Klassische Theoretische Physik B: Mechanik

Prof. Dr. J. Kühn, Dr. P. Marquard

Vorlesung Sommersemester 2011

Mitschrieb und Grafiken von Marcel Krause

mrrrc@leech.it

Korrekturlesen, stilistische Beratung und Kekse von Raphael Schmager

schmager@leech.it

Zuletzt geändert: 6. März 2012

Ich erhebe keinen Anspruch auf die Richtigkeit

oder Vollständigkeit dieses Skripts.

Inhaltsverzeichnis

1 Variationsprinzipien **4**

1.1 Einfache Beispiele 4

1.1.1 Vom Hörsaal zur Insel 4

1.1.2 Brachistochrone 6

1.2 Euler-Gleichung 7

1.3 Lösungsstrategien unter speziellen Annahmen für $f(y, y', x)$ 8

1.3.1 Keine y-Abhängigkeit 8

1.3.2 Keine explizite Abhängigkeit von x 9

2 Euler-Lagrange-Gleichung und Hamiltonsches Prinzip **12**

2.1 Holonome Zwangsbedingungen 12

2.2 Euler-Lagrange-Gleichung 13

2.3 Erhaltungssätze 14

2.3.1 Zyklische Variablen (Vgl. 1.3.1) 14

2.3.2 Energieerhaltung (Vgl. 1.3.2) 14

2.4 Beispiele 15

2.4.1 Kinetische Energie T eines freien Teilchens 15

2.4.2 Zwangsbedingungen (ohne Potential) 16

2.4.3 Bewegung mit Zwangsbedingungen und Potential U 17

2.4.4 Bewegung und zeitabhängige Zwangsbedingungen 18

3 Symmetrieprinzipien **19**

3.1 Mechanische Ähnlichkeit 19

3.1.1 Allgemeine Betrachtungen 19

3.1.2 Virialsatz 20

3.1.3 Symmetrien ⇔ Erhaltungssätze 21

4 Schwingungen eines Systems bei kleinen Auslenkungen **25**

4.1 Eigenfrequenzen und Eigenmoden 25

4.2 Normalkoordinaten 27

4.3 Anharmonische Schwingungen . . . 29
4.3.1 Anfangsbetrachtung . . . 29
4.3.2 Störungstheorie . . . 30
4.3.3 Zweite Ordnung . . . 30
4.3.4 Dritte Näherung . . . 31

5 Hamilton-Formalismus, kanonische Gleichungen, Poisson-Klammer 35
5.1 Struktur der Mechanik . . . 35
5.2 Legendre-Transformation: von $\mathscr{L}$ zu H . . . 35
5.2.1 Motivation . . . 35
5.2.2 Mathematischer Einschub: Legendre-Transformation . . . 35
5.2.3 Fortführung . . . 36
5.3 Hamilton-Funktion . . . 37
5.4 Poisson-Klammer . . . 37
5.5 Phasenraum . . . 39
5.5.1 Beispiel 1: Der harmonische Oszillator . . . 39
5.5.2 Beispiel 2: Das ebene Pendel . . . 42
5.6 Satz von Liouville . . . 44

6 Starrer Körper, Kreisel 45
6.1 Kinematik . . . 45
6.2 Trägheitstensor . . . 48
6.3 Satz von Steiner . . . 49
6.4 Drehimpuls . . . 50
6.5 Symmetrischer kräftefreier Kreisel . . . 51
6.6 Bewegungsgleichungen des starren Körpers . . . 52
6.6.1 Vorbereitung . . . 52
6.6.2 Eulersche Gleichungen . . . 53

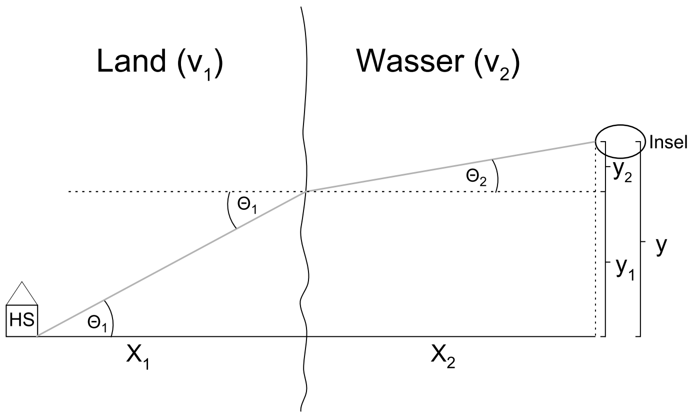
1 Variationsprinzipien

1.1 Einfache Beispiele

1.1.1 Vom Hörsaal zur Insel

a) Anfangsbetrachtung

Bestimme Bewegung oder Gestalt eines Systems so, dass ein Integral minimiert wird.



Für die Laufzeit T gilt:

$$T = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{v_2},$$

wobei $y_1 + y_2 = y$ sowie x_1, x_2 fest sind.

$$0 = \delta y = \delta y_1 + \delta y_2; \qquad \delta y_1 = -\delta y_2 \text{ (*)}$$

Suche den Weg, für den T minimal wird. Dies stellt ein Extremum dar:

$$0 = \delta T = \frac{d}{dy_1} \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} \delta y_1 + \frac{d}{dy_2} \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{v_2} \delta y_2$$

Mit (*) folgt:

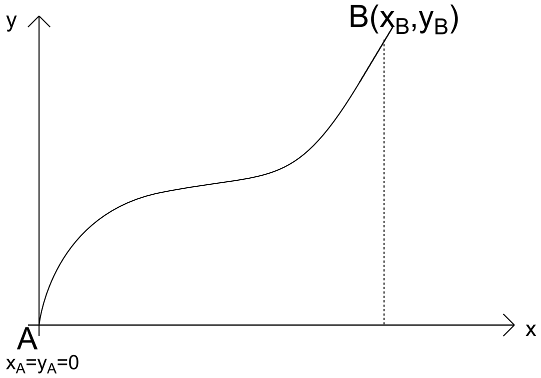
$$0 = \left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot v_1} - \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot v_2} \right) \delta y_1$$

Betrachten der letzten Gleichung in der Skizze lässt $\sin\Theta_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ und $\sin\Theta_2 = \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ erkennen. Umformen und Einsetzen führt zu:

$$\boxed{\frac{\sin\Theta_1}{v_1} = \frac{\sin\Theta_2}{v_2}}$$

Dies entspricht dem üblichen Brechungsgesetz.

b) Verallgemeinerung 1: v hänge kontinuierlich von x ab



Bahnkurve $y(x)$ mit $y(0) = 0$, $y(x_B) = y_B$ mit den festen Punkten A, B. Finde die Laufzeit T von A nach B.

Ein Wegstück hat die infinitesimale Länge

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y\right)^2}\,dx$$

mit $\frac{d}{dx}y =: y'$.

Infinitesimale Laufzeitänderung:

$$dT = \tfrac{ds}{v(x)}$$

$$\Rightarrow T = \int_A^B dT = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x)}$$

T hängt nicht nur von x ab, sondern auch von der Bahnkurve y.

$T[y]$ wird Funktional genannt.

(Unterschied zwischen Funktion und Funktional: Die Funktion hängt hier von x ab, doch das Funktional hängt von der Funktion ab.)

Suche nun das Minimum (lokal oder global, hier wäre eine lokale Betrachtung sinnvoll).

$$\Rightarrow T[y] = \int_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x)}$$

c) Verallgemeinerung 2: v hänge von x, y und Richtung ab

Betrachte nun eine Geschwindigkeit, die von x, y und von der Richtung abhänge (bspw. ein Schwimmer im Wasser: gegen oder mit dem Wellengang, mit Auf- oder Abtrieb, etc.).

$$dT^2 = f_{xx}(x,y)(dx)^2 + f_{xy}(x,y)dxdy + f_{yx}(x,y)dydx + f_{yy}(x,y)(dy)^2 = \sum_{i,j} \left(f_{ij}(x_i)dx_i dx_j\right)$$

f_{ij} wird dabei als Metrik bezeichnet.

$x_i(s)$ ist dabei Bahnkurve mit Bahnparameter s.

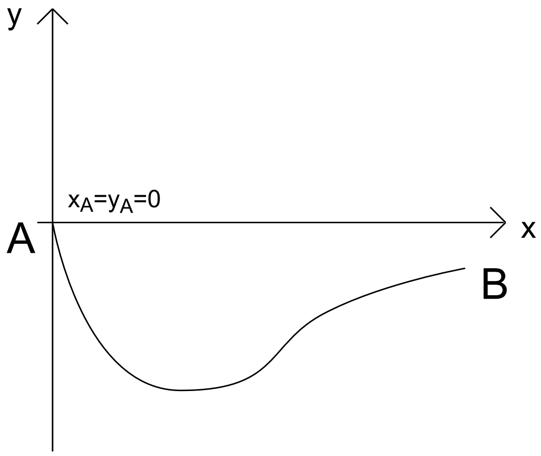
Für die Laufzeit T gilt:

$$T = \int \sqrt{\sum_{i,j} \left(f_{ij}(x_i) \frac{d}{ds} x_i \frac{d}{ds} x_j \right)} ds$$

Die Bahn mit kürzester Laufzeit nennt sich Geodäte zur Metrik f_{ij}. Diese findet sich unter anderem bei Grundfragen zur Relativitätstheorie.

1.1.2 Brachistochrone

Fragestellung: Auf welcher Bahn gleitet (ohne Reibung) ein Massenpunkt in kürzester Zeit von A nach B?



Beispiel: Ein Tunnel zwischen A und B, in dem ein Zug reibungsfrei ohne Antrieb von A nach B gleiten soll. Finde die optimale Bahn.

Für die potentielle Energie $U(y)$ gilt:

$$U(y) = mgy$$

Mit dem Energieerhaltungssatz kann man die Geschwindigkeit v bestimmen:

$$\frac{1}{2} m v^2 + U(y) = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{-2gy}$$

Im gewählten Beispiel ist v abhängig von y.

Für die Weglänge ds gilt der Zusammenhang:

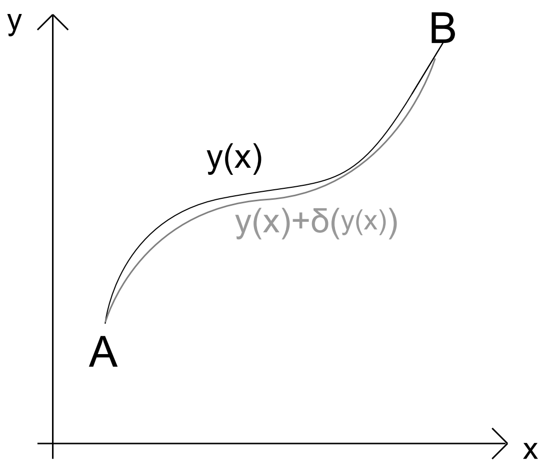
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 (1 + y'^2)$$

mit $y' = \frac{d}{dx} y$

$dT = \frac{ds}{v}$ liefert Laufzeit $T[y]$:

$$T[y] = \int_0^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-2gy}}$$

1.2 Euler-Gleichung



Es sei die Bahnkurve $y(x)$ und eine kleine Änderung $\delta(y(x))$ gegeben.

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x)$$

Forderung: Suche $y(x)$ so, dass $J[y]$ extremal (in den meisten Fällen minimal, selten maximal) wird.

$\Rightarrow J$ ändert sich nicht, wenn man $y(x)$ durch $y(x) + \delta(y(x))$ ersetzt.

Die Randpunkte bleiben bei der Änderung der Bahnkurve fest:

$$\delta(y(x_1)) = \delta(y(x_2)) = 0$$

$$J[y + \delta y] = \int_{x_1}^{x_2} dx f\left((y(x) + \delta(y(x))), (y'(x) + \delta(y'(x))), x\right)$$

mit

$$f\left((y(x) + \delta(y(x))), (y'(x) + \delta(y'(x))), x\right) =: [f + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y']$$

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right) + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}$$

Aus Voraussetzung folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0,$$

da $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$.

Umformen ergibt:

$$0 = \delta J - \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x)$$

Es gilt $\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \to 0$, daraus folgt:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Dies ist die Euler-Gleichung, eine DGL 2. Grades für $y(x)$.

Analog:

Mehrere Funktionen von x: $y_i(x)$ mit $(i = 1, ..., n)$.

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y_1, ..., y_n; y'_1, ..., y'_n; x)$$
$$\delta J[y] = 0$$

Im Allgemeinen reicht das eine Integral zur Lösung und zum Finden von $y_1, ..., y_n$ aus. Partielle Integration führt zum Ergebnis.

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_i} \right] \delta y_1 = 0$$

Jedes δy_i kann unabhängig variiert werden.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0}$$

liefert n DGLen 2. Grades.

