

Klassische Theoretische Physik II: Mechanik

Alexander Shnirman

Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Karlsruher Institut für Technologie

9. Juli 2010

1 Lagrange-Gleichungen 1. Art

1.1 Motivierendes Beispiel: ein Pendel

Der Massenpunkt ist an einem Faden (einer Stange) der Länge l aufgehängt. Der Aufhängepunkt ist im Ursprung. Der Massenpunkt ist durch $\mathbf{r}(t) = (x, y, z)$ beschrieben. Es gibt eine Zwangsbedingung: $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, d.h., der Massenpunkt befindet sich (bleibt) auf der Oberfläche (Kugelschale) $\mathbf{r}^2 = l^2$.

1.1.1 Erste Strategie

Wir benutzen die Newton-Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}_{tot} = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{Z} , \quad (1)$$

wobei \mathbf{Z} ist die Zwangskraft die den Massenpunkt dazu zwingt auf der Oberfläche $\mathbf{r}^2 = l^2$ zu bleiben. Zunächst ist \mathbf{Z} unbekannt. Es ist aber klar das \mathbf{Z} entlang \mathbf{r} ausgerichtet ist. Äquivalent, ist \mathbf{Z} senkrecht zu der Kugelschale $\mathbf{r}^2 = l^2$. Wir schreiben

$$\mathbf{Z}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t) , \quad (2)$$

wobei $\lambda(t)$ unbekannt ist. Das Ergebnis: wir haben 4 Gleichungen

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -mg\mathbf{e}_z + \lambda(t)\mathbf{r}(t) , \quad (3)$$

$$\mathbf{r}^2(t) = l^2 \quad (4)$$

mit 4 Unbekannten $\mathbf{r}(t)$ und $\lambda(t)$.

1.1.2 Zweite Strategie

Man kann die Zwangskraft eliminieren. Man multipliziert die Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{Z}$ mit zwei Vektoren die tangential zu der 2-D Oberfläche $\mathbf{r}^2(t) = l^2$ sind. Die Oberfläche lässt sich mit zwei Variablen parametrisieren. Die Parametrisierung die am bequemsten ist ist durch die Kugelkoordinaten gegeben: $\mathbf{r} = l \cdot (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$. Die Tangentialvektoren lauten: $\xi_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$, $\xi_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$. Wir erhalten dann zwei Gleichungen:

$$(m\ddot{\mathbf{r}} + mg\mathbf{e}_z)\xi_\theta = 0 , \quad (5)$$

$$(m\ddot{\mathbf{r}} + mg\mathbf{e}_z)\xi_\varphi = 0 . \quad (6)$$

Alle Größen sind Funktionen von zwei Variablen θ, φ und wir haben zwei Gleichungen.

1.2 Zwangsbedingungen, Freiheitsgrade

1.2.1 Allgemeine Definitionen

- 1) 3N-D Vektor $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ beschreibt das System mit N Massenpunkten. Die Massen der Massenpunkte sind m_1, m_2, \dots, m_N . Der 3N-D Impuls-Vektor: $\mathbf{P} = (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, m_N \dot{\mathbf{r}}_N)$.
- 2) *Holonomie* Zwangsbedingungen: $F_a(\mathbf{R}, t) = F_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$. Index a zählt die unabhängigen Zwangsbedingungen: $a \in [1, \dots, s]$. Natürlich gilt $s < 3N$. *Holonom-Skleronom*: F_a unabhängig von t . *Holonom-Rheonom*: F_a hängt von t ab.
- 3) Zahl der Freiheitsgrade: $3N - s$.
- 4) Jede Zwangsbedingung $F_a(\mathbf{R}, t) = 0$ definiert eine $3N - 1$ -dimensionale Oberfläche $O_a(t)$. Die $3N - s$ -dimensional Oberfläche (Mannigfaltigkeit) $O(t) \equiv \bigcap_a O_a(t)$ sei die Menge aller möglichen Lagen der Massenpunkte zur Zeit t .

1.2.2 Bewegungsgleichungen

Auf jeden Massenpunkt wirkt eine Zwangskraft \mathbf{z}_i . Wir können auch einen 3N-D Vektor der Zwangskräfte definieren: $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N)$. Die Newton-Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{k}_i + \mathbf{z}_i , \quad (7)$$

wobei \mathbf{k}_i die üblichen inneren und äusseren Kräfte sind die sich aus dem Potential (der potentialen Energie) $U(\mathbf{R}, t) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ sich ableiten lassen. Wir haben

$$\mathbf{k}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} , \quad (8)$$

oder

$$\mathbf{K} = -\nabla_{\mathbf{R}} U . \quad (9)$$

Letztendlich

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{K} + \mathbf{Z} . \quad (10)$$

1.2.3 d'Alembertsche Prinzip

Definition: *virtuelle Verrückungen*: alle (infinitesimal kleine) Tangentialvektoren an O .

Die Zwangskraft ist senkrecht zu der Oberfläche (Mannigfaltigkeit) $O(t)$. Wir betrachten eine Kurve $\mathbf{R}(q) \in O$, wo q ein Parameter ist. Es gilt $F_a(\mathbf{R}(q), t) = 0$. Das ergibt

$$\frac{dF_a(\mathbf{R}(q))}{dq} = \frac{d\mathbf{R}}{dq} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} F_a = 0 . \quad (11)$$

$d\vec{\xi} = \frac{d\mathbf{R}}{dq} dq$ ist eine virtuelle Verrückung. $\nabla_{\mathbf{R}}F_a$ ist senkrecht an alle v.V. Es folgt $\nabla_{\mathbf{R}}F_a \perp O$. Es gibt s unabhängigen Vektoren $\perp O$. Dimensionalität von O sei $3N - s$. Es gilt im allgemein:

$$\mathbf{Z} = \sum_a \lambda_a(t) \nabla_{\mathbf{R}}F_a . \quad (12)$$

Wir können jetzt die Lagrange-Gleichungen 1. Art formulieren. Es gibt $3N$ Gleichungen

$$\dot{\mathbf{P}} = -\nabla_{\mathbf{R}}U + \sum_a \lambda_a(t) \nabla_{\mathbf{R}}F_a \quad (13)$$

und noch s Gleichungen

$$F_s(\mathbf{R}) = 0 . \quad (14)$$

Insgesamt $3N + s$ Gleichungen und $3N + s$ Unbekannten.

Alternative Formulierung: $(\dot{\mathbf{P}} + \nabla_{\mathbf{R}}U) \cdot \vec{\xi}_\alpha$, wobei $\vec{\xi}_\alpha$ sind die $3N - s$ virtuellen Verrückungen zu O .

2 Lagrange-Gleichungen 2. Art

2.1 Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange-Gleichung

Man führt die *generalisierten* Koordinaten $q_1, q_2, \dots, q_{3N-s}$ ein, die die Oberfläche O parametrisieren. D.h., die Oberfläche ist gegeben durch $\mathbf{R} = \mathbf{R}(q_1, q_2, \dots)$. Damit sind die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt. Wir wollen $3N - s$ Bewegungsgleichungen für q_j herleiten. Dafür projizieren wir die $3N$ -dimensionale Gleichung $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{K} + \mathbf{Z}$ auf $3N - s$ Tangentialvektoren $\partial\mathbf{R}/\partial q_j$. Das ergibt

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial q_j} = \mathbf{K} \cdot \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial q_j} = -\vec{\nabla}_R U \cdot \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial q_j} . \quad (15)$$

oder

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} . \quad (16)$$

Wir betrachten hier die potentielle Energie U nur auf der Oberfläche O , so dass $U(\mathbf{R}, t) = U(\mathbf{R}(q_1, \dots, q_{3N-s}, t)) = U(q_1, \dots, q_{3N-s}, t) = U(\mathbf{q}, t)$.

