

# Theoretische Physik B

Gehört bei Prof. Dr. Kühn

KIT - Karlsruher Institut für Technologie

Sommersemester 2011

Mitschriebe ausgearbeitet von

Philipp Basler, Nils Braun, Larissa Bauer

16. Juli 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Variationsprinzipien</b>	<b>5</b>
1.1	Einfache Beispiele . . . . .	5
1.2	Euler Gleichung . . . . .	8
1.3	Lösungsstrategien unter speziellen Annahmen für $F(y,y',x)$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip</b>	<b>13</b>
2.1	Koordinatenwahl . . . . .	13
2.2	Euler-Lagrange Gleichung . . . . .	14
2.3	Erhaltungssätze . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Symmetrieprinzipien</b>	<b>19</b>
3.1	Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	19
3.2	Symmetrien $\iff$ Erhaltungssätze . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Schwingungen eines Systems bei kleinen Auslenkungen</b>	<b>25</b>
4.1	Eigenfrequenzen und Eigenmoden . . . . .	25
4.2	Normalkoordinaten . . . . .	28
4.3	Anharmonische Schwingungen . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Hamilton-Formalismus kanonischer Gleichungen/ Poisson-Klammern</b>	<b>39</b>
5.1	Struktur der Mechanik . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Starrer Körper ( Kreisel )</b>	<b>49</b>
6.1	Kinematik . . . . .	49
6.2	Trägheitstensor . . . . .	53
6.3	Drehimpuls . . . . .	55
6.4	Symmetrische Kräftefreie Kreisel . . . . .	57

6.5	Bewegungsgleichung des starren Körpers . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>67</b>
7.1	Literaturempfehlungen . . . . .	67

# Kapitel 1

## Variationsprinzipien

### 1.1 Einfache Beispiele

Bestimme Bewegung oder Gestalt eines Systems so, dass ein Integral minimiert wird.

Bsp: Finde den schnellsten Weg von einem Punkt auf dem Land zu einem Punkt auf dem Wasser (Bewegungsgeschwindigkeit im Wasser ist niedriger)  $\rightarrow$  Weg hat einen Knick an der Küste

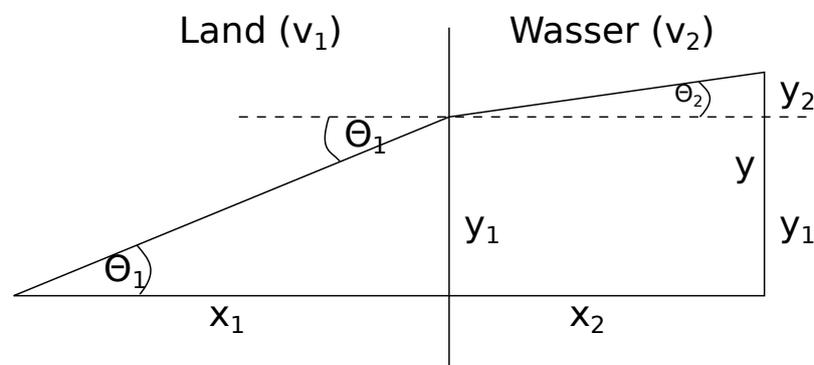


Abbildung 1.1: Weg über Land und durch Wasser

Laufzeit  $T = \left( \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{v_2} \right)$ , wobei  $y_1 + y_2 = y$  fest, ebenso  $x_1, x_2$  fest.

$0 = \delta y - \delta y_1 + \delta y_2$  Suche den Weg, für den T minimal wird.

Extremum:

$$0 = \delta T = \left( \frac{d}{dy_1} \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{v_1} \cdot \delta y_1 + \frac{d}{dy_2} \frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{v_2} \right)$$

$$0 = \left( \frac{\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \frac{1}{v_1}}{\sin(\theta_1)} - \frac{\frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \cdot \frac{1}{v_2}}{\sin(\theta_2)} \right) \delta y_1$$

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2}$$

### 1.1.1 $v$ hänge kontinuierlich von $x$ ab

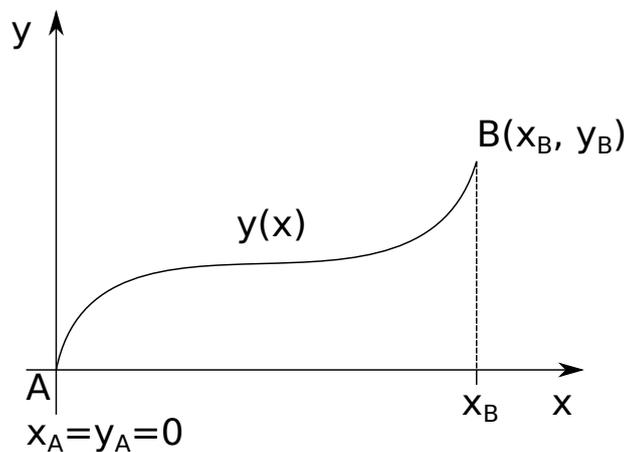


Abbildung 1.2: Bahnkurve von  $A$  nach  $B$

Bahnkurve  $y(x)$  mit  $y(0) = 0, y(x_B) = y_B$

Laufzeit von  $A$  nach  $B$  :

