrow \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}$$

2. Beispiel:

Teilchen mit Ladung  $e$  und Masse  $m$  im elektromagnetischen Feld

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$\Phi, \vec{A}$ : skalares und Vektorpotential

Zur Erinnerung:

Magnetfeld  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Elektr. Feld:  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + eA_i \quad \rightarrow \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}$$

Kanonischer Impuls  $\vec{p}$  und mechanischer Impuls  $m\dot{\vec{r}}$  unterscheiden sich!

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{1}{m} \vec{p} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\Phi - e \frac{1}{m} (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \vec{A}$$

$$\boxed{H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\Phi}$$

Zur Interpretation:

$$\text{Energie } H = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2}_{\text{kin. En.}} + \underbrace{e\Phi}_{\text{pot. En.}}$$

Das Vektorpotential  $\vec{A}$  trägt nicht zur pot. Energie bei!

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{\nabla}_p H = \frac{1}{m} (\vec{p} - e\vec{A}) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{1}{m} (\vec{p} - e\vec{A}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r_i} e\vec{A} \right) - e \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{r}_i &= \dot{p}_i - e \frac{d}{dt} A_i = e\dot{\vec{r}} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial r_i} \vec{A} \right) - e \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} - e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} A_i - e \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= eE_i + e \sum_j \dot{r}_j \left( \frac{\partial}{\partial r_i} A_j - \frac{\partial}{\partial r_j} A_i \right) \\ &= eE_i + e\dot{\vec{r}} \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$\text{denn } \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \sum_j \left( \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_i} A_j - \dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_j} A_i \right)$$

## 6.2 Poisson'sche Klammern

Wir betrachten eine beliebige Funktion  $f(p, q, t)$  der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse. Die totale zeitliche Änderung ist

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)\end{aligned}$$

oder

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$$

wobei die *Poissonklammer* zweier Funktionen  $f$  und  $g(q, p, t)$  definiert ist als

$$\{g, f\} = \sum_i \left( \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

Erhaltungsgrößen  $f$ , die nicht explizit zeitabhängig sind, erfüllen  $\{H, f\} = 0$ .

Eigenschaften der Poissonklammern:

- (i)  $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- (ii)  $\{f, c\} = 0$  ,  $c = const.$
- (iii)  $\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$
- (iv)  $\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\}$
- (v)  $\{f, q_i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}$  ,  $\{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}$
- (vi)  $\{q_i, q_j\} = 0$  ,  $\{p_i, p_j\} = 0$  ,  $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$
- (vii)  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$  Jacobi-Identität

In der Quantenmechanik haben die Poissonklammern eine direkte Entsprechung im *Kommutator* von Operatoren.

Es gilt das *Poisson'sche Theorem*:

Falls  $f$  und  $g$  Erhaltungsgrößen sind, also  $\{H, f\} = 0$  ,  $\{H, g\} = 0$  dann gilt auch

$$\{H, \{f, g\}\} = 0$$

d.h. dann ist

$$\{f, g\} = const.$$

eine Erhaltungsgröße.

Beweis über Jacobi-Identität:

$$\{H, \{f, g\}\} = -\{f, \{g, H\}\} - \{g, \{H, f\}\} = 0$$

### 6.3 Kanonische Transformation

Die Wahl der verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  und Impulse  $p_i$  ist nicht eindeutig. Die Freiheit in der Wahl der  $q, p$  kann dazu benutzt werden, zu einer besonders einfachen Beschreibung zu kommen.

Die Transformationen

$$Q_i = Q_i(p, q, t) \quad , \quad P_i = P_i(p, q, t)$$

von den gegebenen dynamischen Variablen  $p, q$  zu neuen Variablen  $P, Q$  nennt man *kanonisch*, falls sie die Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, d.h. falls gilt