Wir wollen beweisen, dass

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} , \quad (17)$$

wobei

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} \quad (18)$$

die kinetische Energie ist.

Wir haben $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-s}, t) = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$, wobei $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_{3N-s})$. Es ist wichtig die totale (z.B. d/dt) und die partielle (z.B. $\partial/\partial t$ oder $\partial/\partial q_1$) Ableitungen zu unterscheiden. Wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} . \quad (19)$$

Das heisst wir können jetzt $\dot{\mathbf{r}}_i$ als Funktion von \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ und t , , d.h. $\dot{\mathbf{r}}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Da $\dot{\mathbf{r}}_i$ eine lineare Funktion von $\dot{\mathbf{q}}$ ist erhalten wir

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (20)$$

Weiter

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} , \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \left(\sum_m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} \right) , \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} . \quad (23)$$

Schließlich, mit (19) wir erhalten

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \left(\sum_m \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} \right) , \quad (24)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} . \quad (25)$$

Gl. (16) jetzt lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} , \quad (26)$$

oder

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (27)$$

wobei $L \equiv T - U$ (die potenzielle Energie U ist unabhängig von $\dot{\mathbf{q}}$). Die Funktion $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ heisst Lagrange-Funktion und die Gleichung (27) heisst Euler-Lagrange Bewegungsgleichung.

2.2 Beispiel: das Pendel

Wir benutzen die Parametrisierung durch die Kugel-Koordinaten:

$$\mathbf{r} = (l \sin \theta \cos \varphi, l \sin \theta \sin \varphi, l \cos \theta). \quad (28)$$

Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{m \dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (29)$$

Die potentielle Energie lautet

$$U = mgz = mgl \cos \theta. \quad (30)$$

Die 2 Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} - ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - mgl \sin \theta &= 0 \\ ml^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} + 2ml^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

2.3 Keine Zwangsbedingungen

Wenn es keine Zwangsbedingungen gibt, sind die $3N$ Koordinaten \mathbf{R} auch gute generalisierte Koordinaten. Aus der Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (32)$$

erhalten wir die Newton-Bewegungsgleichungen. Mann kann immer noch die generalisierten Koordinaten einführen ($3N$) die das Problem vereinfachen.

2.3.1 Kepler-Problem

Die L.-F. lautet

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} - U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (33)$$

Die besser passenden Koordinaten sind $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, und $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$. Jetzt lautet die L.-F.

$$L = \frac{M \dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}^2}{2} - U(\mathbf{r}) , \quad (34)$$

wobei $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ die reduzierte Masse ist.

3 Erhaltungssätze, das Noether-Theorem

3.1 Verallgemeinerter Impuls, zyklische Koordinaten

Die verallgemeinerten Impulse sind wie folgt definiert:

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} . \quad (35)$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt dann, dass wenn q_j eine *zyklische* Koordinate ist, d.h. L ist von q_j unabhängig, $\partial L / \partial q_j = 0$, ist der entsprechende Impuls p_j erhalten, $\dot{p}_j = 0$.

3.2 Das Noether-Theorem

Wenn es eine Schar der Bahnkurven existiert $\mathbf{q}(t, \alpha)$ (es gilt, z.B., $\mathbf{q}(t, \alpha = 0) = \mathbf{q}(t)$), sodass

$$L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t) = L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) , \quad (36)$$

gilt

$$\frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t) = 0 , \quad (37)$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right) \\ &= \sum_j \left(\left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} \right) \\ &= \sum_j \left(\left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right] \right) \end{aligned} \quad (38)$$

Wir benutzen die Euler-Lagrange-Gleichungen und erhalten den Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right] = \frac{d}{dt} \sum_j \left[p_j \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right] = 0 . \quad (39)$$

3.2.1 Beispiel: zyklische Koordinate

Wenn q_m zyklisch ist dann gilt $q_j(t, \alpha) = q_j(t) + \alpha \delta_{jm}$. Daraus folgt $\dot{p}_m = 0$.

3.2.2 Beispiel: Gesamtimpuls mehreren wechselwirkenden Teilchen

Die verallgemeinerten Koordinaten sind einfach \mathbf{r}_i (keine Zwangsbedingungen). Die potenzielle Energie ändert sich nicht unter Transformation $\mathbf{r}_i + \alpha \mathbf{n}$, wo \mathbf{n} einer beliebigen Richtung entspricht (Verschiebung aller Teilchen). Dann ist der Gesamtimpuls $\sum_i \mathbf{p}_i$ erhalten.

3.2.3 Beispiel: Drehimpuls

Die Symmetrie: eine Drehung um Achse \mathbf{n} um Winkel α . Wir erhalten

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_i \quad (40)$$

Die erhaltene Größe sei

$$\sum_i \mathbf{p}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha} = \sum_i \mathbf{p}_i (\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \left(\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}, \quad (41)$$

wobei \mathbf{L} der Drehimpuls ist.

3.3 Erweitertes Noether-Theorem

Die Lagrange-Funktion ist nicht invariant aber gilt

$$\frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t)|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t). \quad (42)$$

Dann die Größe

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} - f \quad (43)$$

ist erhalten. Die wichtigste Anwendung: Zeitverschiebung $\mathbf{q}(t, \alpha) = \mathbf{q}(t + \alpha)$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t)|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \sum_j \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]. \quad (44)$$

Andererseits

$$\frac{d}{d\alpha} L(\mathbf{q}(t, \alpha), \dot{\mathbf{q}}(t, \alpha), t)|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} L - \frac{\partial}{\partial t} L. \quad (45)$$

Zusammen ergibt sich dann

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = \frac{\partial}{\partial t} L . \quad (46)$$

Wenn L zeitunabhängig ist (Zeitverschiebungsinvarianz) dann ist die Größe

$$E \equiv \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (47)$$

erhalten. Diese Größe nennt man Energie.

Sollte die Kinetische Energie eine quadratische Form bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten sein, d.h.,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{nm} T_{nm}(\vec{q}) \dot{q}_n \dot{q}_m , \quad (48)$$

lautet dann die Energie

$$E = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - L = T + U . \quad (49)$$

Diese Situation erhalten wir wenn, z.B., die Zwangsbedingungen skleronom sind. Dann gilt

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j , \quad (50)$$

weil gilt $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0$. Einsetzen von (48) in $T = \sum_i \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2}$ ergibt eine quadratische Form.

4 Das Hamilton-Prinzip

4.1 Funktionale

Beispiel: sei B ein Raum der Funktionen $f(x)$, $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$. Es gibt verschiedene Räume (integrierbare, glatte, Funktionen). Eine Abbildung $F : B \rightarrow \mathfrak{R}$ heißt Funktional. Z.B.

$$\begin{aligned} F[f(x)] &= f(0) , \\ F[f(x)] &= \int_0^1 dx f^2(x) . \end{aligned} \quad (51)$$

Ein Funktional ist stetig im "Punkte" $f(x)$ wenn zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, sodass

$$F[f(x) + h(x)] - F[f(x)] < \epsilon \quad (52)$$

für alle $h(x)$ für denen $\|h\| < \delta$. Für die Norm $\|\dots\|$ gibt es verschiedene Definitionen. Z.B. $\|h\| = \int dx h^2$.