1.3 Lösungsstrategien unter speziellen Annahmen für $f(y, y', x)$

1.3.1 Keine y-Abhängigkeit

Betrachte keine y-Abhängigkeit, also:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y, y', x) = 0$$

Die Eulergleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} f(y, y', x) = \frac{\partial}{\partial y} f(y, y', x) = 0$$

ist dann ein einfacher Fall.

Integral über x liefert:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y'} f(y, y', x) = const}$$

und zwar unabhängig von x.

Auflösen der Gleichung nach y' liefert eine DGL 1. Ordnung.

Beispiel: Weg von $A(x_A, y_A)$ nach $B(x_B, y_B)$

Die Geschwindigkeit hängt nur ab von x und **nicht** von y.

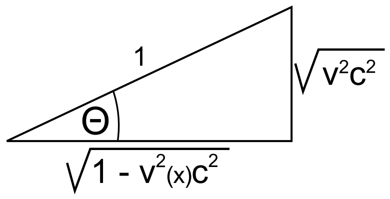
$$T = \int\limits_{x_A}^{x_B} dx f(y, y', x) = \int\limits_{x_A}^{x_B} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x)}$$

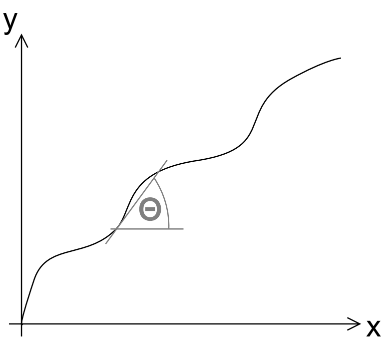
Einsetzen in die Eulergleichung liefert:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'} f = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{v(x)}\right) = 0$$

Die durch das Integrieren dieses Ausdrucks auftretende Integrationskonstante sei c, also:

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{1}{v(x)}\right) = c \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = cv(x)$$





$$\Rightarrow y'(x) = \sqrt{\frac{v^2{}_{(x)\cdot c^2}}{1 - v^2{}_{(x)\cdot c^2}}} = \tan(\Theta)$$

Dies gibt immer den Momentanwinkel der Welle und damit die Ausbreitsungsrichtung an.

$$y(x) = \int\limits_{x_1}^{x} dx' \frac{dy}{dx'} = \int\limits_{x_1}^{x} dx' \sqrt{\frac{v^2{}_{(x')} \cdot c^2}{1 - v^2{}_{(x')} \cdot c^2}} + a$$

1.3.2 Keine explizite Abhängigkeit von x

Betrachte keine explizite x-Abhängigkeit, also:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y, y', x) = 0$$

Zeige, dass gilt:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f\right] = -\frac{\partial}{\partial x}f$$

Beweis durch Ausrechnen:

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \frac{\partial}{\partial x}f\right]$$

Identifiziere hier

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

durch die Eulergleichung, so kürzen sich alle Terme bis auf den letzten zu:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f\right] = c = const}$$

Löse dies auf nach y':

$$y' = h(y)$$

Dies liefert (mit $c' = const$) eine DGL 1. Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = h(y)$$
$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int dx = x + c'$$

Dies führt auf eine Gleichung der Form $x(y)$, invertieren führt zu dem (oft) gesuchten $y(x)$.

Vorteil:

Es handelt sich um eine DGL 1. Ordnung, Problem ist durch gewöhnliche Integration lösbar.

Beispiel: Brachistochrone

$$f(y, y') = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-2gy}}$$
$$\frac{\partial}{\partial y'}f = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\frac{1}{\sqrt{-2gy}}$$

Einsetzen führt zu:

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\frac{1}{\sqrt{-2gy}}y' - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{-2gy}} = c$$
$$\Leftrightarrow 1 = c^2(-2g)y(1 + y'^2)$$

Auflösen nach y':

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{c^2(-2g)y} - 1}$$

Trennung der Variablen:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{c^2(-2g)y} - 1}}$$

führt zu hässlichem Integral.

Besserer Ansatz:

$$y = -a(1 - \cos\tau)$$
$$x = a(\tau - \sin\tau)$$

und

$$y' = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}}$$

einsetzen.

Dies beschreibt beispielsweise die Bewegung des Ventils am Reifen eines Radfahrers.

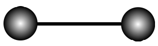
2 Euler-Lagrange-Gleichung und Hamiltonsches Prinzip

2.1 Holonome Zwangsbedingungen

Seien $\vec{r_1}, ..., \vec{r_N}$ kartesische Koordinaten von N Massenpunkten. Es gelten ferner k Zwangsbedingungen.

$$f_1(\vec{r_1}, ..., \vec{r_N}, t) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_k(\vec{r_1}, ..., \vec{r_N}, t) = 0$$

Beispiel: 2 Teilchen $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ und $|\vec{r_1} - \vec{r_2}| = 0$ sei fest.

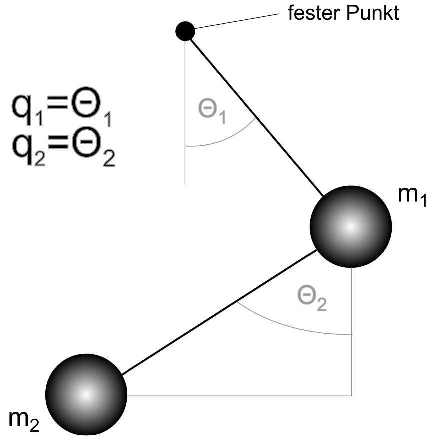
Hantel  $\widehat{=}$ 1 Zwangsbedingung

Dann hat das System $3N - k$ Freiheitsgrade. Die $3N - k$ Zahlen, die die Lage des Systems festlegen, heißen **generalisierte Koordinaten $\mathbf{q_i}$**.

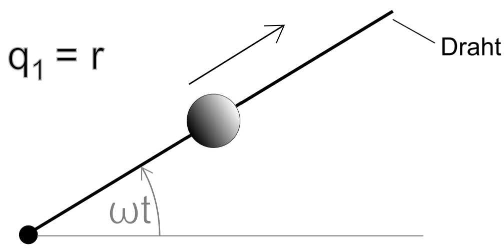
$$\vec{r_1} = \vec{r_1}(q_1, ..., q_{3N-k}, t)$$
$$\vdots$$
$$\vec{r_N} = \vec{r_1}(q_1, ..., q_{3N-k}, t)$$

Beispiele:

Doppelpendel in einer Ebene



Durchbohrte Perle auf rotierendem Draht



2.2 Euler-Lagrange-Gleichung

Betrachte eine Koordinate q.

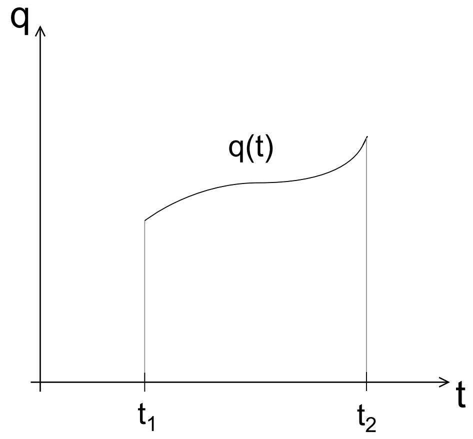
Die Wirkung S sei:

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)$$

$\mathscr{L}$ fällt jetzt vom Himmel.

Forderung:

Suche $q(t)$ so, dass $S[q]$ extremal (häufig minimal) wird. $q(t_1)$ und $q(t_2)$ liegen fest.



Fordere:

$\delta S[q] = 0$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Mit

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} \to 0$$

folgt:

$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = 0}$$

Dabei ist $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}$ die verallgemeinerte Kraft und $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$ der verallgemeinerte Impuls.
Man erkennt das Newtonsche Prinzip wieder: Die Veränderung des Impulses ist gleich der Kraft.

Für **n** verallgemeinerte Koordinaten hat man **eine** Funktion

$$\mathscr{L}(q_1, ..., q_n; \dot{q_1}, ..., \dot{q_n}; t)$$

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathscr{L}$$

Variation der unabhängigen q_i ergibt n DGLen:

$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q_i}} = 0}$$

mit $(i = 1, ..., n)$

2.3 Erhaltungssätze

2.3.1 Zyklische Variablen (Vgl. 1.3.1)

Falls $\mathscr{L}$ unabhängig von einer verallgemeinerten Koordinate q_i ist, also falls gilt

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\mathscr{L} = 0$$

dann nennt man die Koordinate q_i zyklisch.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q_i}} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q_i}} = \text{zeitl. konst.}}$$

Suche nach zyklischer Variablen durch geeignete Koordinatentransformation.

2.3.2 Energieerhaltung (Vgl. 1.3.2)

Betrachte:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\mathscr{L}\right)\dot{q} - \mathscr{L}\right] = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\mathscr{L}\right)\dot{q} + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\mathscr{L}\right)\ddot{q} - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}$$

Alle bis auf den letzten Term verschwinden.

Bei mehreren Koordinaten:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q_i}}\mathscr{L}\right)\dot{q_i} - \mathscr{L}\right] = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}$$

Falls gilt

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow [...] = \text{zeitlich konst.} = E$$

so findet man

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \mathscr{L}\right) = E$$

Dies ist eine DGL erster Ordnung.

Auflösen nach $\dot{q}$ und Trennung der Variablen führt dann auf ein gewöhnliches Integral.

Test:

Falls $\mathscr{L} = m\frac{\dot{q}^2}{2} - U(q)$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Rightarrow \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\dot{q} - \mathscr{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q)$$

2.4 Beispiele

2.4.1 *Kinetische Energie T eines freien Teilchens*

a) Kartesische Koordinaten

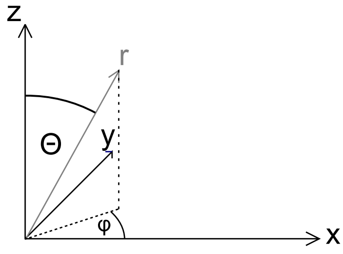
$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

b) Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z)

$$\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi & &\rightarrow & \dot{x} &= \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\
y &= \rho\sin\varphi & &\rightarrow & \dot{y} &= \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\
z &= z & &\rightarrow & \dot{z} &= \dot{z}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

c) Kugelkoordinaten



$$\begin{aligned}
x &= r\sin\Theta\cos\varphi & &\rightarrow & \dot{x} &= \dot{r}\sin\Theta\cos\varphi + r\cos\Theta\; cos\varphi\cdot\dot{\Theta} - r\sin\Theta\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \\
y &= r\sin\Theta\sin\varphi & &\rightarrow & \dot{y} &= \dot{r}\sin\Theta\sin\varphi + r\cos\Theta\sin\varphi\cdot\dot{\Theta} + r\sin\Theta\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \\
z &= r\cos\Theta & &\rightarrow & \dot{z} &= \dot{r}\cos\Theta - r\sin\Theta\cdot\dot{\Theta}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\Theta)$$

Einfacher:

$$\dot{\vec{x}}^2 = \left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ und } ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2\Theta d\varphi^2}$$

Orthogonales Koordinatensystem:

$$\vec{e_r}, \vec{e_\Theta}, \vec{e_\varphi} \text{ stehen orthogonal.}$$

Also gibt es keine gemischten Terme $dr, d\Theta$ usw.

2.4.2 Zwangsbedingungen (ohne Potential)

Identifiziere $\mathscr{L} \equiv T$.

a) Bewegung auf Zylinder

Zylinderkoordinaten mit $\rho = const$, also $\dot{\rho} = 0$

$$\mathscr{L} = T = \frac{m}{2}\left(\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Zwei zyklische Koordinaten: φ, z

Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathscr{L} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}m\rho^2\dot{\varphi} = 0$$

Erhaltung der z-Komponente des Impulses:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{L} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}m\dot{z} = 0$$

Aus $\dot{\varphi} = const$ und $\dot{z} = const$ folgt eine Schraubenbewegung.

Konstanten werden durch Anfangsbedingungen bestimmt.

b) Bewegung auf Kugeloberfläche

Es gelte $\dot{r} = 0$, dann:

$$\mathscr{L} = T = \frac{m}{2}r^2\left(\dot{\Theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\Theta\right)$$

Man erkennt: die Koordinate φ ist zyklisch.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}\mathscr{L} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\sin^2\Theta\right) = 0$$
$$mr^2\dot{\varphi}\sin^2\Theta = const = L_z$$

Bewegungsgleichung für Θ:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\Theta}\right) - mr^2\dot{\varphi}^2\sin\Theta\cos\Theta = 0$$
$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2\sin^2\Theta}$$

ist eine DGL 2. Grades für Θ.