$$\text{Wegstück Länge } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Allgemeiner berechnet sich das Wegstück in den Koordinaten  $k_i$  als

$$d\vec{s} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial k_i} dk_i$$

Somit ergibt sich für den Betrag :

$$ds = |d\vec{s}| = \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial k_i} \right|^2 (dk_i)^2}$$

$$dT = \frac{ds}{v(x)}, T = \int_A^B dT = \int_{x_A}^{x_B} dx \left( \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x)} \right)$$

$T[y]$  : Funktional .

Suche Minimum : lokal vs global

$$T[y] = \int_{x_A}^{x_B} dx \left( \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x)} \right)$$

### 1.1.2 Verallgemeinert

Geschwindigkeit hängt ab von  $x, y$  und von der Richtung

$$(dT)^2 = f_{xx}(x, y)(dx)^2 + f_{xy}(x, y)dx dy + f_{yx}(x, y)dy dx + f_{yy}(x, y)(dy)^2 = \sum_{i,j} f_{ij}(x_i) dx_i dx_j$$

( $f_{ij}$  ist Metrik)

Bahnkurve  $x_i(s)$  mit Bahnparameter  $s$

$$T = \int \sqrt{\sum_{i,j} \left( f_{ij}(x_i) \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} \right)}$$

Bahn mit kürzester Laufzeit : Geodäte zu Metrik  $f_{ij}$

### 1.1.3 Brachystochrone

Auf welcher Bahn gleitet (ohne Reibung) ein Massenpunkt in kürzester Zeit von  $A$  nach  $B$

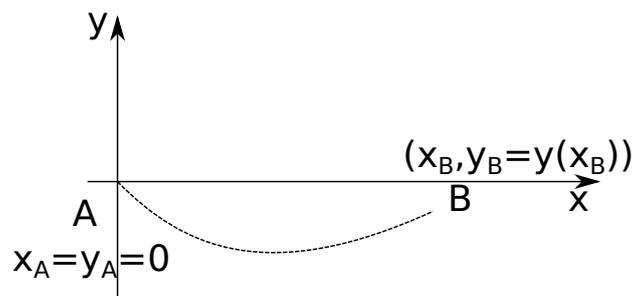


Abbildung 1.3: Gleitbahn ohne Reibung von  $A$  nach  $B$

Geschwindigkeit  $\frac{mv^2}{2} + U(y) = 0$

pot. Energie  $U(y) = mgy \implies v = \sqrt{-2gy}$

Weglänge  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2(1 + y'^2)$

$$dT = \frac{ds}{v}$$

$$T[y] = \int_0^{x_B} dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}}$$

## 1.2 Euler Gleichung

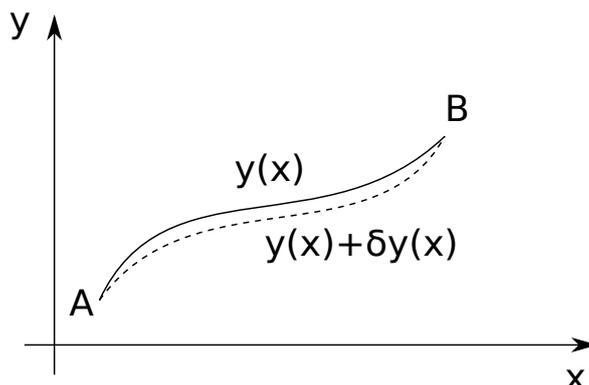


Abbildung 1.4: Bahnkurve von A nach B mit kleiner Änderung

Bahnkurve  $y(x)$  kleine Änderung  $\delta y(x)$

$$\text{Funktional } J(y) = \int_{x_1}^{x_2} dx f(y, y', x)$$

Forderungen suche  $y(x)$ , so dass  $J(y)$  extremal wird.  $\implies J$  ändert sich nicht, wenn man  $y(x)$  durch  $y(x) + \delta y(x)$  ersetzt.