Ein Funktional F ist differenzierbar wenn existiert ein lineares (in h) Funktional $F'_{f(x)}[h(x)]$, sodass

$$F[f(x) + h(x)] - F[f(x)] = F'_{f(x)}[h(x)] + O(\|h\|^2). \quad (53)$$

Beispiel $F = \int_0^1 dx f^2(x)$, $F' = \int_0^1 dx 2f(x)h(x)$. Die Größe $\delta F \equiv F'_{f(x)}[h(x)]$ heißt "die erste Variation".

4.2 Wirkung

Gegeben sei eine Bahnkurve $q(t)$ mit Anfangszeit t_1 und Endzeit t_2 . Die Wirkung ist wie folgt definiert

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t). \quad (54)$$

4.3 Das Hamilton-Prinzip

Das Hamilton-Prinzip a.k.a. Prinzip der kleinsten Wirkung (präziser: Prinzip der extremalen Wirkung) besagt folgendes. Sei der Anfangspunkt $q(t_1)$ und der Endpunkt $q(t_2)$ der Bahnkurve sind gegeben. Dann bewegt sich das System entlang eine Bahnkurve $q(t)$ sodass die Wirkung minimal (extremal) ist. sich entlang der Bahn.

Matematisch bedeutet das, dass die erste Variation der Wirkung für $\delta q(t)$ mit $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ verschwindet.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q. \end{aligned} \quad (55)$$

Wir wollen, dass die erste Variation verschwindet für beliebigen δq . Dann muss die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt werden.

4.3.1 Freiheit bezüglich der Wahl der Lagrange-Funktion

Man darf eine total Zeit-Ableitung zur Lagrange-Funktion addieren ohne die Bewegungsgleichungen zu ändern. Definieren wir die neue Lagrange-Funktion als

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} f(\vec{q}, t) . \quad (56)$$

Die neue Wirkung lautet

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt L' = \int_{t_1}^{t_2} dt L + [f(\vec{q}(t_2), t_2) - f(\vec{q}(t_1), t_1)] . \quad (57)$$

Da $\delta\vec{q}(t_1) = \delta\vec{q}(t_2) = 0$, stellen wir fest, dass von $\delta S = 0$ folgt $\delta S' = 0$. Man kann auch explizit beweisen, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen sich nicht ändern.

5 Hamilton-Formalismus

5.1 Hamilton-Bewegungsgleichungen, Hamilton-Funktion

Wir fangen an mit den Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad (58)$$

und der Definition des kanonischen Impulses

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) . \quad (59)$$

Wir lösen die letzte Gleichung bezüglich $\dot{\vec{q}}$ auf (wir nehmen an, dass das möglich ist):

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) . \quad (60)$$

Wir bilden die Hamilton-Funktion mit Hilfe der Energie $E(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$:

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) \equiv E(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t) . \quad (61)$$

Explizit

$$H(\vec{p}, \vec{q}, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t) . \quad (62)$$

Mathematisch ist das die Legendre-Transformation von $L(\dot{q})$ zu $H(p)$. Wir wollen zeigen, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen und die folgenden Hamilton-Gleichungen äquivalent sind:

$$\begin{aligned}\dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} , \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} .\end{aligned}\tag{63}$$

5.1.1 Beweis

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_j} &= \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial p_j} \\ &= \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t) + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} \\ &= \dot{q}_j .\end{aligned}\tag{64}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\dot{p}_j .\end{aligned}\tag{65}$$

5.1.2 Alternativer Beweis

Wir betrachten das Differential von L als Funktion von \vec{q} und $\dot{\vec{q}}$:

$$\begin{aligned}dL &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \\ &= \sum_j \dot{p}_j dq_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j \\ &= \sum_j \dot{p}_j dq_j + d\left(\sum_j p_j \dot{q}_j\right) - \sum_j \dot{q}_j dp_j .\end{aligned}\tag{66}$$

Das ergibt

$$d\left(\sum_j p_j \dot{q}_j - L\right) = dH = \sum_j \dot{q}_j dp_j - \sum_j \dot{p}_j dq_j .\tag{67}$$

Daraus folgen die Hamilton-Gleichungen. Das ist ein Beispiel der Legendre-Transformation.

5.1.3 Energie-Erhaltung

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} . \quad (68)$$

Energie ist erhalten wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt.

5.2 Beispiele der Legendre-Transformation

5.2.1 Massenpunkt im externen Potential

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \quad \rightarrow \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (69)$$

Harmonischer Oscillator: $U(q) = (1/2)m\omega^2 q^2$.

Bewegungsgleichung: $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$.

Energie:

$$E = H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} . \quad (70)$$

$E = const.$ bedeutet Ellipse im Phasenraum.

5.2.2 3D-Pendel

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{ml^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) - mgl \cos \theta . \quad (71)$$

$$p_\theta = ml^2 \dot{\theta} \quad , \quad p_\phi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} . \quad (72)$$

$$H(p_\theta, p_\phi, \theta, \phi) = \frac{1}{2ml^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgl \cos \theta . \quad (73)$$

5.2.3 Allgemeine quadratische Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{nm} T_{nm}(\vec{q}) \dot{q}_n \dot{q}_m - U(\vec{q}) . \quad (74)$$

$$p_n = \sum_m T_{nm} \dot{q}_m \quad \rightarrow \quad \dot{q}_m = \sum_n (T^{-1})_{mn} p_n . \quad (75)$$

$$H = \frac{1}{2} \sum_{nm} (T^{-1})_{nm} p_n p_m + U(\vec{q}) . \quad (76)$$

5.3 Phasenraum

Der 2f-dimensionale Raum \vec{q}, \vec{p} . Dynamisches System:

$$\dot{x}_j = F_j(\vec{x}) . \quad (77)$$

In unserem Fall $\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p})$, oder $x_j = q_j$ für $1 \leq j \leq f$ und $x_j = p_{j-f}$ für $f+1 \leq j \leq 2f$. In unserem Fall $F_j = \partial H / \partial x_{j+f}$ für $1 \leq j \leq f$ und $F_j = -\partial H / \partial x_{j-f}$ für $f+1 \leq j \leq 2f$.

5.3.1 Liouville-Theorem (Satz von Liouville)

Wir betrachten die Abbildung im Phasenraum $\vec{x} \equiv \vec{x}(t) \rightarrow \vec{g} \equiv \vec{x}(t+dt)$, wobei $g_j \equiv x_j(t+dt) \approx x_j + F_j(\vec{x})dt$. Wir betrachten ein Volumen-Element Ω_x , dessen Volumen lautet

$$\Gamma(t) = \int_{\Omega_x} d^{2f}x . \quad (78)$$

Zur Zeit $t+dt$ wird das Volumen-Element in das andere Volumen-Element Ω_g abgebildet.

$$\Gamma(t+dt) = \int_{\Omega_g} d^{2f}g = \int_{\Omega_x} d^{2f}x \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \quad (79)$$

Wir erhalten

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = \det \left(\delta_{ij} + dt \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = 1 + dt \text{Tr} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) + O(dt^2) . \quad (80)$$

In unserem fall

$$\text{Tr} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{n=1}^f \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial x_n} - \sum_{n=1}^f \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial x_n} = 0. \quad (81)$$

Wir haben bewiesen, dass $d\Gamma/dt = 0$.