Besser ist hier allerdings wegen $\frac{\partial}{\partial t}T = \frac{d}{dt}T = 0$:

$$\frac{m}{2}r^2\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta\cdot\dot{\varphi}^2\right) = E$$

$\dot{\varphi}$ einsetzen und nach $\dot{\Theta}$ auflösen.

c) Kegelmantel

$\Theta = \Theta_0 = const$ funktioniert analog.

2.4.3 *Bewegung mit Zwangsbedingungen und Potential U*

Betrachte hier speziell

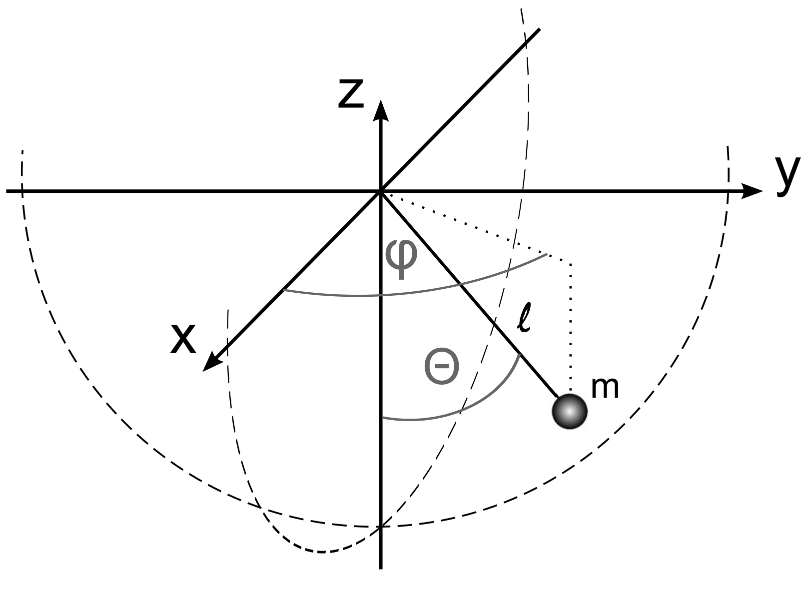
$$U = mgz$$

Benutze den Ansatz:

$$\mathscr{L} = T - U.$$

Die Rechnung ist analog zu vorher, allerdings wird $U(q)$ ausgedrückt durch die passenden Koordinaten.

Beispiel: Sphärisches Pendel (entspricht Fadenpendel)



$U = -mgl\cos\Theta$, hier ist $z = -l\cos\Theta$.

$$\mathscr{L} = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \cdot \dot{\varphi}^2\right) + mgl\cos\Theta$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\Theta}}\right)\dot{\Theta} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right)\dot{\varphi} - \mathscr{L} = \text{zeitlich konst.} = E$$

$$\boxed{\frac{ml^2}{2}\left(\dot{\Theta}^2 + \sin^2\Theta \cdot \dot{\varphi}^2\right) - mgl\cos\Theta = E}$$

und φ zyklisch.

Außerdem ist $L_z = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = const$, dann:

$$\boxed{L_z = ml^2 \sin^2\Theta \cdot \dot{\varphi}}$$

Zunächst auflösen nach $\dot{\Theta}$:

$$\dot{\Theta}^2 = \left[\frac{2}{ml^2}\left(E + mgl\cos\Theta - \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{ml^2\sin^2\Theta}\right)\right]$$

Dies führt auf $\dfrac{d\Theta}{\sqrt{[...]}} = dt$, welches ein gewöhnliches Integral darstellt.

$f(\Theta) = t + const$, dann Auflösen nach Θ.

2.4.4 Bewegung und zeitabhängige Zwangsbedingungen

Teilchen frei beweglich auf einem rotierenden Stab.

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$\varphi = \omega t$ als Zwangsbedingung, r als verallgemeinerte Koordinate.

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right)$$

3 Symmetrieprinzipien

Oder: Löse Probleme, ohne zu rechnen.

3.1 Mechanische Ähnlichkeit

3.1.1 Allgemeine Betrachtungen

Multiplikation der Lagrangefunktion mit konstantem Faktor ändert die Bewegungsgleichungen nicht.

Betrachte ein Potential U, welches eine homogene Funktion der Koordinaten ist.

$$U\left(\alpha\vec{r_1}, \alpha\vec{r_2}, ..., \alpha\vec{r_n}\right) = \alpha^k U\left(\vec{r_1}, \vec{r_2}, ..., \vec{r_n}\right)$$

wobei n und k verschieden sein dürfen.

Beispiele:

$$U = \sum_{i,j=1, i\neq j} \frac{-m_i m_j G}{|\vec{r_i} - \vec{r_j}|} \Rightarrow k = -1$$

oder

$$U = \sum_{i,j=1} \kappa_{ij}\left(\vec{r_i} - \vec{r_j}\right)^2 \Rightarrow k = 2$$

Betrachte eine Transformation

$$\vec{r_i} \to \vec{r_i}^* = \alpha\vec{r_i};$$
$$t \to t^* = \beta t$$

Deshalb $\dfrac{d\vec{r_i}}{dt} \to \dfrac{d\vec{r_i}^*}{dt^*} = \dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{d\vec{r_i}}{dt}$

$\Rightarrow$ Kinetische Energie:

$$T \to T^* = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 T$$

$\Rightarrow$ Potentielle Energie:

$$U \to U^* = \alpha^k U$$

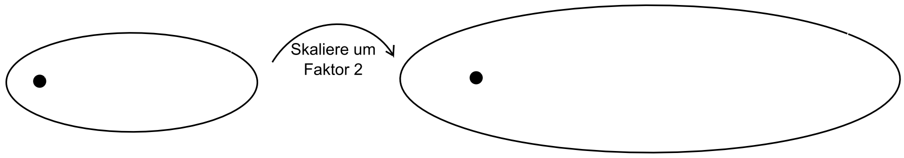
Wähle β passend, sodass

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^k, \text{ also } \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

Unter der Transformation

$$\vec{r_i} \to \vec{r_i}^* = \alpha \vec{r_i} \text{ und } t \to t^* = \alpha^{1-\frac{k}{2}} t$$

erhält $\mathscr{L}$ den Faktor α^k und die Bewegungsgleichungen für $\vec{r_i}^*$, t^* sind identisch für $\vec{r_i}$, t.
$\Rightarrow$ Wenn $\vec{r_i}(t)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, dann auch $\alpha \vec{r_i}\left(\alpha^{1-\frac{k}{2}} t\right)$
Betrachte beispielsweise eine Planetenbahn um die Sonne:



Dies ist genau die Aussage des 3. Keplerschen Gesetzes.

Im Skalenverhältnis $\frac{l^*}{l} = \alpha$ sind ähnliche Bahnen erlaubt. Die Laufzeiten zwischen entsprechenden Bahnpunkten verhalten sich wie $\frac{t^*}{t} = \left(\frac{l^*}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$.
Das gilt auch für beliebige N-Teilchen-Systeme, beispielsweise unser Sonnensystem, in welchem man alle Planetenbahnen um denselben Faktor hochskalieren kann. Die Umlaufzeiten verringern oder vergrößern sich dann um den entsprechenden Faktor.

3.1.2 Virialsatz

Zusammenhang zwischen zeitlichem Mittel von kinetischer und potentieller Energie.
Betrachte Teilchen ohne Zwangsbedingungen in kartesischen Koordinaten.
Definiere $G \equiv \sum\limits_i \vec{p_i}\vec{r_i}$
Es gilt:

$$\frac{d}{dt}G = \sum_i \vec{p_i}\dot{\vec{r_i}} + \sum_i \dot{\vec{p_i}}\vec{r_i} = 2\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r_i}}^{\,2} + \sum_i \vec{F_i}\vec{r_i} = 2T + \sum_i \vec{F_i}\vec{r_i}$$

Definiere den zeitlichen Mittelwert einer Größe $F(t)$:

$$\boxed{< F >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt F(t)}$$

Speziell:

$$< \frac{d}{dt}G(t) >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt \left(\frac{d}{dt}G(t)\right) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(G(\tau) - G(0)\right)$$

Annahme: Sei

a) entweder die Bewegung periodisch, dann wählen wir τ entsprechend der Wiederkehrzeit, z.B. $G(0) = G(\tau) = G(2\tau) = ...$

b) oder es sind $|\vec{p_i}|$ und $|\vec{r_i}|$ beschränkt, dann ist auch $G(t)$ beschränkt.

In beiden Fällen ist offensichtlich:

$$< \frac{d}{dt}G(t) >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\left(G(\tau) - G(0)\right) = 0$$
$$\Rightarrow < 2T + \sum_i \vec{F_i}\vec{r_i} >= 0$$

Annahme: $\vec{F_i}$ sei aus dem Potential $U\left(\vec{r_1}, ..., \vec{r_n}\right)$ gewonnen, also $\vec{F_i} = -\vec{\nabla}_i U$. Dann:

$$2 < T >=< \sum_i \left(\vec{\nabla}_i U\left(\vec{r_1}, ..., \vec{r_n}\right)\vec{r_i}\right) >$$

Annahme: U sei homogene Funktion vom Grade k (vgl. mit der Annahme am Anfang des Kapitels). Dann ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\nabla}_i U\right)\vec{r_i} = kU}$$

das Eulersche Theorem.

Somit ergibt sich der Virialsatz:

$$\boxed{< T >= \frac{k}{2} < U >}$$

Beispiele:

Galaxienhaufen: $k = -1$:

$$< T >= -\frac{1}{2} < U >$$

Harmonische Oszillatoren: $k = 2$:

$$< T >=< U >$$

3.1.3 Symmetrien $\Leftrightarrow$ Erhaltungssätze

a) Motivation

Energieerhaltung hängt eng zusammen mit $\mathscr{L}\left(\dot{q}, q\right)$.

Es sei $\mathscr{L}$ also invariant unter $t \to t' = t + \epsilon$.

b) Zyklische Koordinaten

$\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial\dot{q}}\mathscr{L}$ ist erhalten.

Frage: Kann der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgröße und Invarianz ohne Bezug aufs Koordinatensystem formuliert werden?

c) Noethertheorem

Invarianz von $S[q]$:

q_i sei Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung.

Es gebe eine Transformation T:

$$\boxed{\begin{aligned} &q_i \to q_i^* = q_i + \epsilon\psi_i\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \\ &t \to t^* = t + \epsilon\varphi\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) \end{aligned}}$$

Dabei sei ϵ infinitesimal.

Vergleiche $S\left[q_i(t)\right]$ mit den Randwerten t_1, t_2

und $S\left[q_i^*(t^*)\right]$ mit den Randwerten t_1^*, t_2^*

Theorem:

Falls $S\left[q_i(t)\right] = S\left[q_i^*(t^*)\right]$ gilt, dann nennen wir S invariant unter T. Es liegt eine Symmetrie vor.

$\Rightarrow$ Es gibt eine Erhaltungsgröße

$$Q\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) \equiv \sum_i \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\psi_i\right) + \left(\mathscr{L} - \sum_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi$$

und $\dfrac{d}{dt}Q = 0$

Beispiele:

Translation in der Zeit

$\mathscr{L}\left(q, \dot{q}, t\right)$ sei unabhängig von t.

Es ergibt sich die Transformation:

$$\begin{aligned} q^* &= q; \qquad &\psi = 0 \\ t^* &= t + \epsilon; \qquad &\varphi = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Q = \left(\mathscr{L} - \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)$

Dies führt zur Energieerhaltung, da Q erhalten ist.

Unabhängigkeit von einer generalisierten Koordinate

$\mathscr{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$ sei unabhängig von q_j (mit einem festen j).

Wähle:

$$\begin{aligned} q_i^* &= q_i + \delta_{ij}\epsilon\,; \qquad &\psi_i = \delta_{ij} \\ t^* &= t\,; \qquad &\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q_j}}$$

Drehungen

Es gebe zwei Variablen q_x, q_y und $\mathscr{L}$ sei von der Form

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{q_x}^2 + \dot{q_y}^2\right) - U\left(q_x^2 + q_y^2\right)$$

Für Drehungen um kleine ϵ gilt die Näherung:

$$\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ -\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$

Dies liefert die Transformation:

$$\begin{aligned} q_x \to q_x^* &= q_x + \epsilon q_y\,; \quad & \psi_x &= q_y \\ q_y \to q_y^* &= q_y - \epsilon q_x\,; \quad & \psi_y &= -q_x \\ t \to t^* &= t\,; \quad & \varphi &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = m\left(\dot{q_x} q_y - \dot{q_y} q_x\right)$$

Dies führt zur Drehimpulserhaltung.

d) Beweis des Noethertheorems

Behauptung:

$S[q]$ sei invariant unter

$$\begin{aligned} q_i \to q_i^* &= q_i + \epsilon\psi_i\left(q_j, \dot{q_j}, t\right) \\ t \to t^* &= t + \epsilon\varphi\left(q_j, \dot{q_j}, t\right) \end{aligned}$$

$S[q] = S[q^*]$ mit den Randwerten t_1^*, t_2^*.