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

wobei  $H'(P, Q, t)$  die transformierte Hamiltonfunktion ist (dabei sind die  $Q_i$  i.A. nicht mehr nur räumliche Koordinaten). Um die Bedingungen für die Erzeugung von kanonischen Transformationen abzuleiten, gehen wir davon aus, dass sich auch die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen aus einem Extremalprinzip für die Wirkung ergeben, nämlich

$$\delta \int (\sum_i p_i dq_i - H dt) = 0$$

Variation nach  $q$  und  $p$  liefert (bei festgehaltenen Randwerten  $p_i, q_i$ )

$$\begin{aligned} 0 &= \int \sum_i \left( \delta p_i dq_i + p_i d(\delta q_i) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i dt \right) \\ &= \int \sum_i \left[ \underbrace{\delta p_i \left( dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right)}_{=0} - \delta q_i \underbrace{\left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right)}_{=0} \right] + \sum_i p_i \delta q_i \Big|_1^2 \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten muss also gelten

$$\delta \int_1^2 (\sum_i P_i dQ_i - H' dt) = 0$$

Ergänzung: Der Randterm  $\sum p_i \delta q_i \Big|_1^2$  verschwindet, da  $\delta Q_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \underbrace{\delta q_i}_{=0} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \underbrace{\delta p_i}_{=0} = 0$

Die beiden Integranden dürfen sich höchstens um ein vollständiges Differential einer Funktion  $F(q, Q, t)$  unterscheiden:

$$\begin{aligned} dF(q, Q, t) &= \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (H' - H) dt \\ \rightarrow \quad p_i &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad , \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}$$

Jede Funktion  $F(q, Q, t)$  erzeugt also eine kanonische Transformation.

Durch geeignete Umschreibung lassen sich auch erzeugende Funktionen angeben, die andere Paare der alten und neuen Variablen miteinander verknüpfen, z.B.  $q, P \rightarrow p, Q$

$$d(F(q, Q, t) + \sum_i P_i Q_i) := d\Phi(q, P, t) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt$$

$$\rightarrow p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad , \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Die Paare von Veränderlichen  $p_i, q_i$  werden als *kanonisch konjugierte* Variablen bezeichnet, für die gilt

$$\{q_i, q_j\}_{p,q} = 0 \quad , \quad \{p_i, p_j\}_{p,q} = 0 \quad , \quad \{p_i, q_j\}_{p,q} = \delta_{ij}$$

Poissonklammern sind invariant unter kanonischen Transformationen, d.h.

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}$$

also

$$\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} \right)$$

Beweis: Wir interpretieren  $g$  als Hamiltonfunktion, dann gilt

$$\{f, g\}_{pq} = -\frac{df}{dt}$$

Die Zeitableitung  $\frac{df}{dt}$  kann nicht von der Wahl der Variablen abhängen. q.e.d.

Damit gilt aber auch

$$\{Q_i, Q_j\}_{pq} = 0 \quad , \quad \{P_i, P_j\}_{pq} = 0 \quad , \quad \{P_i, Q_j\}_{pq} = \delta_{ij}$$

und

$$\{q_i, q_j\}_{PQ} = 0 \quad , \quad \{p_i, p_j\}_{PQ} = 0 \quad , \quad \{p_i, q_j\}_{PQ} = \delta_{ij}$$

Man kann die *zeitliche Änderung* der Größen  $p, q$  selbst als kanonischen Transformation ansehen: ( $q_t = q(t)$  etc.)

$$Q = q_{t+\tau} = q(q_t, p_t, \tau)$$

$$P = p_{t+\tau} = p(q_t, p_t, \tau)$$

denn sowohl  $q_t, p_t$  als auch  $q_{t+\tau}, p_{t+\tau}$  genügen den kanonischen Bewegungsgleichungen.

**Beispiel** für kanonische Transformation: Harmonischer Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

$$F(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q \quad , \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}$$

Auflösen nach  $q, p$ :

$$\frac{p^2}{P} = \frac{(m\omega)^2 q^2 \cot^2 Q}{m\omega q^2} = 2m\omega \cot^2 Q$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{2m\omega P} \cot Q \\ q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \end{aligned} \right\} H' = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \quad , \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega$$

$$\rightarrow P = \frac{E}{\omega} = \text{const.} \quad , \quad Q = \omega t$$

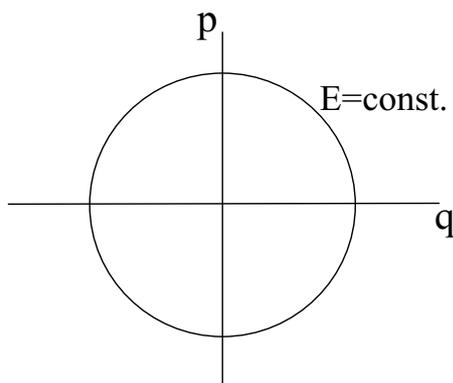
$$p = \sqrt{2mE} \cos \omega t \quad , \quad q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \omega t$$