5.3.2 Periodisches, Chaotisches, Ergodisches Verhalten (nur zur Information)

5.4 Poissonklammern

Wir untersuchen eine Größe $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ die eine Funktion des Orts im Phasenraum ist.

$$\frac{d}{dt}A = \sum_j \frac{\partial A}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial A}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial A}{\partial t} . \quad (82)$$

Wir verwenden die Hamilton-Bewegungsgleichungen und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A &= \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} .\end{aligned}\tag{83}$$

Wir haben die Poissonklammern von zwei Größen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $B(\vec{q}, \vec{p}, t)$ definiert als

$$\{A, B\} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j} \frac{\partial B}{\partial q_j} \right) .\tag{84}$$

Insbesondere lassen sich die Hamilton-Gleichungen zu schreiben als

$$\dot{q}_j = \{q_j, H\} \quad , \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}\tag{85}$$

Es gilt auch

$$\{q_m, p_n\} = \delta_{mn} \quad , \quad \{q_m, q_n\} = 0 \quad , \quad \{p_m, p_n\} = 0 .\tag{86}$$

5.4.1 Eigenschaften von Poissonklammern

$$\{A, B\} = -\{B, A\} ,\tag{87}$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} ,\tag{88}$$

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + \{A, C\}B ,\tag{89}$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 .\tag{90}$$

Die letzte Identität heisst *Jakobi-Identität*.

5.4.2 Poisson-Satz

A und B sind zwei erhaltene Größen. D.h. $\{A, H\} = 0$ und $\{B, H\} = 0$, und es gibt keine explizite Zeitabhängigkeit: $\partial A/\partial t = 0$ und $\partial B/\partial t = 0$. Dann auch die Größe $\{A, B\}$ ist erhalten. Beweis: Jakobi-Identität mit A , B und H .

Der Satz gilt auch für zwei erhaltenen Größen mit expliziter Zeitabhängigkeit, d.h., wenn gilt $dA/dt = \{A, H\} + \partial A/\partial t = 0$ und $dB/dt = \{B, H\} + \partial B/\partial t = 0$, dann gilt auch $(d/dt)\{A, B\} = 0$.

6 Kleine Schwingungen in Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

6.1 Die Lagrange-Funktion

Wir betrachten ein System mit f Freiheitsgraden und der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} T_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(\vec{q}) . \quad (91)$$

Wir nehmen an, dass $U(\vec{q})$ ein Minimum hat im Punkt $\vec{q} = \vec{q}_0$. D.h., $\partial U / \partial q_j = 0$. Wir definieren die Matrix

$$V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}=\vec{q}_0} . \quad (92)$$

Diese Matrix ist symmetrisch $V_{ij} = V_{ji}$. Dann, in der Umgebung des Punktes \vec{q}_0 gilt

$$U(\vec{q}) = U(\vec{q}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} (q_i - q_{0,i})(q_j - q_{0,j}) = U(\vec{q}_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} x_i x_j , \quad (93)$$

wobei $x_i \equiv q_i - q_{0,i}$. Die Tatsache, dass U ein Minimum hat bedeutet, dass die quadratische Form $\sum_{ij} V_{ij} x_i x_j = \vec{x}^T \hat{V} \vec{x}$ positive definite ist. D.h., für beliebige $\vec{x} \neq 0$ gilt $\sum_{ij} V_{ij} x_i x_j > 0$.

Es gibt die stationäre (zeitunabhängige) Lösung (Bahnkurve) $\vec{q} = \vec{q}_0$, d.h., $\vec{x} = 0$. Wir betrachten die Bahnkurven in der Umgebung von \vec{q}_0 , d.h., wenn x_i sind klein. In der Umgebung definieren wir auch

$$m_{ij} \equiv T_{ij}(\vec{q}_0) . \quad (94)$$

Schließlich lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j) . \quad (95)$$

Die quadratische Form m_{ij} ist auch positive definite (die kinetische Energie muss positive sein).

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\sum_j m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_j V_{ij} x_j = 0 . \quad (96)$$

In der Matrix-Form lauten die Bewegungsgleichungen

$$\hat{m} \ddot{\vec{x}} + \hat{V} \vec{x} = 0 . \quad (97)$$

6.2 Die Eigenschwingungen

Wir versuchen den Ansatz

$$\vec{x} = \vec{A}e^{i\omega t} \quad \text{oder} \quad x_i = A_i e^{i\omega t} . \quad (98)$$

Was damit gemeint wird ist eigentlich $x_k(t) = \text{Re}(A_k e^{i\omega t})$. Da alle Bewegungsgleichungen linear sind, kann der Realteil am Ende berechnet werden. Das ergibt

$$\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_j = 0 . \quad (99)$$

Die Lösung für \vec{A} existiert nur wenn

$$\det(V_{ij} - \omega^2 m_{ij}) = 0 . \quad (100)$$

Das ist ein Polynom von Grad f der Variablen ω^2 . D.h., es existieren f Lösungen, d.h. f möglichen Werte von ω^2 . Wir benennen diese als ω_k^2 , $k \in [1, \dots, f]$. Zunächst sind ω_k^2 komplex. Jedem ω_k^2 entspricht ein Eigenvektor $\vec{A}^{(k)} = A_i^{(k)}$. Wir wollen beweisen, dass

- 1) Alle ω_k^2 reell und positiv sind,
- 2) Die Eigenvektoren $A_i^{(k)}$ können auch reell gewählt werden.
- 3) Die reellen Eigenvektoren $A_i^{(k)}$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis.

Beweis:

1) Wir benutzen die Identität $\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$ und multiplizieren mit dem komplex konjugiertem Vektor $A_i^{*(k)}$. Es ergibt sich dann $\sum_{i,j} (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{*(k)} = 0$ und

$$\omega_k^2 = \frac{\sum_{i,j} V_{ij} A_j^{(k)} A_i^{*(k)}}{\sum_{i,j} m_{ij} A_j^{(k)} A_i^{*(k)}} . \quad (101)$$

Aus der Symmetrie und Realität von V_{ij} und m_{ij} folgt, dass ω_k^2 reell sind. Beide Formen V_{ij} und m_{ij} sind positiv definit. (Für komplexe Vektoren aus der Symmetrie folgt $\sum_{i,j} V_{ij} A_j A_i^* = \sum_{i,j} V_{ij} \text{Re} A_j \text{Re} A_i + \sum_{i,j} V_{ij} \text{Im} A_j \text{Im} A_i$). D.h., wir haben bewiesen, dass $\omega_k^2 \geq 0$.

2) Aus $\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$ folgt auch $\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{*(k)} = 0$. D.h., dass $\text{Re} A_i$ und $\text{Im} A_i$ Eigenvektoren sind.

3) Aus $\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$ folgt $\sum_{j=1, i=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(p)} = 0$ und auch $\sum_{j=1, i=1}^f (V_{ij} - \omega_p^2 m_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(p)} = 0$. Schließlich

$$(\omega_p^2 - \omega_k^2) \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = 0 . \quad (102)$$

Zunächst nehmen wir an, dass alle ω_k^2 unterschiedlich sind. Dann $\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = 0$ für $p \neq k$. Lineare Unabhängigkeit: nehmen wir an den Gegensatz: $\sum_k c_k A_j^{(k)} = 0$. Dann $\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} \left(\sum_k c_k A_j^{(k)} \right) = 0$. Andererseits $\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} \left(\sum_k c_k A_j^{(k)} \right) = c_p \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(p)}$. Es ergibt sich dann $c_p = 0$ für alle p . Q.E.D. (Den Fall der Entartung betrachten wir hier nicht.)