Beweis:

$$\int\limits_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \mathscr{L}\left(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*\right) = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \mathscr{L}\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right)$$

Führe auf der linken Seite eine Variablentransformation (t^* als Funktion von t) durch, um damit die Integrationsvariable zu verändern und mache eine Taylorentwicklung bis einschließlich zur ersten Ordnung.

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{dt^*}{dt}\mathscr{L}\left(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*\right)\right] = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left(\mathscr{L}\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) + \epsilon\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{dt^*}{dt}\mathscr{L}\left(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*\right)\right]_{\epsilon=0}\right)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left[\frac{dt^*}{dt}\mathscr{L}\left(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*\right)\right]_{\epsilon=0} = 0$$

Für alle q, t ergibt sich

$$\boxed{\frac{d}{d\epsilon}\left[\frac{dt^*}{dt}\mathscr{L}\left(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*\right)\right]_{\epsilon=0} = 0} \qquad (*)$$

Umformung von $\left[\frac{dt^*}{dt}\mathscr{L}\left(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*\right)\right]$.

Verwende

$$\frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon\frac{d\varphi}{dt}$$

Außerdem eine Taylor-Entwicklung um kleine ϵ

$$\frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{1+\epsilon\frac{d\varphi}{dt}} = 1 - \epsilon\frac{d\varphi}{dt} + O\left(\epsilon^2\right)$$

Setze nun

$$\frac{dq^*}{dt^*} = \frac{dq^*}{dt}\frac{dt}{dt^*} \approx \left(\frac{dq}{dt} + \epsilon\frac{d\psi}{dt}\right)\left(1 - \epsilon\frac{d\varphi}{dt}\right) \approx \dot{q} + \epsilon\left(\dot{\psi} - \dot{q}\dot{\varphi}\right)$$

in die Gleichung $(*)$ ein; Terme in ϵ der Ordnung ≥ 2 wurden vernachlässigt.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon}\left[\mathscr{L}\left(q + \epsilon\psi, \dot{q} + \epsilon\left(\dot{\psi} - \dot{q}\dot{\varphi}\right), t + \epsilon\varphi\right)(1 + \epsilon\dot{\varphi})\right]_{\epsilon=0} \\ &= \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\left(\dot{\psi} - \dot{q}\dot{\varphi}\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{dt}\varphi + \mathscr{L}\dot{\varphi}\right) \end{aligned}$$

wobei als Argumente von $\mathscr{L}$ $q, \dot{q}, t$ zu nehmen sind.

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\dot{\psi} + \left(-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q} + \mathscr{L}\right)\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t}\varphi \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\psi\right) + \frac{d}{dt}\left[\left(\mathscr{L} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)\varphi\right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q\left(q, \dot{q}, t\right) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\psi + \left(\mathscr{L} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)\varphi}$$

ist zeitlich konstant.

In mehreren Koordinaten:

$$\boxed{Q = \sum_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\psi_i + \left(\mathscr{L} - \sum_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\varphi}$$

Jede kontinuierliche Symmetrietransformation liefert eine Erhaltungsgröße.

4 Schwingungen eines Systems bei kleinen Auslenkungen

4.1 Eigenfrequenzen und Eigenmoden

Die Lagrangefunktion sei gegeben als

$$\mathscr{L} = \sum_{j,k} a_{jk}(q_i)\dot{q}_j\dot{q}_k - U(q_i)$$

Annahme: U besitze ein Minimum bei $q_i = q_i^0$. Das Potential soll differenzierbar sein.

Taylor-Entwicklung über mehrere Variablen um das Minimum:

$$U(q_i) = U(q_i^0) + \sum_j \frac{d}{dq_j}U(q_i)\Big|_{q_i=q_i^0} \cdot (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{d}{dq_j}\frac{d}{dq_k}U(q_i)\Big|_{q_i=q_i^0} \cdot \left(q_j - q_j^0\right)(q_k - q_k^0)$$

Bei kleinen Auslenkungen ist $\dot{q}_j\dot{q}_k$ bereits quadratisch.

$$\Rightarrow a_{jk}(q_i) \Rightarrow a_{jk}(q_i^0) = const$$

Sei $x_i := (q_i - q_i^0)$, $\dot{x}_i = \dot{q}_i$.

Definiere $a_{jk}(q_i^0) =: M_{jk}$

$$\frac{d}{dq_j}\frac{d}{dq_k}U\left(q_i\right)\Big|_{q_i=q_i^0} =: K_{jk}$$

$$\mathscr{L} = \sum_{j,k}\frac{1}{2}M_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k - \sum_{j,k}\frac{1}{2}K_{jk}x_jx_k \equiv \frac{1}{2}\dot{x}^T M\dot{x} - \frac{1}{2}x^T Kx$$

M und K können symmetrisch gewählt werden.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix}$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{x}_i} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_i} = 0$$

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{j,k}K_{jk}x_jx_k\right) = \sum_j K_{ij}x_j$$

Für M entsprechend.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sum_j M_{ij}\dot{x}_j + \sum_j K_{ij}x_j = 0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M\ddot{x} + Kx = 0}$$

Dieses System linearer DGLen mit konstanten Koeffizienten löst man mit elementaren Ansätzen.

Ansatz:

$$x_k(t) = A_k e^{i\omega t}$$

mit $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$

$$-\omega^2 M\vec{A} + K\vec{A} = 0$$

oder

$$\left(K - \omega^2 M\right)\vec{A} = 0 \qquad (*)$$

In Komponenten:

$$\sum_j \left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right) A_j = 0 \qquad (**)$$

Lineares Gleichungssystem für $\vec{A}$ hat nur eine Lösung mit $\vec{A} \neq \vec{0}$, wenn gilt:

$$det(K - \omega^2 M) = 0$$

Die Determinante

$$det(K - \omega^2 M) = \begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 M_{11} & K_{12} - \omega^2 M_{12} & \cdots \\ K_{21} - \omega^2 M_{21} & K_{22} - \omega^2 M_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

ist Polynom n-ten Grades in ω^2, daraus folgt:

n Nullstellen.

Betrachte:

Eigenwerte von K und M sind positiv definit, da

$$x^T K x > 0 \text{ für } |x| > 0 \text{ (Minimum bei } x = 0\text{)}$$
$$\dot{x}^T M \dot{x} > 0 \text{ für } |\dot{x}| > 0 \text{ (kinetische Energie ist positiv)}$$

Lösung der DGL:

$$x_i(t) = \mathrm{Re}\left(A_i e^{-i\omega t}\right) \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega^2} \text{ und } A_i \text{ komplex.}$$

Aus physikalischen Gründen muss ω^2 positiv sein, sonst gibt es exponentiell wachsende Lösungen.

Mathematischer Beweis:

$$KA = \omega^2 MA \quad \text{(Gleichung } (*)\text{)}$$
$$\bar{A}^T KA = \omega^2 \bar{A}^T MA$$
$$\omega^2 = \frac{\bar{A}^T KA}{\bar{A}^T MA}$$

Da $\bar{A}^T KA > 0$ und $\bar{A}^T MA > 0$ gilt, erkennt man:

$$\omega^2 > 0.$$

Wegen

$$\text{Re}\left[(a_i + ib_i)\, e^{\pm i\omega t}\right] = a_i \cos\omega t \mp b_i \sin\omega t$$

genügt es, $\omega > 0$ und nur $e^{-i\omega t}$ zu betrachten.

$det\,|...| = 0$ hat n Lösungen (Eigenwerte)

$$\omega_k^2 \qquad \text{für } k = 1, ..., n$$

Eventuell fallen r dieser Lösungen zusammen. Dann hat das zu ω_k^2 gehörige Gleichungssystem

$$\sum_j \left(K_{ij} - \omega_k^2 M_{ij}\right) A_j^{(k)} = 0$$

den Rang $n - r$ (wobei diese Summe nicht über k läuft).

Es können r Komponenten von $A^{(k)}$ frei gewählt werden.

$\Rightarrow$ r verschiedene Lösungen zu ω_k

Insgesamt ergibt dies die Eigenschwingung oder Eigenmode

$$x_i^{(k)}(t) = \text{Re}\left(c_k A_i^{(k)} e^{-i\omega_k t}\right)$$

mit $A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \\ \vdots \\ A_n^{(k)} \end{pmatrix}$ und $k = 1, ..., n$

welche im Allgemeinen eine beliebige Linearkombination darstellt.

Im Fall $\omega_k^2 = 0$ ersetzen wir $c_k e^{-i\omega_k t}$ durch $a_k + b_k t$.

4.2 Normalkoordinaten

Übergang zu neuen Koordinaten, die den Eigenmoden entsprechen. Dies ist analog zur Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix, hier wegen $M, K \neq \mathbb{1}$ allerdings etwas komplizierter.

Es gilt

$$\left(K-\omega_k^2 M\right) A^{(k)} = 0$$
$$\Rightarrow A^{(l)^T}\left(K-\omega_k^2 M\right) A^{(k)} = 0 \qquad (I)$$

für beliebige k und l.

Ebenso gilt

$$\left(K-\omega_l^2 M\right) A^{(l)} = 0$$

Transponiert ergibt das:

$$A^{(l)^T}\left(K^T-\omega_l^2 M^T\right) = 0$$

Beachtet man die Symmetrie von K und M, also dass $K^T = K$ und $M^T = M$ gilt, dann ergibt sich weiter:

$$A^{(l)^T}\left(K-\omega_l^2 M\right) A^{(k)} = 0 \quad (II)$$

Aus $(II)-(I)$ folgt daraus:

$$\left(\omega_k^2-\omega_l^2\right) A^{(l)^T} M A^{(k)} = 0$$

Für $k \neq l$ gelte $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$

$$\Rightarrow A^{(l)^T} M A^{(k)} = 0$$

Für $k = l$ wähle die Normierung von $A^{(l)}$ so, dass $A^{(k)^T} M A^{(k)} = 1$

$$\boxed{A^{(l)^T} M A^{(k)} = \delta_{lk}}$$

Falls $M = \mathbb{1}$ gilt, dann bilden die Eigenvektoren von K ein Orthonormalsystem.

Definiere die Matrix

$$a = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_1^{(2)} & \cdots & A_1^{(n)} \\ A_2^{(1)} & A_2^{(2)} & \cdots & A_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{(1)} & A_n^{(2)} & \cdots & A_n^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad a^T M a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$A^{(l)^T}\left(K-\omega_k^2 M\right) A^{(k)} = 0$$

gilt

$$A^{(l)^T} K A^{(k)} = \omega_k^2 \delta_{lk}$$

oder

$$a^T K a = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{pmatrix} \equiv \left(\omega^2\right)$$

Die Ersetzung $X = aQ$ führt auf ein System von **entkoppelten** harmonischen Oszillatoren Q_i.

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{X}^T M \dot{X} - \frac{1}{2}X^T K X = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}^T a^T M a \dot{Q} - Q^T a^T K a Q\right)$$

Mit $a^T M a = \mathbb{1}$ und $a^T K a = \omega^2$ führt dies dann auf:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}\left(\dot{Q}_k^{\,2} - \omega_k^2 Q_k^2\right)$$

4.3 Anharmonische Schwingungen

4.3.1 Anfangsbetrachtung

Bisher: kleine Auslenkungen in Ruhelage $\Rightarrow$ **lineare** Bewegungsgleichungen

$\Rightarrow$ Frequenz unabhängig von der Stärke der Auslenkung

Frage: Was passiert bei Berücksichtigung hoher Terme in der Taylor-Entwicklung?

$\Rightarrow$ Nicht-Linearitäten, Anharmonitäten!

Benutze den Ansatz:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(m_{ik}\dot{x_i}\dot{x_k} - k_{ik}x_i x_k\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,k,l} n_{ikl}\dot{x_i}\dot{x_k}x_l - \frac{1}{3}\sum_{i,k,l} x_i x_k x_l$$

Verboten sind dabei Reibungsterme $\dot{x}^1$ oder Terme höherer Ordnung $\geq \dot{x}^3$.

Achtung: $\dot{x_i}$ nur quadratisch wegen $T = f_{ik}(x_j)\dot{x_i}\dot{x_k}$

Betrachte nur die quadratischen Terme, Übergang zu Normalkoordinaten durch lineare Transformation:

$x_i =$ lineare Funktion von Q_k

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{k}\left(\dot{Q}_k^{\,2} - \omega_k^2 Q_k^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\lambda_{ijk}\dot{Q}_i\dot{Q}_j Q_k - \frac{1}{3}\sum_{i,j,k}\mu_{ijk}Q_i Q_j Q_k$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{Q}_k} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial Q_k} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = f_k\left(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}\right) \qquad (*)$$

wobei $f_k\left(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}\right)$ eine Summe von Termen über die entsprechenden Indizes darstellt.