Randpunkte bleiben fest :  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$

$$J(y + \delta y) = \int_{x_1}^{x_2} dx f((y(x) + \delta y(x)), (y'(x) + \delta y'(x)), x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( f + \frac{\partial}{\partial y} f \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} f \delta y' \right)$$

$$\delta J \equiv J(y + \delta y) - J(y) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial}{\partial y} f \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} f \cdot \frac{d}{dx} \delta y \right) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial}{\partial y} f \delta y - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} f \delta y \right) + \frac{\partial y'}{\partial f} \delta y|_{x_1}^{x_2}$$

$$0 = \delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial}{\partial y} f - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x)$$

### Definition

Euler-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

DGL 2ten Grades für  $y(x)$

analog :

Mehrere Funktionen von  $x : y_i(x)$

$$J(y_i) = \int_{x_1}^{x_2} dx f((y_1, \dots, y_i), (y'_1, \dots, y'_i), x)$$

$$\delta J(y_i) = 0$$

via partielle Integration

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right] \delta y_i = 0$$

Jedes  $\delta y_i$  kann unabhängig variiert werden. Daraus ergibt sich :

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} = 0$$

Was wieder eine DGL 2ten Grades ist.

## 1.3 Lösungsstrategien unter speziellen Annahmen für $F(y, y', x)$

(a) **Keine y-Abhängigkeit**  $\iff$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Euler - Gleichung :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Durch Integrieren ergibt sich :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const}$$

Auflösen der Gleichung nach  $y'$  liefert eine DGL erster Ordnung.

Beispiel: Weg von  $A(x_A, y_A)$  nach  $B(x_B, y_B)$  mit der Geschwindigkeit hängt nur ab von  $x$  und nicht von  $y$

$$T = \int_{x_A}^{x_B} dx \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x)}}_{F(y, y', x)}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{v(x)} \right) \implies \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{1}{v(x)} = c$$

$$y'(x) = \sqrt{\frac{v^2(x)c^2}{1-v^2c^2}} = \tan \theta$$

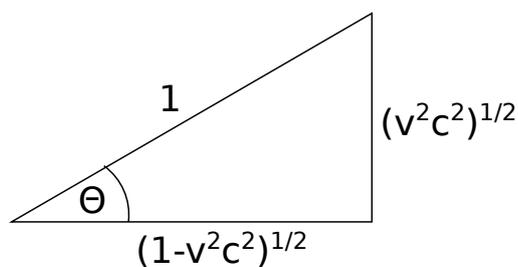
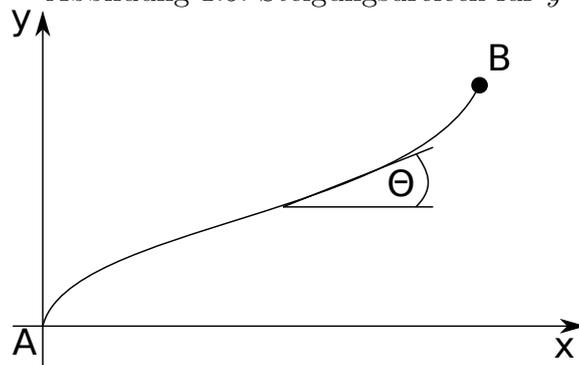
Abbildung 1.5: Steigungsdreieck für  $y$ 

Abbildung 1.6: Bahnkurve mit Steigungsdreieck

$$y(x) = \int_{x_A}^{x_B} dx y' = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{v^2(x)c^2}{1-v^2c^2}} + a$$

(b) **F** hängt nicht explizit ab von **x**

$$\iff \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Zeige, dass

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} y' - F \right] = - \frac{\partial F}{\partial x}$$

Beweis:

1.3. LÖSUNGSSTRATEGIEN UNTER SPEZIELLEN ANNAHMEN FÜR  $F(Y, Y', X)$  11

$$\left[ \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \right] - \left[ \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial x} \right]$$

Verwende  $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}$

$$\implies = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

also, falls  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y' - F = c$$

Auflösen nach  $y'$  ergibt eine DGL erste Ordnung.