Die Lösung $x_i(t) = A_i^{(k)} e^{i\omega_k t}$ heisst Eigenschwingung.

6.3 Normalkoordinaten

Wir normieren die reelle Eigenvektoren so, dass

$$\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \delta_{p,k} . \quad (103)$$

Das kann gemacht werden auch wenn die Eigenfrequenzen entartet sind. Diese Bedingung kann auch anders dargestellt werden. Wir führen die Matrix $a_{ik} = A_i^{(k)}$ ein. Dann

$$\begin{aligned} \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} &= \sum_{ij} m_{ij} a_{ip} a_{jk} \\ &= \sum_{ij} a_{pi}^T m_{ij} a_{jk} = \delta_{pk} . \end{aligned} \quad (104)$$

Oder

$$a^T m a = \hat{1} . \quad (105)$$

Wir haben dann (aus $\sum_{j=1}^f (V_{ij} - \omega_k^2 m_{ij}) A_j^{(k)} = 0$)

$$\sum_{ij} V_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \omega_k^2 \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(p)} A_j^{(k)} = \omega_p^2 \delta_{p,k} . \quad (106)$$

Oder

$$a^T V a = \omega^2 . \quad (107)$$

Wir zerlegen \vec{x} in der Basis $\vec{A}^{(k)}$.

$$x_i(t) = \sum_k Q_k(t) A_i^{(k)} . \quad (108)$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \sum_k \dot{Q}_k A_i^{(k)} \sum_p \dot{Q}_p A_j^{(p)} - \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} \sum_k Q_k A_i^{(k)} \sum_p Q_p A_j^{(p)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_p \left(\dot{Q}_p^2 - \omega_p^2 Q_p^2 \right) . \tag{109}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Bahnkurve ergibt sich jetzt in den Normalkoordinaten als

$$Q_k(t) = C_k e^{i\omega_k t} , \tag{110}$$

wobei C_k eine beliebige *komplexe* Konstante ist $C_k = |C_k| e^{i\varphi_k}$. Das bedeutet (Q_k muss eigentlich reell sein)

$$Q_k(t) = \operatorname{Re} (C_k e^{i\omega_k t}) = |C_k| \cos(\omega_k t + \varphi_k) . \tag{111}$$

Damit erhalten wir

$$x_i(t) = \sum_k Q_k(t) A_i^{(k)} = \sum_k |C_k| A_i^{(k)} \cos(\omega_k t + \varphi_k) . \tag{112}$$

Es gibt dann $2f$ reellen Konstanten $|C_k|$ und φ_k mit denen man beliebige Anfangsbedingungen genügen kann.

7 Kanonische Transformationen

7.1 Die Idee

Die Transformation zu den Normalkoordinaten

$$x_i = \sum_k Q_k A_i^{(k)} \tag{113}$$

stellt ein Beispiel der Transformation zwischen den alten Koordinaten $\vec{q} = \vec{x}$ und den neuen Koordinaten \vec{Q} dar. Im Allgemeinen haben wir die Relationen $\vec{q} = \vec{q}(\vec{Q}, t)$ und $\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, t)$. Eine Transformation dieser Art liefert die neue Lagrange-Funktion und, dadurch, die neue Hamilton-Funktion. Die Euler-Lagrange-Gleichungen und die Hamilton-Gleichungen behalten, natürlich, die selbe Form bei. Solche Transformationen heißen Punkttransformationen.

Wir suchen nach allgemeineren Transformationen im Phasenraum $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$, sodass aus der Hamilton-Gleichungen $\dot{q}_j = \partial H / \partial p_j$ und $\dot{p}_j = -\partial H / \partial q_j$ die neuen Hamilton-Gleichungen $\dot{Q}_j = \partial H' / \partial P_j$ und $\dot{P}_j = -\partial H' / \partial Q_j$ mit der neuen Hamilton-Funktion H' folgen. Diese Transformationen heißen *kanonische* Transformationen. Nicht jede Transformation passt.

7.2 Zeitunabhängige kanonische Transformationen

Wir beschränken uns auf einen Freiheitsgrad. Wir betrachten zunächst die zeitunabhängige Transformationen

$$Q = Q(q, p) \quad P = P(q, p) , \quad (114)$$

und

$$q = q(Q, P) \quad p = p(Q, P) . \quad (115)$$

Die Dynamik der "alten" Koordinaten ist bestimmt durch die Hamilton-Funktion $H(q, p)$. D.h., $\dot{q} = \{q, H\} = \partial H / \partial p$ und $\dot{p} = \{p, H\} = -\partial H / \partial q$. Für Q und P gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \{Q, H\}_{q,p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} , \\ \dot{P} &= \{P, H\}_{q,p} = \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} . \end{aligned} \quad (116)$$

Als $H'(Q, P)$ nehmen wir $H'(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$. Die "neuen" Hamilton-Gleichungen die wir wollen lauten

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H'}{\partial P} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial P} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H'}{\partial Q} = -\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} . \end{aligned} \quad (117)$$

Der Vergleich von (116) und (117) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= \frac{\partial p}{\partial P} , & \frac{\partial Q}{\partial p} &= -\frac{\partial q}{\partial P} , \\ \frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{\partial q}{\partial Q} , & \frac{\partial P}{\partial q} &= -\frac{\partial p}{\partial Q} . \end{aligned} \quad (118)$$

Wir haben die Relation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \\ -\frac{\partial P}{\partial Q} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{pmatrix}}{\{Q, P\}_{q,p}} . \quad (119)$$

Wir beschließen, dass (118) sind erfüllt wenn $\{Q, P\}_{q,p} = 1$.

Wir erhalten die Bedingung dafür, dass die Transformation $Q_j = Q_j(\vec{q}, \vec{p})$, $P_j = P_j(\vec{q}, \vec{p})$ eine kanonische Transformation ist:

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{i,j} \quad \{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 . \quad (120)$$

7.3 Modifiziertes Hamilton-Prinzip

Wir leiten das Prinzip für einen Freiheitsgrad her. Verallgemeinerung auf mehrere Freiheitsgrade ist einfach. Im Phasenraum gilt

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \{ p\dot{q}(q, p, t) - H(q, p, t) \} . \quad (121)$$

Wir variieren δq und δp als unabhängige Funktionen der Zeit:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right\} \quad (122)$$

Partielle Integration des zweiten Beitrags zusammen mit $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \dot{q} \delta p - \dot{p} \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right\} . \end{aligned} \quad (123)$$

Es ergeben sich die Hamilton-Bewegungsgleichungen.