Frage:

Wie lautet f_k, ausgedrückt durch λ, μ?

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{d}{dt}\left(\dot{Q}_k + \sum_{h,j} \lambda_{hkj}\dot{Q}_h Q_j\right) = \ddot{Q}_k + \sum_{h,j}\lambda_{hkj}\left(\ddot{Q}_h Q_j + \dot{Q}_h \dot{Q}_j\right)$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_k} = ...$$

f_k ist homogene Funktion 2. Grades in $Q, \dot{Q}, \ddot{Q}$

4.3.2 Störungstheorie

Die $\sum$-Terme, also f_k, sind klein gegen $Q_k\omega_k^2$.

Iterative Lösung:

$$Q_k = Q_k^{(1)} + Q_k^{(2)} + Q_k^{(3)} + ...$$

1) Bestimme $Q_k^{(1)}$ aus $\ddot{Q}_k{}^{(1)} + \omega_k^2 Q_k^{(1)} = 0$

2) $Q_k^{(1)}$ in f_k eingesetzt:

$\Rightarrow$ Gleichung für $Q^{(2)}$ mit $\left|Q_k^{(2)}\right| \ll \left|Q_{k'}^{(1)}\right|$ für alle k, k'

$$Q_k^{(1)} = a_k \cos(\omega_k t + a_k)$$

$$Q_k^{(1)} + Q_k^{(2)} \text{ wird in } (*) \text{ eingesetzt.}$$

Linke Seite: $Q_k^{(1)}$ fällt heraus, es bleibt

$$\ddot{Q}_k{}^{(2)} + \omega_k^2 Q_k^{(2)} = ...$$

Rechte Seite: Wir setzen für Q_i die Näherung $Q_i^{(2)}$, quadratisch in $Q, \dot{Q}, \ddot{Q}$ und gegeben durch

$$f_k\left(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}\right)$$

f_k enthält Produkte

$$Q_i^{(1)} Q_j^{(1)} = a_i a_j \cos(\omega_i t + \alpha_i)\cos(\omega_i t + \alpha_j)$$

$$= a_i a_j \frac{1}{2}\left(\cos\left[(\omega_i t + \alpha_i) + (\omega_j t + \alpha_j)\right] + \cos\left[(\omega_i t + \alpha_i) - (\omega_j t + \alpha_j)\right]\right)$$

und ähnlich für $Q\dot{Q}, \dot{Q}^2, ...$

4.3.3 Zweite Ordnung

$\ddot{Q}_k{}^{(2)} + \omega_k^2 Q^{(2)} = \sum$ quadratisch:

$$a_i a_j \cos\left((\omega_i + \omega_j)\, t + Phasenverschiebung\right)$$

$$\text{oder } a_i a_j \cos\left((\omega_i - \omega_j)\, t + Phasenverschiebung\right)$$

Gleichung wie mit äußerer periodischer Kraft, die mit einer "Kombinationsfrequenz"$\omega_i \pm \omega_j$ wirkt, darunter auch

$$\omega_k \pm \omega_k = \begin{cases} 2\omega_k \\ 0 \end{cases}$$

Dies führt zu einer Frequenzverdopplung.

4.3.4 Dritte Näherung

Bei der dritten Näherung $Q^{(3)}$ gibt es bei den Winkelfunktionen Terme der Form

$$a_i a_j a_k \cos\left(\left(\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k\right) t + \alpha_i \pm \alpha_j \pm \alpha_k\right)$$

und speziell für $i = j = k$ auch Terme

$$a_k^3 \cos\left(\omega_k t + \alpha_k\right)$$

Die DGL:

$$\ddot{Q}_k^{(3)} + \omega_k^2 Q^{(3)} = a_k^3 \sin\left(\omega_k t + \alpha_k\right)$$

führt zu Lösungen mit zeitlich wachsender Amplitude.

$$Q_k^{(3)} = -\frac{a_k^3}{2\omega_k} t \cos\left(\omega_k t + \alpha_k\right)$$

Physikalisch nicht akzeptabel, daher muss eine Korrektur der Frequenz erfolgen.

Der lineare Term rührt her von

$$\cos\left[\left(\omega_k^{(0)} + \Delta\omega_k\right) t\right] \approx \cos \omega_k^{(0)} t - t \Delta\omega_k \sin \omega_k^{(0)} t$$

$\Delta\omega_k$ ist linear in t und $\omega_k^{(0)}$ ist die ursprüngliche Grundfrequenz.

Dabei ist zu beachten, dass dies nur für kleine t gilt.

Durch Isolierung der in t linearen Terme gewinnt man die Frequenzverschiebung.

Beispiel: Ein Freiheitsgrad

Rechnung bis zur 3. Ordnung:

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2 - \frac{m}{3}\alpha x^3 - \frac{m}{4}\beta x^4$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3} \qquad (*)$$

und

$$\left|\omega_0^2 x\right| \gg \left|\alpha x^2\right| \gg \left|\beta x^3\right|$$

Ansatz: $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \ldots$

$$x^{(1)} = a \cos \omega t$$

mit $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)}$

$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$ soll so bestimmt werden, dass kein Resonanzterm auftritt.

Umformung von $(*)$ so, dass die linke Seite immer Null wird:

$$\boxed{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\ddot{x}} \qquad (**)$$

Ansatz:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}$$
$$\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$$

Linke Seite verschwindet identisch für $x = x^{(1)}$, rechts nur $x^{(1)}$.

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)(-a)\,\omega^2 \cos\omega t$$
$$= -\alpha a^2 \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\omega t\right) + a\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\cos\omega t$$

$\Rightarrow \omega^{(1)} = 0$, keine Frequenzänderung in 2. Näherung.

$\left(2\omega_0 + \omega^{(1)}\right)\omega^{(1)} \cos\omega t$ ist klein, wäre ein Resonanzterm.

Bestimme $x^{(2)}(t)$ aus

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2}\left(1 + \cos 2\omega t\right) \qquad (***)$$

Lösung (siehe TheoA):

Verschiebung um $-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$ + einer harmonischen Frequenz 2ω.

$$\boxed{x_p^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha}{6}\frac{a^2}{\omega_0^2}\cos 2\omega t} \qquad (\S\S)$$

Dies bestätigt sich durch Einsetzen in $(***)$.

3. Näherung:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$$
$$\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$$

Betrachte in Gleichung $(**)$ nur Terme der 3. Ordnung, z.B.:

$$\left(x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}\right)^2$$
$$= x^{(1)^2} \text{ 2. Ordnung}$$
$$+2x^{(1)}x^{(2)} \text{ 3. Ordnung}$$
$$+x^{(2)^2} \text{ 4. Ordnung}$$
$$\vdots$$

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta x^{(1)^3} + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

Setze $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ aus $(\S\S)$ rechts ein.

Verwende entsprechende Theoreme für Produkte aus $\sin$ und $\cos$:

$$\cos\omega t \cdot \cos 2\omega t = ...$$
$$\cos^3 \omega t = ...$$

Nach der Rechnung:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = a^3 \left[\frac{\beta}{4} - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2}\right] \cos 3\omega t + a\left[2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5}{6}\frac{a^2\alpha^2}{\omega_0^2} - \frac{3}{4}a^2\beta\right]\cos\omega t$$

Mit der Bedingung, dass der Koeffizient vor $\cos\omega t$ Null sein muss, da dies der Resonanzterm wäre, ergibt sich:

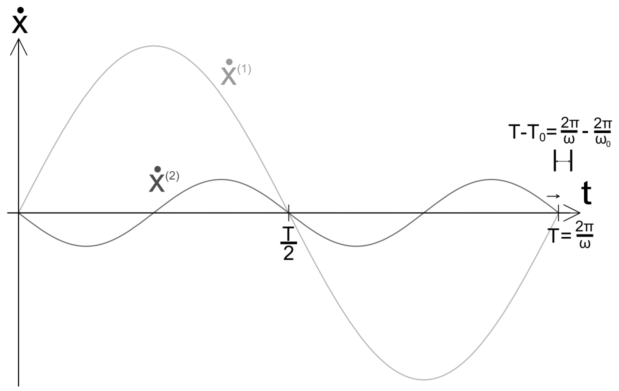
$$\boxed{\omega^{(2)} = \left(\frac{3}{8}\frac{\beta}{\omega_0} - \frac{5}{12}\frac{\alpha^2}{\omega_0^3}\right)a^2}$$

Damit ist die Störung von x:

$$\boxed{x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2}\left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2}\right)\cos 3\omega t}$$

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}l^2\dot{\Theta}^2 - V(\Theta)$$
$$E = \frac{m}{2}l^2\dot{\Theta}^2 + V(\Theta)$$
$$V(\Theta) = -mgl\cos\Theta$$

Fourier-Reihe:



1. Methode:

$$E = const; \quad \dot{\Theta}^2 = \frac{E - V(\Theta)}{\frac{ml^2}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\frac{d\Theta}{\sqrt{E - V(\Theta)}} = dt$$

Wähle Θ_0 (entspricht maximaler Auslenkung) so, dass $V(\Theta_0) = E$.

$$\sqrt{\frac{ml^2}{2}}\frac{d\Theta}{\sqrt{-mgl\left(\cos\Theta_0 - \cos\Theta\right)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\Theta_0}\frac{d\Theta}{\sqrt{2\left(\cos\Theta - \cos\Theta_0\right)}} = \frac{T}{4}$$

ist ein elliptisches Integral.

Dabei gelte für Dauer T eines Umlaufs: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Benutze die Näherung:

$$\cos\Theta \approx 1 - \frac{\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^4}{24}$$

wobei $1-\frac{\Theta^2}{2}$ der harmonische Term und $\frac{\Theta^4}{24}$ die führende Anharmonizität sei.

$$\frac{T}{4}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\Theta_0}\frac{d\Theta}{\sqrt{\left(\Theta_0^2-\Theta^2\right)+\frac{\Theta^4-\Theta_0^4}{12}}}$$

Führende Ordnung:

$$\int\limits_0^{\Theta_0}\frac{d\Theta}{\sqrt{\Theta_0^2-\Theta^2}}=\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{2}$$

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}2\pi,\,\omega_0=\sqrt{\tfrac{g}{l}}$$

Damit ergibt sich der Korrekturterm zu:

$$\omega_0\frac{T}{4}=\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)+\Theta_0^2\frac{u^4-1}{12}}}$$

Dieser hängt in dieser Näherung nun erwartungsgemäß von Θ_0 ab.

Mache eine Taylorentwicklung:

$$\omega_0\frac{T}{4}=\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left[1-\Theta_0^2\frac{u^2+1}{12}\right]}}$$

Benutze $\frac{1}{\sqrt{1-\delta}}\approx 1+\frac{1}{2}\delta$:

$$\begin{aligned}\omega_0\frac{T}{4}&=\int\limits_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\left[1+\frac{\Theta_0^2}{2}\frac{1+u^2}{12}\right]\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{\Theta_0^2}{24}\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\Theta_0^2}{16}\right)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\omega=\omega_0\left(1-\frac{\Theta_0^2}{16}\right)}$$

2. Methode:

$$\mathscr{L}=ml^2\left[\frac{1}{2}\dot{\Theta}^2-\frac{1}{2}\omega_0^2\left(\Theta^2-\frac{\Theta^4}{12}\right)\right]$$

Schreibe dies um in vorige Notation.

$$\Rightarrow\beta=-\frac{1}{6}\omega_0^2;\quad a=\Theta_0$$

$$\omega^{(2)}=\frac{3}{8}\frac{\Theta_0^2}{\omega_0}\left(-\frac{1}{6}\omega_0^2\right)=-\frac{1}{16}\omega_0\Theta_0^2$$

$$\frac{1}{\omega_0T}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+\frac{\Theta_0^2}{16}}\right)$$

5 Hamilton-Formalismus, kanonische Gleichungen, Poisson-Klammer

5.1 Struktur der Mechanik

Hamilton-Funktion H als Symmetrie zwischen Koordinaten und Impuls; nützlich in der Quantenmechanik, als Hamiltonoperator.
Poisson-Klammer, nützlich in der Quantenmechanik, als Vertauschungsrelation.
Phasenraum (Satz von Liouville).

5.2 Legendre-Transformation: von $\mathscr{L}$ zu H

5.2.1 Motivation

Die Lagrange-Funktion hängt ab von q, $\dot{q}$, t.
Die Euler-Lagrange-Gleichungen stellen dabei DGLen 2. Grades dar.
Ziel: Übergang zu q und $p \equiv \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$ (und t) als unabhängige Variablen.
$\Rightarrow$ ein System von 2 DGLen erster Ordnung (bzw. 2n DGLen für n Freiheitsgrade).