## 6.4 Phasenraum und Liouville'scher Satz

Der Zustand eines mechanischen Systems zur Zeit  $t$  wird im Hamiltonformalismus durch die Angabe der verallgemeinerten Orte und Impulse  $q_i(t), p_i(t)$  festgelegt. Durch diese  $2f$  Größen wird ein Punkt im  $2f$ -dimensionalen Phasenraum definiert. Im Laufe der Zeit bewegt sich dieser Punkt auf einer Kurve.

Falls die Energie des Systems erhalten ist, findet die Bewegung auf einer  $(2f-1)$ -dimensionalen Hyperfläche konstanter Energie statt.

Beispiel: Eindimensionale Bewegung



Das Produkt der Differentiale

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_f \cdot dp_1 \dots dp_f$$

ist das „Volumenelement“ des Phasenraums.

Wir betrachten das Integral über einen Volumenbereich des Phasenraums:

$$V_0 = \int d\Gamma$$

und zeigen, dass  $V_0$  invariant ist unter kanonischen Transformationen.

Es gilt

$$\int dQ_1 \dots dQ_f dP_1 \dots dP_f = \int dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \cdot D(q, p)$$

wobei

$$D(q, p) = \frac{\partial(Q_1 \dots Q_f, P_1 \dots P_f)}{\partial(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f)}$$

die *Funktionaldeterminante* ist.  $D$  lässt sich schreiben als

$$D = \frac{\frac{\partial(Q_1 \dots Q_f, P_1 \dots P_f)}{\partial(q_1 \dots q_f, P_1 \dots P_f)}}{\frac{\partial(q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f)}{\partial(q_1 \dots q_f, P_1 \dots P_f)}} = \frac{\frac{\partial(Q_1 \dots Q_f)}{\partial(q_1 \dots q_f)}}{\frac{\partial(p_1 \dots p_f)}{\partial(P_1 \dots P_f)}}$$

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion  $\Phi(q, P, t)$  ist

$$Q_i = \frac{\partial\Phi}{\partial P_i} \quad \text{und} \quad p_i = \frac{\partial\Phi}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial(Q_1 \dots Q_f)}{\partial(q_1 \dots q_f)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial q_f} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_f}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_f}{\partial q_f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial P_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_f \partial P_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1 \partial P_f} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_f \partial P_f} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(p_1 \dots p_f)}{\partial(P_1 \dots P_f)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_1 \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_f \partial q_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_1 \partial q_f} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_f \partial q_f} \end{vmatrix}$$

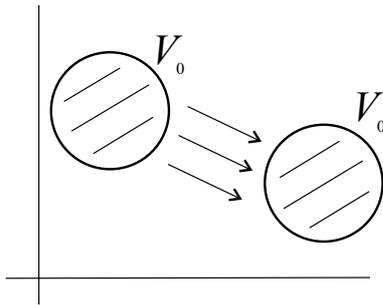
Die beiden Determinanten unterscheiden sich nur durch Vertauschung der Zeilen und Spalten, sind also gleich.

$$\Rightarrow D = 1$$

Wir betrachten nun die Verschiebung der Punkte im Volumenelement im Laufe der Zeit. Wie oben gezeigt, wird dies durch kanonische Transformationen beschrieben und damit gilt:

$$V_0 = \int d\Gamma = \text{const.} \quad , \quad \text{d.h. zeitunabhängig.} \quad \textbf{Satz von Liouville}$$

Wenn man die Phasenraumpunkte, die eine Gesamtheit von Systemen beschreiben, als Flüssigkeit auffasst, die durch den Phasenraum strömt, dann ist diese Flüssigkeit *inkompressibel*.



## 6.5 Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung

Eine letzte allgemeinste Formulierung der Mechanik geht aus von folgender Betrachtung:

Die Wirkung  $S$  selbst kann als dynamische Variable definiert werden, wenn man sie als Funktion der Randpunkte betrachtet. Die extremale Wirkung als Funktion des Endpunktes ist gegeben durch  $S(q(t), t)$ . Für  $S$  gilt

$$\begin{aligned} \delta S(t) &= \delta \int_0^t L dt = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{p} \delta q \Big|_0^t + \int_0^t \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_{=0} dt \\ &= p \cdot \delta q \end{aligned}$$

wobei  $\delta q(0) = 0$  angenommen wurde.