7.4 Erzeugende Funktion

Wir erhalten die kanonischen Transformationen aus dem modifizierten Hamilton-Prinzip

$$\delta S = \delta \int \left\{ \sum_j p_j dq_j - H dt \right\} = 0 . \quad (124)$$

In den neuen Koordinaten lautet das Prinzip

$$\delta \int \left\{ \sum P_j dQ_j - H' dt \right\} = 0 . \quad (125)$$

Die zwei Prinzipien müssen äquivalent sein. Das ist so nur wenn $\sum_j p_j dq_j - H dt$ und $\sum P_j dQ_j - H' dt$ sich um ein volles Differential unterscheiden:

$$dF = \sum_j p_j dq_j - \sum_j P_j dQ_j + (H' - H) dt . \quad (126)$$

Hier ist wichtig zu verstehen, dass bei einer kanonischen Transformation nur zwei Variablen (Vektoren) aus den Vier $\vec{q}, \vec{Q}, \vec{p}, \vec{P}$ unabhängig sind. Wir können dann wählen, z.B., $F = F(\vec{q}, \vec{Q}, t)$. Das ist eine bequeme Wahl da aus (126) folgt jetzt

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j} , \quad (127)$$

$$P_j = - \frac{\partial F}{\partial Q_j} , \quad (128)$$

$$H' - H = \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (129)$$

Aus den zwei ersten Gleichungen können wir $q_j(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ und $p_j(\vec{Q}, \vec{P}, t)$ auflösen. Dann die neue Hamilton-Funktion lautet

$$H'(\vec{Q}, \vec{P}, t) = H(\vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t), \vec{p}(\vec{Q}, \vec{P}, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{\vec{q} \rightarrow \vec{q}(\vec{Q}, \vec{P}, t)} . \quad (130)$$

Die Funktion $F(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ heißt *erzeugende Funktion*.

Beispiel: Oscillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} . \quad (131)$$

$$F(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q . \quad (132)$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \cot Q . \quad (133)$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q} \quad (134)$$

Wir lösen auf:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad , \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q \quad (135)$$

$$H' = \omega P \quad (136)$$

Ende des Beispiels.

Eine andere Möglichkeit ist die Gl. (126) so umzuschreiben

$$d\Phi \equiv d(F + \sum_j P_j Q_j) = \sum_j p_j dq_j + \sum_j Q_j dP_j + (H' - H)dt \quad (137)$$

Jetzt betrachten wir \vec{q} und \vec{P} als unabhängig und $\Phi \equiv F + \sum_j P_j Q_j = \Phi(\vec{q}, \vec{P})$. Dann gilt

$$p_j = \frac{\partial \Phi}{\partial q_j} \quad (138)$$

$$Q_j = \frac{\partial \Phi}{\partial P_j} \quad (139)$$

$$H' - H = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (140)$$

Beispiel: Die Punkttransformationen:

$$\Phi(\vec{q}, \vec{P}) = \sum_j Q_j(\vec{q}, t) P_j \quad (141)$$

Diese Erzeugende ergibt

$$Q_j = Q_j(\vec{q}, t) \quad , \quad p_j = \sum_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} P_i \quad (142)$$

Ende des Beispiels.

7.5 Kanonische Transformationen und Poisson-Klammern

Wir betrachten zwei Größen $f(\vec{q}, \vec{p})$ und $g(\vec{q}, \vec{p})$. Nach der kanonischen Transformation erhalten wir $f(\vec{Q}, \vec{P})$ und $g(\vec{Q}, \vec{P})$. Es gilt

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \quad (143)$$

Daraus folgen, z.B.,

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \quad , \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \quad , \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad (144)$$

8 Der Starre Körper

Starrer Körper: eine Menge von Massenpunkten m_i die Abstände zwischen deren ist fest. Der Kontinuum-Limes kann verwendet werden.

8.1 Winkelgeschwindigkeit

Schwerpunkt: $\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i$. Die Position des Körpers wird eindeutig bestimmt durch die Position des Schwerpunkts \vec{R} und noch eine Drehmatrix D_{kp} . Wir definieren zwei Koordinatensysteme: 1) festes inertiales System mit den orthonormalen Basis-Vektoren \vec{n}_1, \vec{n}_2 , and \vec{n}_3 ; 2) das körperfeste System mit den orthonormalen Basis-Vektoren $\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t)$, and $\vec{e}_3(t)$. Der Massenpunkt i wird beschrieben mit dem Vektor $\vec{b}_i(t)$. Wir erhalten

$$\vec{b}_i(t) = \sum_k b_{ik} \vec{e}_k(t) . \quad (145)$$

Die Koeffizienten b_{ik} sind zeitunabhängig, da es sich um körperfestes System handelt. Die Drehmatrix beschreibt die Position der körperfesten Basis:

$$\vec{e}_k(t) = \sum_p D_{kp}(t) \vec{n}_p . \quad (146)$$

Beispiel: Drehmatrix für die Drehung um die z -Achse um Winkel θ .

$$D = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (147)$$

Ende des Beispiels. Der Ort des Massenpunkts i ist gegeben durch den Vektor \vec{r}_i :

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{b}_i . \quad (148)$$

Eine kleine Bewegung während Zeit dt :

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + d\vec{b}_i . \quad (149)$$

Der Vektor $d\vec{b}_i$ ist gegeben durch eine kleine Drehung. Jede kleine Drehung kann dargestellt werden als Drehung um (eine beliebige) Achse \vec{n} um den Winkel $\delta\theta$. **Bild.** D.h., $d\vec{b}_i = d\theta \vec{n} \times \vec{b}_i$. Die Geschwindigkeit \vec{v}_i ergibt sich als

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i , \quad (150)$$

wobei $\vec{V} \equiv \frac{d}{dt} \vec{R}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{n}$.

Die Winkelgeschwindigkeit ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs des körperfesten Systems \vec{R} . Beweis: wählen wir den anderen Ursprung (kein Schwerpunkt mehr) $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{a}$. Dann gilt $\vec{b}'_i = \vec{b}_i - \vec{a}$ oder $\vec{b}_i = \vec{b}'_i + \vec{a}$. Aus (150) erhalten wir

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{b}'_i . \quad (151)$$

Andererseits

$$\vec{V}' \equiv \frac{d}{dt} \vec{R}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} . \quad (152)$$

Dann gilt

$$\vec{v}_i = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i . \quad (153)$$

Wir sehen, dass $\vec{\Omega}$ nicht geändert wurde.

8.2 Trägheitstensor

Wir berechnen die kinetische Energie des Körpers.

$$T = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i \right)^2 . \quad (154)$$

Wir erhalten

$$T = \sum_i \left(\frac{m_i \vec{V}^2}{2} + \vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \times m_i \vec{b}_i) + \frac{m_i}{2} (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i)^2 \right) . \quad (155)$$

Wenn \vec{R} der Schwerpunkt ist gilt $\sum_i m_i \vec{b}_i = 0$. Das ergibt

$$T = \frac{M \vec{V}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\vec{\Omega} \times \vec{b}_i \right)^2 , \quad (156)$$

wobei $M \equiv \sum_i m_i$ die Gesamtmasse ist. Der erste Teil ist Energie der Schwerpunktsbewegung T_s . Der zweite Teil ist die Drehungsenergie T_{rot} . Wir benutzen die Relation

$$(\vec{A} \times \vec{B})^2 = \vec{A}^2 \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 . \quad (157)$$

Beweis: $(\vec{A} \times \vec{B})_j = \sum_{kl} \epsilon_{jkl} A_k B_l$. Dann $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = \sum_j (\sum_{kl} \epsilon_{jkl} A_k B_l) (\sum_{mp} \epsilon_{jmp} A_m B_p)$. Aus $\sum_j \epsilon_{jkl} \epsilon_{jmp} = \delta_{km} \delta_{lp} - \delta_{kp} \delta_{lm}$ folgt (157). Q.E.D. Dann

$$T_{\text{rot}} = \sum_i \frac{m_i}{2} \sum_{lm} (\Omega_l^2 b_{im}^2 - \Omega_l b_{il} \Omega_m b_{im}) , \quad (158)$$

oder

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{kp} \Omega_k \Omega_p \sum_i m_i \left(\sum_m b_{im}^2 \delta_{kp} - b_{ik} b_{ip} \right) , \quad (159)$$

oder

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{kp} \Omega_k \Omega_p I_{kp} , \quad (160)$$

wobei

$$I_{kp} \equiv \sum_i m_i \left((\vec{b}_i)^2 \delta_{kp} - b_{ik} b_{ip} \right) . \quad (161)$$

Die Matrix I_{kp} heisst Trägheitstensor.