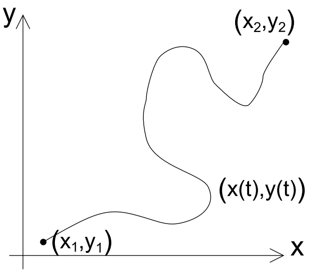
5.2.2 Mathematischer Einschub: Legendre-Transformation

Betrachte $f(x, y) \Rightarrow df = udx + vdy$ mit

$$u := \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v := \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f$$

df ist totales Differential, d.h. für einen beliebigen Weg $x(t)$, $y(t)$ in der (x, y)-Ebene von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) gilt

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \left(u\frac{dx}{dt} + v\frac{dy}{dt} \right) dt = \int_{(...)}^{(...)} df = f\left((x_2, y_2)\right) - f\left((x_1, y_1)\right)$$



ist Potentialdifferenz von f, welches die Rolle eines Potentials spielt.

Wenn lediglich u, v gegeben sind, dann muss in einem einfach zusammenhängenden Gebiet gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

f, u, v sind Funktionen von x, y.
Ziel: Übergang auf neue Funktion g, sodass $u = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ und y unabhängige Variablen sind.
Wähle:

$$\boxed{g := f - ux} \qquad (*)$$

Dabei bezeichnet man g als die Legendre-Transformierte zu f.

5.2.3 Fortführung

Nun sei

$$dg = df - udx - xdu = udx + vdy - udx - xdu$$
$$\Rightarrow \boxed{dg = vdy - xdu} \qquad (**)$$

v und x sind jetzt als Funktion von u und y zu integrieren.

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = u$$

Inversion liefert x als Funktion von y, u.

$$v = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(y, u), y\right)$$

Wegen Gleichung $(**)$ gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{u=const} = v, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{y=const} = -x$$

Verweis auf die Thermodynamik:

Energie versus freie Energie, thermodynamische Potentiale.

5.3 Hamilton-Funktion

Betrachte:

$$\boxed{H := \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathscr{L}}$$

Betrachten wir der Einfachheit halber den Fall $n = 1$, so haben wir:

$$H := \dot{q}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} - \mathscr{L}$$

Dies ist bis auf das Vorzeichen identisch zu Gleichung $(*)$.

Annahme:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) = p$$

sei umkehrbar.

$$\Rightarrow \dot{q} \text{ ist dann eine Funktion von } q, p, t$$

$$H(q,p,t) = \dot{q}(q,p,t) \cdot p - \mathscr{L}\left(q, \dot{q}(q,p,t), t\right)$$

$$\Rightarrow dH = \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}dt$$

Daraus folgen die kanonischen Gleichungen:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p}}$$

sowie

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}}$$

Betrachte die Energieerhaltung:

Wegen

$$dH = \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

gilt

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}\frac{dp}{dt} - \dot{p}\frac{dq}{dt} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

Also:

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial}{\partial t}H$$

5.4 Poisson-Klammer

Sei $f(p,q,t)$ eine beliebige Funktion der Koordinaten, Impulse und der Zeit.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Mit den kanonischen Gleichungen folgt:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Man definiert als Notation:

$$\{H, f\} := \{\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\}$$

und damit

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}}$$

Mit n Freiheitsgraden wird daraus:

$$\{H, f\} = \sum_k \{\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\}$$

Falls

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{und } \{H, f\} = 0$$

gelten, so folgt daraus:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = 0}$$

Beispiel:

$$f = xp_y - yp_x$$

und

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Für beliebige f, g definieren wir:

$$\boxed{\{f, g\} := \sum_k \{\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\}}$$

Was erhält man nun mit $L_x = yp_z - zp_y$ für $\{L_x, L_y\}$?

Es gelten

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}$$
$$\{q_i, q_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{p_i, q_k\} = \delta_{ik}$$

In der Quantenmechanik hat man:

$$\{f, g\} \Rightarrow [F, G]$$

5.5 Phasenraum

Fragestellung: Wodurch ist der Zustand eines mechanischen Systems vollständig beschrieben?

Die **Lage** eines mechanischen Systems mit N Freiheitsgraden wird durch die N Koordinaten q_i bestimmt. Allein durch die Angabe der Lage der Teilchen ist die zeitliche Entwicklung des Systems nicht determiniert, denn es ergeben sich Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche auch zwei Anfangsbedingungen fordern. Zur vollständigen Beschreibung des Zustands des Systems benötigt man die Kenntnis der Impulse zum Zeitpunkt t_0.

Alle möglichen Werte der Koordinaten q_i und Impulse p_i bilden den **Phasenraum**. Zu jeder Zeit wird der Zustand des Systems durch einen **Punkt im Phasenraum** beschrieben.

5.5.1 *Beispiel 1: Der harmonische Oszillator*

$$\mathscr{L}(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

Der kanonische Impuls ist

$$p = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion:

$$H(q, p) = p\dot{q} - \mathscr{L} = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

Definiere neue Variablen:

$$z_1 = \sqrt{m}\omega q \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}p$$

Damit wird die Hamiltonfunktion zu:

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2}$$

Die kanonischen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{d}{dt}q \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{d}{dt}p$$

werden ausgedrückt durch die neu gewählten Variablen:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{d}{dt}q = \frac{1}{\sqrt{m}\omega}\frac{d}{dt}z_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \dots$$

Daraus ergibt sich:

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}z_1 \quad \text{und} \quad \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}z_2$$

Eliminiere noch das ω mittels einer Transformation $\tau = \omega t$ der Zeit:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{d}{d\tau}z_1} \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{d}{d\tau}z_2}$$

Mit $\frac{\partial H}{\partial z_2} = z_2$ und $\frac{\partial H}{\partial z_1} = z_1$ folgt daraus schließlich:

$$\boxed{z_2 = \frac{d}{d\tau} z_1} \quad \text{und} \quad \boxed{z_1 = -\frac{d}{d\tau} z_2}$$

Mit der Lösung:

$$z_1(\tau) = a \cos(\tau - \varphi)$$
$$z_2(\tau) = -a \sin(\tau - \varphi)$$

Die Anfangswerte zur Zeit $t = 0$ seien:

$$z_1^0 = \sqrt{m}\omega q(0)$$
$$z_2^0 = \frac{1}{\sqrt{m}} p(0)$$

Die Energie ist erhalten: $E = H$

also ist

$$E = H = \frac{1}{2}\left(z_1^2 + z_2^2\right) = const = \frac{a^2}{2}$$

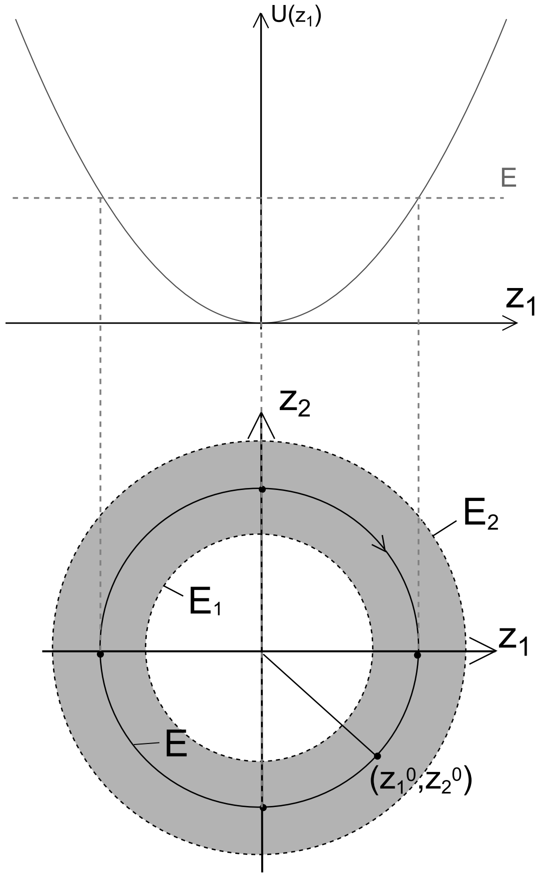
Mit den Anfangsbedingungen folgt daraus:

$$a = \sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}$$

Woraus man schließen kann:

$$\cos\varphi = \frac{z_1^0}{a} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{z_2^0}{a}$$

Betrachte nun die Bewegung im Phasenraum:



Bewegung im Phasenraum liegt auf einem Kreis. Verschiedene Energien entsprechen verschiedenen Radien des Kreises. Die Kreisfrequenz ist für alle Energien dieselbe.
Die Zustände mit $E_1 \leq E \leq E_2$ belegen ein bestimmtes Volumen im Phasenraum; dieses entspricht der Fläche des entsprechenden Kreisringes.

Drückt man die Variablen z_1, z_2 wieder durch q, p aus, so erhält man im Phasenraum eine Ellipse mit den Halbachsen

$$p_{max} = \sqrt{2EM} \quad \text{und} \quad q_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Die Fläche der Ellipse ist gegeben durch

$$F = \pi \cdot p_{max} \cdot q_{max} = 2\pi \frac{E}{\omega}$$

Die Zustände mit den Energien $E_1 \leq E \leq E_2$ besitzen das Volumen

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega}\left(E_2 - E_1\right)}$$

Zur Dimension:

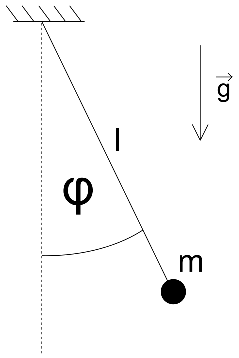
Wirkung $=$ Energie $\cdot$ Zeit = (verallg.) Ort $\cdot$ (verallg.) Impuls

In der Quantenmechanik:

Nur **ein** Zustand in einem Volumenelement der Größe $2\pi\hbar$ existiert. Beim harmonischen Oszillator findet sich die Energie quantisiert:

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

5.5.2 Beispiel 2: Das ebene Pendel



$$\mathscr{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - U(\varphi) = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + (\cos\varphi - 1)\, mgl$$

Kanonisch konjugierter Impuls:

$$p = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$$
$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2}$$

Damit ergibt sich die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - (\cos\varphi - 1)\, mgl$$

Führe wie zuvor neue Variablen ein.

$$z_1 = \varphi, \quad z_2 = \frac{p}{ml^2\omega}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \tau = \omega t$$

Mit $\frac{dz_1}{d\tau} = z_2(\tau)$ und $\frac{dz_2}{d\tau} = -\sin(z_1(\tau))$ folgt:

$$H = \frac{mgl}{2} z_2^2 - (\cos z_1 - 1)\, mgl$$

Die Energie ist wieder erhalten.

$$\epsilon = \frac{H}{mgl} = \frac{1}{2}z_2^2 - (\cos z_1 - 1) = const$$

Bahnen im Phasenraum für festes ϵ:

$$\boxed{z_2 = \pm\sqrt{2(\epsilon + \cos z_1 - 1)}} \quad (*)$$

Diskutiere $(*)$ für verschiedene Werte für ϵ.

a) $\epsilon > 2$

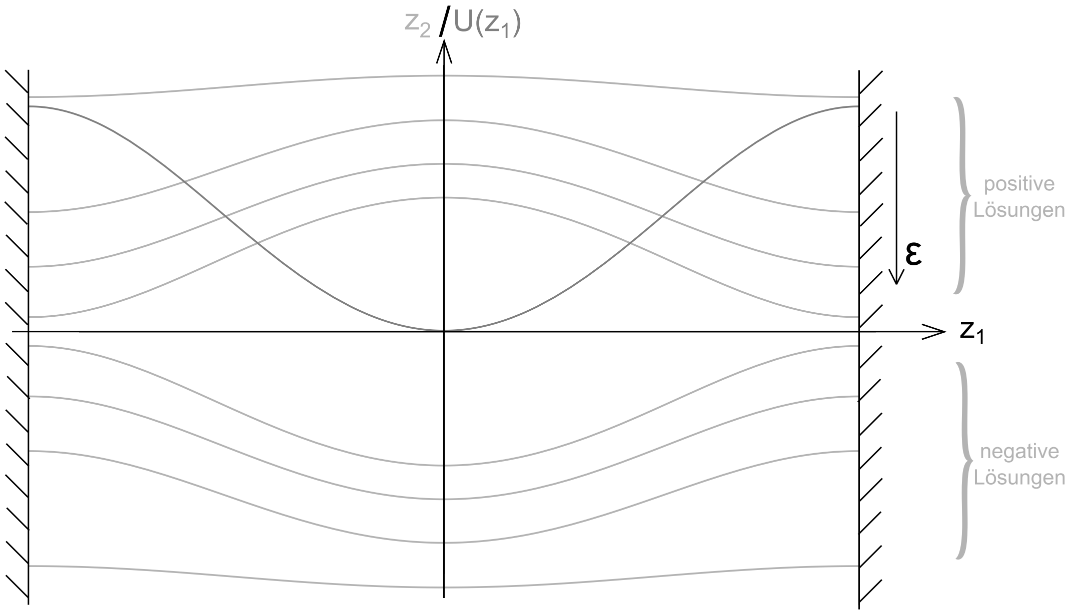
$$\epsilon + \cos z_1 - 1 > 0 \qquad \forall_{z_1}$$