Beispiel : Brachistochrone :

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} \implies 1 = c^2(-2g)y(1+y'^2)$$

$$dx = \left[ \frac{1}{c^2(-2g)y} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} dy$$

Ansatz :

$$y = -a(1 - \cos(\tau))$$

$$x = a(\tau - \sin(\tau))$$



# Kapitel 2

## Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamiltonsches Prinzip

### 2.1 Koordinatenwahl

Es seien  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  kartesische Koordinaten von  $N$  Massenpunkten. Es gelten ferner  $k$  Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) &= 0 \\ \vdots &= \vdots \\ f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel:

Zwei Teilchen  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  und  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = d$  sei fest (Erste Zwangsbedingung)

Dann hat das System  $3N - k$  Freiheitsgrade. Die  $3N - k$  Zahlen, die die Lage im System festlegen, heißen **generalisierte Koordinaten**

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \\ \vdots &= \vdots \\ \vec{r}_N &= \vec{r}_N(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \end{aligned}$$

Beispiele: Doppelpendel in einer Ebene

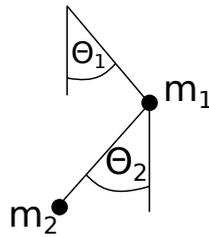


Abbildung 2.1: Doppelpendel

## 2.2 Euler-Lagrange Gleichung

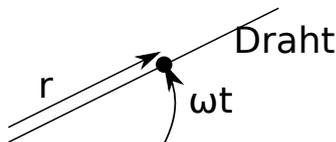
eine Koordinate  $q$

Wirkung

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

$\mathcal{L}$  fällt vom Himmel,  $\mathcal{L}$  als Funktion von  $q$ ,  $\dot{q}$  und  $t$

Forderung : Suche  $q(t)$ , so dass  $S[q]$  extremal (minimal) wird.  $q(t_1)$  und  $q(t_2)$  liegen fest



$$\delta S[q] = 0 \implies 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}$$

Da  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$  folgt

### Definition

*Verallgemeinerung der Kraft*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

Für  $n$  verallgemeinerte Koordinaten hat man  $\mathcal{L}((q_1, \dots, q_n), (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), t)$  und somit

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}$$

Variation der unabhängigen  $q_i \implies n$  DGL :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

## 2.3 Erhaltungssätze

### 2.3.1 Definition

*Zyklische Variablen* (Vgl I.3.a)

Falls  $\mathcal{L}$  unabhängig ist von einer verallgemeinerten Koordinate  $q_i$ , d.h.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ , dann nennt man  $q_i$  **zyklisch**.  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$

Also

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{zeitliche Konstante}$$

Suche nach zyklischer Variable durch geeignete Koordinatentransformation

### 2.3.2 Energieerhaltung (Vgl I.3.b)

Betrachte :  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L} \right] = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$

Bei mehreren Koordinaten:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right] = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Falls  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right] = \text{zeitliche Konstante} \equiv E$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L} = E$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Auflösung nach  $\dot{q}$  und Trennung der Variablen ergibt ein gewöhnliches Integral

Test: falls  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q) \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U(q)$

### 2.3.3 Beispiele

(a) kinetische Energie  $T$  eines freien Teilchens

(1) kartesische Koordinaten  $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

(2) Zylinderkoordinaten  $\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

(3) Kugelkoordinaten  $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$

(b) Zwangsbedingungen (ohne Potential)

Da  $U = 0 \implies \mathcal{L} \equiv T$

(1) Bewegungen auf Zylinder und  $\rho = const \implies \dot{\rho} = 0$

$$\mathcal{L} = T = \frac{m}{2}(\rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

Es gibt also zwei zyklische Koordinaten ( $z$  und  $\phi$ ).

$\frac{d}{dt} m \rho^2 \dot{\phi}^2 = 0$ . Daraus ergibt sich die Erhaltung des Drehimpulses

$\frac{d}{dt} m \dot{z} = 0 \implies$  Erhaltung der  $z$ -Komponente des Impulses

$$\text{Schraubenbewegung} \begin{cases} \dot{\phi} = const \\ \dot{z} = const \end{cases}$$

(2) Bewegung auf Kugeloberfläche  $\dot{r} = 0$

$$\mathcal{L} = T = \frac{m}{2} = \frac{m}{2} r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2)$$

$\phi$  ist zyklisch,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (m r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi})$

$m r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} = const \equiv L_z$

Bewegungsgleichung für  $\theta$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}^2) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0$$

Mit  $\dot{\phi} = \frac{L_z}{mr^2 \sin^2(\theta)}$  ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für  $\theta$  oder wegen  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  ergibt sich **hier**  $\frac{d}{dt}T = 0$

$$mr^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2) = E$$

$\dot{\phi}$  einsetzen und nach  $\dot{\theta}$  auflösen

(3) Kegelmantel

$$\theta = \theta_0 = \text{const}$$

(c) Bewegung mit Zwangsbedingung und Potential  $U$  speziell  $U = mgz$

Ansatz

$$\mathcal{L} = T - U$$

analog zu vorher, aber  $U(q)$  wird ausgedrückt durch die passenden Koordinaten

Beispiel: sphärisches Pendel ( Fadenpendel)

$$U = -mgl \cos \theta, \text{ hier } z = -r \cos \theta$$

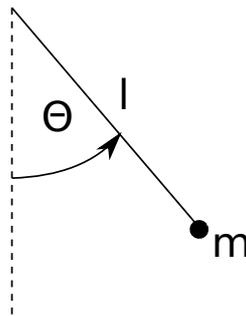


Abbildung 2.2: Fadenpendel

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta$$

18KAPITEL 2. EULER-LAGRANGE-GLEICHUNGEN UND HAMILTONSCHE PRINZIP

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} = \text{zeitliche Konstante } E$$

$$\frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2) - mgl \cos \theta = E$$