Im Kontinuum-Limes gilt

$$I_{kp} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \left[(\vec{x})^2 \delta_{kp} - x_k x_p \right] . \quad (162)$$

8.2.1 Eigenschaften des Trägheitstensors

Folgende Eigenschaften sind wichtig

1) Symmetrie $I_{kp} = I_{pk}$.

2) Trägheitsmoment bezüglich Achse \vec{n} . Wenn $\vec{\Omega} = \Omega \vec{n}$ gilt

$$T_{\text{rot}} = \frac{\Omega^2}{2} \sum_{kp} I_{kp} n_k n_p = \frac{\Omega^2}{2} I_{\vec{n}} . \quad (163)$$

3) Hauptachsen. I_1, I_2, I_3 .

4) $I_1 + I_2 \geq I_3$.

5) Steiner-Satz. Sei \vec{R} der Schwerpunkt. $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{a}$. Dann gilt $\vec{b}'_i = \vec{b}_i - \vec{a}$ oder $\vec{b}_i = \vec{b}'_i + \vec{a}$. Wir erhalten

$$I'_{kp} = \sum_i m_i \left((\vec{b}'_i)^2 \delta_{kp} - b'_{ik} b'_{ip} \right) = \sum_i m_i \left((\vec{b}_i - \vec{a})^2 \delta_{kp} - (b_{ik} - a_k)(b_{ip} - a_p) \right) . \quad (164)$$

Mit $\sum_i m_i b_{ik} = 0$ (Schwerpunkt) erhalten wir

$$I'_{kp} = I_{kp} + M(\vec{a}^2 \delta_{kp} - a_k a_p) . \quad (165)$$

8.3 Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{b}_i) \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_i) . \quad (166)$$

Da \vec{R} der Schwerpunkt ist gilt $\sum_i m_i \vec{b}_i = 0$ und

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{b}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) . \quad (167)$$

Wir definieren $\vec{L}_s = M \vec{R} \times \vec{V} = \vec{R} \times \vec{P}$ und.

$$\vec{L}_{\text{rot}} = \sum_i m_i \vec{b}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{b}_i) = \sum_i m_i \left[\vec{\Omega} (\vec{b}_i)^2 - \vec{b}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_i) \right] . \quad (168)$$

$$L_{\text{rot},k} = \sum_p I_{kp} \Omega_p . \quad (169)$$

8.4 Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \times \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i . \quad (170)$$

Der erste Beitrag verschwindet. Sei \vec{k}_i die Kraft die auf den Massenpunkt m_i wirkt. Mit $\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \vec{k}_i$ wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{k}_i = \vec{R} \times \sum_i \vec{k}_i + \sum_i \vec{b}_i \times \vec{k}_i . \quad (171)$$

Wir definieren die Gesamtkraft $\vec{K} = \sum_i \vec{k}_i$. Dann

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_s = \vec{R} \times \frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{R} \times \vec{K} . \quad (172)$$

Die Bewegungsgleichung für den Rotationsteil L_{rot} lautet

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{rot}} = \sum_i \vec{b}_i \times \vec{k}_i = \sum_i \vec{n}_i = \vec{N} . \quad (173)$$

Hier \vec{n}_i ist das Drehmoment wirkend auf den Massenpunkt m_i und \vec{N} ist das Gesamtdrehmoment. Die Bewegungsgleichungen dann lauten

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{K} \quad , \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{rot}} = \vec{N} . \quad (174)$$

Beispiel: Rolle mit gegebenem Drehmoment \vec{N} . Das Trägheitsmoment bezüglich der Achse der Rolle lautet

$$I_{33} = \frac{MR^2}{2} . \quad (175)$$

Die Winkelgeschwindigkeit (entlang der Achse) $\Omega_3 = \dot{\varphi}$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\dot{L}_3 = I_{33} \dot{\varphi} = N_3 . \quad (176)$$

Hier N_3 ist die Komponente des Drehmoments entlang der Achse der Rolle.

Problem: Das Drehmoment ist nicht gegeben (konstant). Z.B., N wird von einer hängenden auf einem Seil und fallenden Masse erzeugt. Dann muss man entweder die Kräfte bestimmen oder einfach die Lagrange-Funktion aufschreiben:

$$L = T - U = \frac{I_{33} \Omega_3^2}{2} + \frac{m \dot{h}^2}{2} - mgh . \quad (177)$$

Hier ist h die Höhe der Masse. Wir haben $h = \text{const} - R\varphi$. Also, lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{(M + 2m)R^2 \dot{\varphi}^2}{4} + mgR\varphi . \quad (178)$$

Die Bewegungsgleichung ist einfach zu finden.

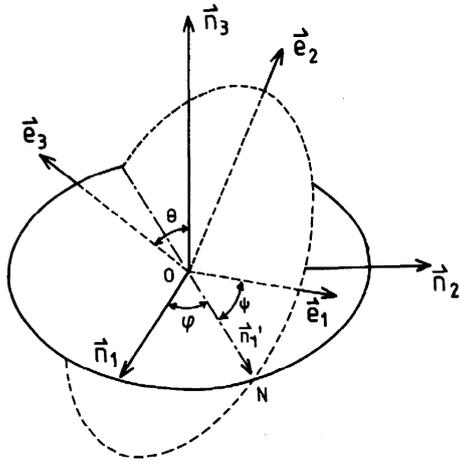


Abbildung 1: Euler-Winkel

8.5 Allgemeine Rotationen, Euler-Winkel

Die körperfeste Basis zur Zeit t ist durch eine Drehmatrix $\hat{D}(t)$ gegeben:

$$\vec{e}_k(t) = \sum_p D_{kp}(t) \vec{n}_p . \quad (179)$$

Eine Allgemeine Drehmatrix kann wie folgt parametrisiert werden

$$D = D_z(\psi) D_x(\theta) D_z(\varphi) . \quad (180)$$

Hier

$$D_z(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (181)$$

und

$$D_x(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (182)$$

Für eine beliebige Abweichung \vec{b} gilt $\dot{\vec{b}} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$. Wir zerlegen $\vec{\Omega}$ in der körperfesten Basis $\vec{\Omega} = \sum_p \Omega_p^{(e)}(t) \vec{e}_p(t)$. Dann gilt

$$\dot{\vec{e}}_k = \vec{\Omega} \times \vec{e}_k = \sum_p \Omega_p^{(e)} \vec{e}_p \times \vec{e}_k = \sum_{p,q} \Omega_p^{(e)} \epsilon_{pkq} \vec{e}_q . \quad (183)$$

Andererseits gilt

$$\dot{\vec{e}}_k = \sum_p \dot{D}_{kp}(t) \vec{n}_p = \sum_{p,q} \dot{D}_{kp}(D^T)_{pq} \vec{e}_q . \quad (184)$$