Eine Nullstelle wird nie erreicht.

z_2 ist **immer** entweder > 0 oder < 0. Die Lösung ist periodisch mit Periode 2π und ist symmetrisch um 0. Es ergeben sich

Maxima für $z_1 = 0, 2\pi, ...$

Minima für $z_1 = \pi, 3\pi, ...$



b) kleine ϵ

$$\epsilon + \cos z_1 - 1 > 0$$

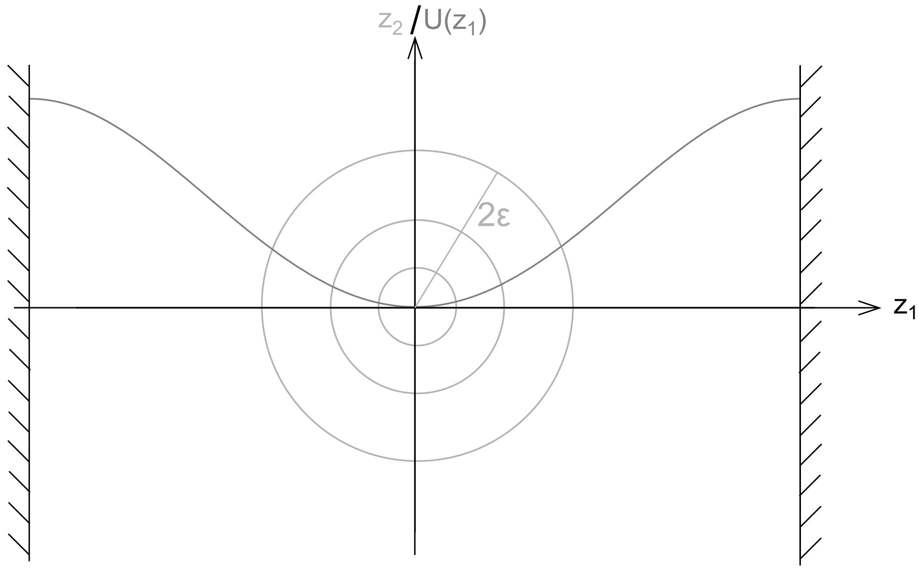
Also ist z_1 klein.

$$\epsilon + \left(1 - \frac{z_1^2}{2}\right) - 1 > 0$$
$$\Rightarrow z_1^2 \lesssim 2\epsilon$$

Also:

$$z_2 = \pm\sqrt{2\epsilon - z_1^2}$$
$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = 2\epsilon$$

Dies lässt auf Kreise im Phasenraum mit Radius 2ϵ schließen.



c) Grenzfall $\epsilon = 2$, der Kriechfall

$$z_2 = \pm\sqrt{2\left(\cos z_1 + 1\right)}$$

z_2 nimmt für $z_1 = \pm\pi$ den Wert 0 an.

5.6 Satz von Liouville

Gegeben sei ein Ensemble von Zuständen in einem Gebiet des Phasenraumes mit vorgegebenem Volumen V.

Bei der zeitlichen Entwicklung des Systems bleibt dieses Volumen stets konstant (konservative Kräfte).

6 Starrer Körper, Kreisel

6.1 Kinematik

Bisher wurden lediglich „Massenpunkte” betrachtet. Ein ausgedehnter, starrer Körper K wird interpretiert als viele Massenpunkte mit Zwangsbedingungen.

$$\sum_i \ldots \rightarrow \int dV \rho(\vec{x})$$

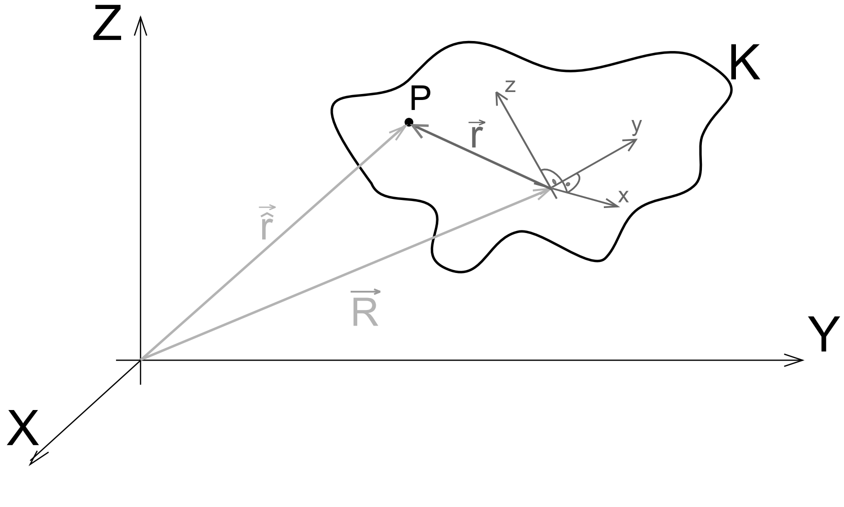
wobei $\rho \mathrel{\widehat{=}}$ Dichte

Zur Beschreibung der Lage von K werden zwei Koordinatensystem genutzt:

$$L \mathrel{\widehat{=}} \text{Labor: „ruhendes” System } (X, Y, Z)$$
$$K \mathrel{\widehat{=}} \text{„körperfestes” System } (x, y, z)$$

Der Nullpunkt von K wird häufig im Schwerpunkt gewählt.

Das K-System ist bezüglich L festgelegt durch den Ursprung von K und die Orientierung der Achsen von K.



Die Lage des Körpers ist festgelegt durch 6 Koordinaten. Das sieht man wie folgt ein:

Möglichkeit 1

Die Lage wird bestimmt durch die Lage von 3 Punkten des Körpers: P_1, P_2, P_3.

3 Punkte $\mathrel{\widehat{=}}$ 9 Koordinaten

Es liegen 3 Zwangsbedingungen vor (die Abstände von P_1, P_2, P_3), also:

$$\rightarrow 9 - 3 = 6 \text{ Koordinaten}$$

Möglichkeit 2

Die Lage des Schwerpunkts liefert 3 Koordinaten.

Zur exakten Beschreibung des Körpers sind nun noch 3 Winkel erforderlich.

$$\rightarrow 3 + 3 = 6 \text{ Koordinaten}$$

Die Lage eines beliebigen Punktes P des Körpers K bezüglich L sei gegeben durch:

$$\vec{\hat{r}} = (X, Y, Z)$$

und bezüglich K:

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

Bewegung bedeutet nun eine infinitesimale Verschiebung von P, durch Verschiebung von K bezüglich L und durch Rotation.

$$d\vec{\hat{r}} = d\vec{R} + d\widehat{\varphi} \times \vec{r} \qquad (*)$$

$d\vec{\hat{r}}$: Änderung im L-System

$d\vec{R}$: Verschiebung von K

$d\widehat{\varphi} \times \vec{r}$: Drehung um $|d\widehat{\varphi}|$ um die Achse $\dfrac{d\widehat{\varphi}}{|d\widehat{\varphi}|}$

Geschwindigkeit von P, betrachtet in L, wobei

$$\frac{d\vec{\hat{r}}}{dt} = \vec{v}, \quad \frac{d\widehat{\varphi}}{dt} = \vec{\Omega}, \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$$

gelte.

Dividiere $(*)$ durch dt:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$\vec{V}$: Translationsbewegung

$\vec{\Omega}$: Winkelgeschwindigkeit

$\vec{r}$: körperfeste Koordinate von P

Wähle ein zweites körperfestes System K', verschoben gegen K:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

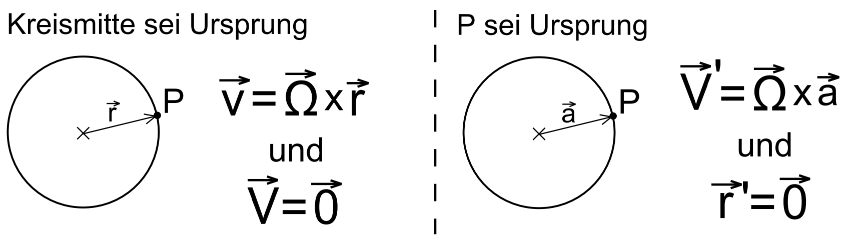
Geschwindigkeit von K' gegen L sei $\vec{V}'$, Winkelgeschwindigkeit sei $\vec{\Omega}'$.

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

Andererseits per Definition:

$$\vec{v}' = \vec{V}' + \vec{\Omega}' \times \vec{r}' \qquad \text{für alle } \vec{r}$$
$$\Rightarrow \vec{V}' = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} \qquad \text{nur für } \vec{\Omega}' = \vec{\Omega}$$

Rotationsgeschwindigkeit eines Körpers ist unabhängig von der Wahl des Systems O, aber $\vec{V}$ jedoch hängt von O ab.



Falls $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$ zu einem bestimmten Zeitpunkt gilt, also $\vec{\Omega} \cdot \vec{V} = 0$, so folgt daraus $\vec{V}' \perp \vec{\Omega}$ für ein beliebiges körperfestes System, da

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{V}' = \vec{\Omega} \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} \right) = 0 + 0 = 0$$

Ferner gilt dann:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{v} = \vec{\Omega} \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right) = 0 \qquad \text{für alle } P$$
$$\Rightarrow \vec{\Omega} \perp \vec{v}$$

Anschauung:

Translation und Rotation in einer Ebene.

Falls $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$ gilt, dann kann man ein System O' finden, sodass $\vec{V}' = 0$ zu diesem Zeitpunkt gelte.

Konstruktion:

Sei

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Wähle

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a} \qquad \text{mit} \qquad \vec{a} = -\frac{\vec{V} \times \vec{\Omega}}{\left\|\vec{\Omega}\right\|^2}$$

Daraus folgt:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' - \frac{\vec{\Omega}\left(\vec{V} \times \vec{\Omega}\right)}{\left\|\vec{\Omega}\right\|^2} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}' - \frac{\vec{V} \cdot \vec{\Omega}^2 - \vec{\Omega}\left(\vec{\Omega} \cdot \vec{V}\right)}{\left\|\vec{\Omega}\right\|^2}$$

Es ist

$$\frac{\vec{V} \cdot \vec{\Omega}^2}{\left\|\vec{\Omega}\right\|^2} = \vec{V}$$

und nach Voraussetzung

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{V} = 0$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

Dies entspricht einer Drehung und Translation im rechten Winkel, also einer Drehung um eine verschobene Achse.

6.2 Trägheitstensor

Für die kinetische Energie gilt:

$$T = \sum_i m_i \frac{\vec{v_i}^2}{2}$$

Verwende:

$$\vec{v_i}^2 = \left(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r_i}\right)^2 = \vec{V}^2 + 2\vec{V}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r_i}\right) + \left(\vec{\Omega} \times \vec{r_i}\right)^2$$
$$= \vec{V}^2 + 2\vec{V}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r_i}\right) + \left(\vec{\Omega}^2 \vec{r_i}^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r_i}\right)^2\right) = \vec{V}^2 + 2\vec{r_i}\left(\vec{V} \times \vec{\Omega}\right) + \left(\vec{\Omega}^2 \vec{r_i}^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r_i}\right)^2\right)$$

Damit wird die kinetische Energie zu:

$$T = \frac{\vec{V}^2}{2} \sum_i m_i + \left(\vec{V} \times \vec{\Omega}\right) \cdot \sum_i m_i \vec{r_i} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{\Omega}^2 \vec{r_i}^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r_i}\right)^2\right)$$

Dabei ist

$$\sum_i m_i \vec{r_i} = 0$$

falls O der Schwerpunkt ist.

Benutze als Notation:

$$\vec{r_i} = \left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$$

Definiere den Trägheitstensor:

$$I_{jk} = \sum_i m_i \left(\vec{r_i}^2 \delta_{jk} - x_j^i x_k^i\right) \quad \text{für } j,k = 1,2,3$$

Dann kann der zweite Term von T geschrieben werden als

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} \Omega_j I_{jk} \Omega_k = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T I \vec{\Omega}$$

Dabei ist I ein Tensor.

Definiere zur Abkürzung:

$$\mu := \sum_i m_i \quad \xrightarrow{Kontinuum} \quad \mu = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r})$$

Damit ergibt sich der Ausdruck zu:

$$T = \frac{\vec{V}^2}{2}\mu + \frac{1}{2}\vec{\Omega}^T I \vec{\Omega}$$

In der Kontinuumsmechanik wird der Trägheitstensor schließlich zu

$$I_{jk} = \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})\left(\vec{r}^2\delta_{jk} - x_j x_k\right)$$

Das körperfeste System liege im Schwerpunkt.