Allgemein ist

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i \rightarrow \frac{\delta S}{\delta q_i} = p_i$$

Die zeitliche Ableitung ist

$$\frac{dS}{dt} = L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i$$

$$\text{oder } \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H$$

$S$  erfüllt also die partielle DGL 1. Ordnung in der Zeit:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_f; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}; t) = 0}$$

die **Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung**.

Hier sind die Zeit und die Koordinaten die unabhängigen Variablen. Gesucht ist das sogenannte *vollständige Integral* dieser Gleichung,

$$S = \Phi(t, q_1, \dots, q_f; \alpha_1, \dots, \alpha_f) + A$$

mit  $f + 1$  Konstanten.

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung, also die  $q_i(t)$ , lässt sich wie folgt erzielen: Man geht mittels einer kanonischen Transformation von

$$(p, q) \rightarrow (\alpha, \beta)$$

wobei  $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$  die neuen Koordinaten und  $\alpha_i$  die neuen Impulse sind. Mit Hilfe der erzeugenden Funktion  $\Phi(t, q, \alpha)$ , also der Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung, gilt

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad , \quad \beta_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} \quad , \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Da aber  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t}$ , ist  $H' = 0$ !

Es folgt:

$$\frac{\partial S'}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_i = \text{const.} \quad , \quad \beta_i = \text{const.}$$

Die Koordinaten  $q_i(t)$  ergeben sich durch Lösung der Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad , \quad i = 1, \dots, f$$

und die Impulse aus

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Falls die Energie erhalten ist, d.h.  $H = E = \text{const.}$ , nimmt die Hamilton-Jacobi-Gleichung die Form an:

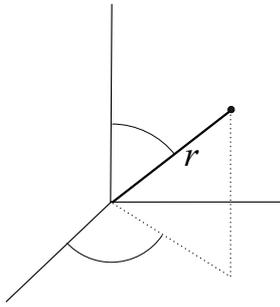
$$H \left( q_1, \dots, q_f; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_f} \right) = E$$

wobei  $S_0 = S + E \cdot t$  zeitunabhängig ist.

Beispiel:

Ein Teilchen der Masse  $m$  in einem zylindersymmetrischen Potential der Form

$$U(r, \theta) = U_0(r) + \frac{B(\theta)}{r^2}$$



Die Lagrangefunktion lautet in Kugelkoordinaten

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U$$

Die verallgemeinerten Impulse sind

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

Die Hamiltonfunktion ist damit

$$H = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U$$

Mit der Ersetzung  $p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}$  ergibt sich aus

$$H(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}) = E$$

die partielle DGL

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + U_0(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + 2mB(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 = E$$

Im Lösungsansatz nutzen wir die Separation der Variablen aus, und die Tatsache, dass  $H$  nicht von  $\phi$  abhängt (Zylindersymmetrie), d.h.  $p_\phi = \text{const.}$

$$S_0(r, \theta, \phi) = p_\phi \phi + S_1(r) + S_2(\theta)$$

$$\rightarrow \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + U_0(r) - E \right] 2mr^2 + \left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 + 2mB(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

Diese Summe einer Funktion von  $r$  und einer Funktion von  $\theta$  kann nur Null sein für alle  $\phi, \theta$ , wenn die beiden Funktionen Konstanten sind, die sich zu Null addieren:

$$\left( \frac{\partial S_2}{\partial \theta} \right)^2 + 2mB(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = C$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_1}{\partial r} \right)^2 + U_0(r) + \frac{C}{2mr^2} = E$$

Integration liefert:

$$S(r, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + \int d\theta \sqrt{C - 2mB(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}} + \int dr \sqrt{2m(E - U_0(r)) - \frac{C}{r^2}}$$

Die Konstanten sind hier  $p_\phi, E, C$ . Die Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial p_\phi} = a_\phi \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t_0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial C} = K$$

mit Konstanten  $a_\phi, t_0, K$  ergeben die Lösung  $r(t), \theta(t), \phi(t)$ .