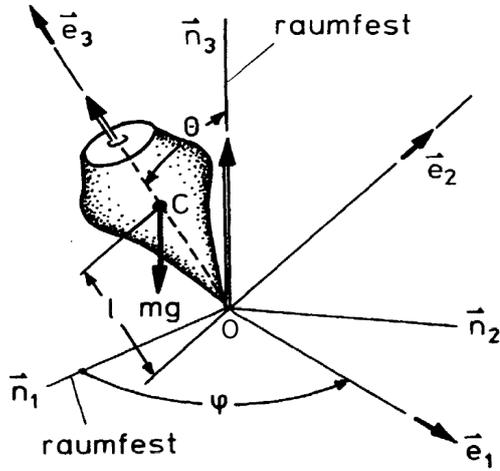


Abbildung 2: Symmetrischer Kreisel

Das ergibt für alle k und q

$$\sum_p \Omega_p^{(e)} \epsilon_{pkq} = \sum_p \dot{D}_{kp} D_{qp} . \quad (185)$$

Wir erhalten, z.B., für $k = 2$ und $q = 3$

$$\Omega_1^{(e)} = \sum_p \dot{D}_{2p} D_{3p} . \quad (186)$$

Nach einer langen Rechnung ergibt sich das folgende Ergebnis

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(e)} &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2^{(e)} &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3^{(e)} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} . \end{aligned} \quad (187)$$

8.5.1 Symmetrischer Kreisel

Für den symmetrischen Kreisel gilt $I_1 = I_2$. Die Lagrange-Funktion lautet

$$\begin{aligned} L &= \frac{I_1 + Ml^2}{2} \left([\Omega_1^{(e)}]^2 + [\Omega_2^{(e)}]^2 \right) + \frac{I_3}{2} [\Omega_3^{(e)}]^2 - Mgl \cos \theta \\ &= \frac{I_1 + Ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta \\ &= \frac{I'_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - Mgl \cos \theta , \end{aligned} \quad (188)$$

wobei $I'_1 \equiv I_1 + Ml^2$.

Es gibt drei erhaltene Größen:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = L_3 , \quad (189)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1' \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = L_z , \quad (190)$$

und die Energie

$$E = \frac{I_1'}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 + Mgl \cos \theta . \quad (191)$$

Aus den zwei ersten Größen L_3 und L_z wir erhalten

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z - \cos \theta L_3}{I_1' \sin^2 \theta} , \quad \dot{\psi} = \frac{L_3}{I_3} - \cos \theta \dot{\varphi} . \quad (192)$$

Dann

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_1'}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - \cos \theta L_3)^2}{2I_1' \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + Mgl \cos \theta \\ &= \frac{I_1'}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) . \end{aligned} \quad (193)$$

U_{eff} divergiert für $\theta \rightarrow 0$ und $\theta \rightarrow \pi$. **Präzession, Nutation.**

8.6 Euler-Gleichungen

Die Relation zwischen dem Drehimpuls und der Winkelgeschwindigkeit gilt in jeder Basis

$$L_{\text{rot},k} = \sum_p I_{kp} \Omega_p . \quad (194)$$

Die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{K} , \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{rot}} = \vec{N} \quad (195)$$

gelten nur in dem Inertialsystem (Laborsystem). Wir zerlegen \vec{L}_{rot} und $\vec{\Omega}$ in der körperfesten Basis der Hauptachsen:

$$\vec{\Omega} = \sum_p \Omega_p^{(e)}(t) \vec{e}_p(t) , \quad \vec{L}_{\text{rot}} = \sum_p L_{\text{rot},p}^{(e)}(t) \vec{e}_p(t) , \quad \vec{N} = \sum_p N_p^{(e)}(t) \vec{e}_p(t) . \quad (196)$$

Da wir die Hauptachsen benutzen gilt

$$L_{\text{rot},p}^{(e)} = I_p \Omega_p^{(e)} . \quad (197)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_{\text{rot}} &= \sum_p I_p \left(\left[\frac{d}{dt} \Omega_p^{(e)} \right] \vec{e}_p + \Omega_p^{(e)} \left[\frac{d}{dt} \vec{e}_p \right] \right) \\ &= \sum_p I_p \dot{\Omega}_p^{(e)} \vec{e}_p + \sum_p I_p \Omega_p^{(e)} \left(\sum_k \Omega_k^{(e)} \vec{e}_k \right) \times \vec{e}_p \\ &= \sum_p I_p \dot{\Omega}_p^{(e)} \vec{e}_p + \sum_{pkm} I_p \Omega_p^{(e)} \Omega_k^{(e)} \epsilon_{kpm} \vec{e}_m \\ &= \sum_p N_p^{(e)} \vec{e}_p . \end{aligned} \quad (198)$$

Mit $m \leftrightarrow p$ wir projizieren und erhalten

$$I_p \dot{\Omega}_p^{(e)} + \sum_{km} \epsilon_{kmp} I_m \Omega_m^{(e)} \Omega_k^{(e)} = N_p^{(e)} . \quad (199)$$

Komponentenweise ergeben sich die folgenden Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1^{(e)} + (I_3 - I_2) \Omega_2^{(e)} \Omega_3^{(e)} &= N_1^{(e)} , \\ I_2 \dot{\Omega}_2^{(e)} + (I_1 - I_3) \Omega_1^{(e)} \Omega_3^{(e)} &= N_2^{(e)} , \\ I_3 \dot{\Omega}_3^{(e)} + (I_2 - I_1) \Omega_1^{(e)} \Omega_2^{(e)} &= N_3^{(e)} . \end{aligned} \quad (200)$$

8.6.1 Freier symmetrischer Kreisel

$I_1 = I_2$ und $\vec{N} = 0$ ergeben

$$\dot{\Omega}_3^{(e)} = 0 \quad , \quad \dot{\Omega}_1^{(e)} = \frac{(I_1 - I_3) \Omega_3^{(e)}}{I_1} \Omega_2^{(e)} \quad , \quad \dot{\Omega}_2^{(e)} = -\frac{(I_1 - I_3) \Omega_3^{(e)}}{I_1} \Omega_1^{(e)} , \quad (201)$$

oder

$$\Omega_3^{(e)} = \text{const.} \quad , \quad \dot{\Omega}_1^{(e)} = -\omega \Omega_2^{(e)} \quad , \quad \dot{\Omega}_2^{(e)} = \omega \Omega_1^{(e)} , \quad (202)$$

wobei

$$\omega \equiv \frac{(I_3 - I_1)}{I_1} \Omega_3^{(e)} . \quad (203)$$

Lösung:

$$\Omega_1^{(e)} = \Omega_{\perp} \cos(\omega t + \alpha) \quad , \quad \Omega_2^{(e)} = \Omega_{\perp} \sin(\omega t + \alpha) . \quad (204)$$

Wir haben gezeigt, dass $\vec{\Omega}$ präzessiert um \vec{e}_3 mit Winkelgeschwindigkeit ω . Genauso macht der Drehimpuls $\vec{L} = \sum_p L_p^{(e)}(t)\vec{e}_p(t)$ (es gilt $L_p^{(e)} = I_p\Omega_p^{(e)}$). Im Laborsystem gilt aber $\vec{L} = \text{const.}$. Dann $\vec{\Omega}$ und \vec{e}_3 präzessieren um \vec{L} . Die Präzession-Frequenz erhalten wir durch das Zerlegen des Vektors $\vec{\Omega}$ auf Richtungen \vec{L} und \vec{e}_3 :

$$\vec{\Omega} = \Omega_3^{(e)}\vec{e}_3 + \vec{\Omega}_\perp = \Omega_3^{(e)}\vec{e}_3 + \frac{\vec{L} - I_3\Omega_3^{(e)}\vec{e}_3}{I_1} = \frac{\vec{L}}{I_1} - \omega\vec{e}_3 . \quad (205)$$