I_{jk} ist reell und symmetrisch und damit diagonalisierbar.

Dies entspricht einer Drehung des körperfesten Systems.

Die neuen Achsen sind die Trägheitsachsen, Eigenwerte sind die Trägheitsmomente I_1, I_2, I_3.

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right)$$

Im Allgemeinen ist $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, dies entspricht einem unsymmetrischen Kreisel.

Falls $I_1 = I_2$ gilt, so erhält man einen symmetrischen Kreisel.

Falls $I_1 = I_2 = I_3$ gilt, so erhält man einen Kugelkreisel. Dieser entspricht von der Form her nicht zwingend einer Kugel; er besitzt nur keine ausgezeichnete Drehachse.

Falls alle Massenpunkte auf einer Geraden liegen, also wenn gilt

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 \neq 0$$

dann ist:

$$I_1 = I_2 = \sum_{i=1} m_i\left(x_3^i\right)^2, \quad I_3 = 0$$

Diese Form entspricht einem Rotator, also beispielsweise einer Hantel oder einem zweiatomigen Molekül.

Es gelten

$$I_1 + I_2 \geq I_3$$

und durch zyklische Vertauschung daraus resultierende Gleichungen.

Falls alle m_i in der (x_1, x_2)-Ebene liegen, also falls $x_3^i = 0$, so ist

$$I_1 + I_2 = I_3$$

6.3 Satz von Steiner

Es soll $I_{jk}^{'}$ bezüglich O' berechnet werden. Dabei betrachten wir ein um den Vektor $\vec{a}$ vom Schwerpunkt aus verschobenes Koordinatensystem. Die Verschiebung sei

$$\vec{r} = \vec{r}^{\,\prime} + \vec{a}$$

Dann gilt für den Trägheitstensor im neuen System:

$$I_{jk}^{'} = I_{jk} + \mu \left(\vec{a}^2 \delta_{jk} - a_j a_k \right)$$

6.4 Drehimpuls

Der Drehimpuls ist

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Der Schwerpunkt des starren Körpers sei O, also ist

$$\sum_{i=1} m_i \vec{r_i} = 0$$

wobei $\vec{r_i}$ bezüglich des Systems K gewählt sei.

$\vec{L} \equiv$ Eigendrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{i=1} m_i \left(\vec{r_i} \times \vec{v_i} \right) = \sum_{i=1} m_i \vec{r_i} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r_i} \right) + \sum_{i=1} m_i \left(\vec{r_i} \times \vec{V} \right) = \sum_{i=1} m_i \left(\vec{r_i}^2 \vec{\Omega} - \vec{r_i} \left(\vec{r_i} \vec{\Omega} \right) \right)$$

Die letzte Gleichheit folgt, da O der Schwerpunkt des starren Körpers ist.

$$L_j = \sum_{k=1} I_{jk} \Omega_k \quad \text{oder} \quad \vec{L} = I \vec{\Omega}$$

Wenn zu einem Zeitpunkt das Koordinatensystem in Richtung der Hauptachsen zeigt, dann gilt

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3$$

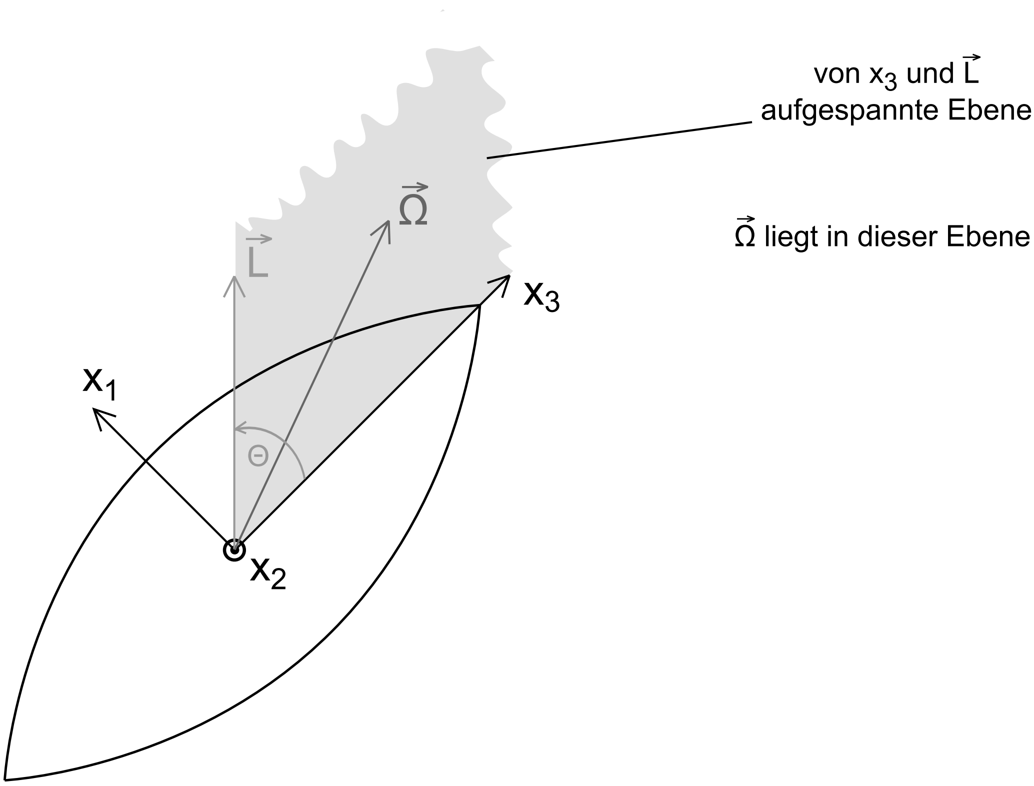
Die Richtungen von $\vec{L}$ und $\vec{\Omega}$ sind im Allgemeinen verschieden und $\vec{\Omega}$ ist im Allgemeinen nicht konstant.

Bei einer kräftefreien Bewegung ist $\vec{L}$ konstant.

Betrachte beispielsweise den Kugelkreisel:

$$\vec{L} = I \vec{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} \propto \vec{\Omega} \quad const$$

6.5 Symmetrischer kräftefreier Kreisel



Wähle x_1 in $\left(\vec{L}, x_3\right)$-Ebene. Es sei x_2 orthogonal dazu.

Zu diesem Zeitpunkt gelte $L_2 = 0 \quad \Rightarrow \Omega_2 = 0$

Es gilt:

$$L_1 = I_1\Omega_1, \quad L_2 = I_2\Omega_2, \quad L_3 = I_3\Omega_3$$

$\vec{L}$, $\vec{\Omega}$, $\vec{e_3}$ liegen immer in einer Ebene, die im Laufe der Zeit aber variiert.

Allgemein gilt:

$$\vec{v_i} = \vec{\Omega} \times \vec{r_i}$$

für jeden Punkt des Kreisels.

Punkte auf der Symmetrie-Achse liegen in der Ebene, die von $\vec{L}$ und $\vec{e_3}$ aufgespannt wird.

$$\Rightarrow \vec{v} \perp \text{Ebene}$$

Geschindigkeit der Punkte auf der Symmetrie-Achse hat dieselbe Richtung $\vec{\Omega} \times \vec{e_3}$ und ist proportional zum Abstand von O.

$\Rightarrow$ Achse rotiert um $\vec{L}$ und $\sphericalangle\left(\vec{L}, \vec{e_3}\right)$ bleibt erhalten; es handelt sich um reguläre Präzession.

Zusätzlich gibt es eine Rotation um die x_3-Achse.

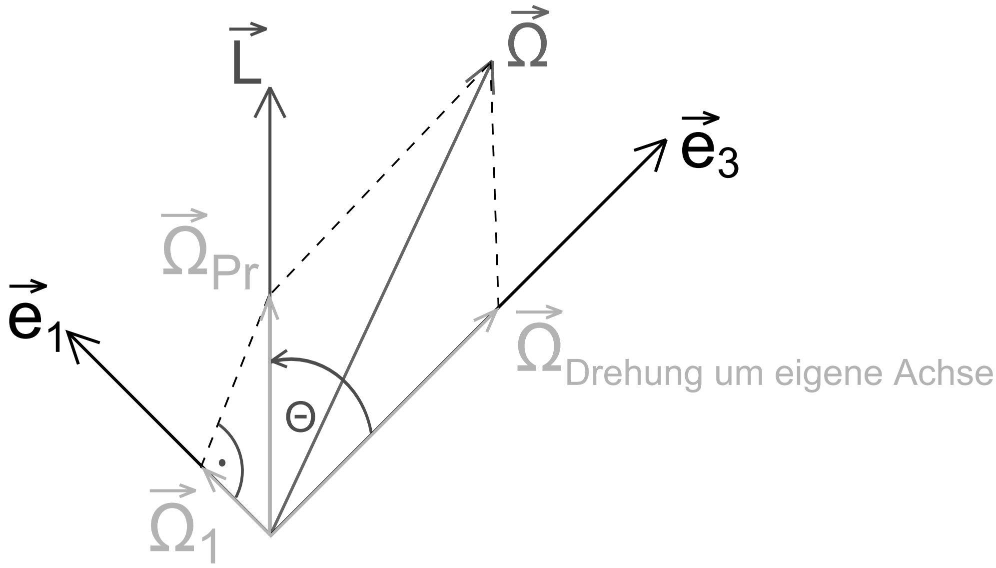
Rotationsgeschwindigkeit um $\vec{e_3}$:

$$I_3\Omega_3 = L_3 = |\vec{L}| \cos\Theta$$

$$\boxed{\Omega_3 = \frac{|\vec{L}|}{I_3} \cos\Theta}$$

Präzessionsgeschwindigkeit:

Zerlege $\vec{\Omega}$ in einen Anteil längs $\vec{e_3}$ und in einen Anteil längs $\vec{L}$.



$|\vec{\Omega_{Pr}}| \sin\Theta = |\vec{\Omega_1}| = \dfrac{L_1}{I_1}$

Andererseits gilt $L_1 = |\vec{L}| \sin\Theta$

$$\boxed{\Omega_{Pr} = \frac{L}{I_1}}$$

6.6 Bewegungsgleichungen des starren Körpers

6.6.1 Vorbereitung

Das Drehmoment ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} \qquad (*)$$

mit

$$\vec{M} = \sum_{i=1} \left(\vec{r_i} \times \vec{f_i}\right)$$

wobei $\vec{f_i}$ die am Ort $\vec{r_i}$ wirkende Kraft ist.

$\vec{L}$ und $\vec{M}$ sind bezüglich des Schwerpunkts S definiert, in dessen Ruhesystem wir uns befinden.

Ferner gilt

$$\sum_{i=1} \vec{f}_i = \vec{F} = \vec{0}$$

Bei einer Verschiebung um $\vec{a}$ gilt:

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{a} \times \vec{F}$$

Falls $\vec{F} = \vec{0}$, so ergibt sich:

$$\vec{M} = \vec{M}'$$

6.6.2 Eulersche Gleichungen

Sei $\frac{d}{dt}\vec{A}$ die zeitliche Änderung eines Vektors im Laborsystem. Wenn $\vec{A}$ in einem mit $\vec{\Omega}$ rotierendem System konstant bleibt, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Wenn sich $\vec{A}$ außerdem im rotierenden System mit $\frac{d'}{dt}\vec{A}$ ändert, dann gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{d'}{dt}\vec{A} + \vec{\Omega} \times \vec{A}}$$

In Gleichung $(*)$ eingesetzt:

$$\frac{d'}{dt}\vec{L} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

wobei $\frac{d'}{dt}\vec{L}$ die Änderung im körperfesten, rotierenden System K beschreibt.
Drücke alle Komponenten im K-System aus, d.h.

$$\left(\frac{d'}{dt}\vec{L}\right)_1 = \frac{d}{dt}L_1$$
$$\left(\frac{d'}{dt}\vec{L}\right)_2 = \frac{d}{dt}L_2$$
$$\left(\frac{d'}{dt}\vec{L}\right)_3 = \frac{d}{dt}L_3$$

und

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \times \vec{L} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 \\ (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 \\ (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die Eulerschen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\Omega_2\Omega_3 &= M_1 \\
I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\Omega_3\Omega_1 &= M_2 \\
I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\Omega_1\Omega_2 &= M_3
\end{aligned}
$$

Für $\vec{M} = \vec{0}$ haben wir den symmetrischen Kreisel.

Die Eulergleichungen ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Omega}_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1}\Omega_2\Omega_3 &= 0 \\
\dot{\Omega}_2 + \frac{I_1 - I_3}{I_2}\Omega_3\Omega_1 &= 0 \\
\dot{\Omega}_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_3}\Omega_1\Omega_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Wir finden wieder die Präzession, aber vom K-System her betrachtet.