Da  $\phi$  zyklisch ist :  $L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{const}$

$$L_z = ml^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}$$

Einsetzen in die obige Gleichung und auflösen nach  $\dot{\theta}$  ergibt

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{ml^2} \left( E + mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{m \sin^2(\theta)} \right)$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{ml^2} \left( E + mgl \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{m \sin^2(\theta)} \right)}} = dt$$

(d) Bewegung mit zeitabhängigen Zwangsbedingungen

Teilchen frei beweglich auf rotierendem Stab  $T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$ ,  $\phi = \omega t$  als Zwangsbedingung,  $r$  ist verallgemeinerte Koordinate

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$$

# Kapitel 3

## Symmetrieprinzipien

Löse Probleme ohne zu rechnen

### 3.1 Mechanische Ähnlichkeit

#### 3.1.1 Allgemeine Betrachtungen

Multiplikation von  $\mathcal{L}$  mit konstanten Faktoren ändert die Bewegungsgleichung nicht. Betrachte Potential  $U$ , welches eine homogene Funktion der Koordinaten ist, d.h.:

$$U(\alpha \vec{r}_1, \dots, \alpha \vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

$$\text{z.B.: } U = \sum_{i,j,i \neq j} -\frac{m_i m_j G}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \implies k = -1$$

$$\text{oder } U = \sum_{i,j} \kappa_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \implies k = 2$$

Betrachte Transformation :  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i^* = \alpha \vec{r}_i, t \rightarrow t^* = \beta t$

deshalb

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{r}^*}{dt^*} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\vec{r}}{dt} \implies T \rightarrow T^* = \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}_{\text{kinetische Energie}} T$$

Potentielle Energie :  $U \rightarrow U^* = \alpha^k U$

Wähle  $\beta$  passend, so dass  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \alpha^k$ , also  $\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$

Unter der Transformation  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i^* = \alpha \vec{r}_i$  und  $t \rightarrow t^* = \alpha^{1-\frac{k}{2}} t$  erhält  $\mathcal{L}$  den Faktor  $\alpha^k$  und die Bewegungsgleichungen für  $\vec{r}^*, t^*$  ist identisch zu denen für  $\vec{r}, t$

$\implies$  Wenn  $\vec{r}_i(t)$  eine Lösung der Bewegungsgleichung ist, dann auch  $\alpha \vec{r}(\alpha^{1-\frac{k}{2}} t)$

Im Skalenverhältnis für  $l^* : l = \alpha$  sind ähnliche Bahnen erlaubt. Die Laufzeiten zwischen entsprechenden Bahnpunkten verhalten sich wie

$$\frac{t^*}{t} = \left(\frac{l^*}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

### 3.1.2 Virialsatz

Zusammenhang zwischen zeitlichem Mittel von kinetischer Energie und potentieller Energie.

Betrachte Teilchen ohne Zwangsbedingung in kartesischen Koordinaten.

Definiere:  $G = \sum_i \vec{p}_i \vec{r}_i$

Es gilt :

$$\frac{d}{dt}G = \sum_i \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_i \dot{\vec{p}}_i \vec{r}_i = 2 \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2}_T + \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i$$

Definiere den zeitlichen Mittelwert einer Größe  $F(t)$

$$\langle F(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt F(t)$$

Speziell:

$$\left\langle \frac{d}{dt}G(t) \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \frac{d}{dt}G(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} (G(\tau) - G(0))$$

Annahme: Es sei

- (a) entweder die Bewegung periodisch, dann wählen wir  $\tau$  entsprechend der Wiederkehrzeit.  $G(0) = G(\tau) = G(2\tau) = \dots$
- (b) oder es sind  $|\vec{p}_i|$  und  $|\vec{r}_i|$  beschränkt, dann ist auch  $G(t)$  beschränkt

In beiden Fällen gilt dann  $\left\langle \frac{d}{dt}G(t) \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (G(\tau) - G(0)) = 0 \implies \langle 2T + \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i \rangle = 0$

Annahme:  $\vec{F}_i$  sei aus dem Potential  $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$  gewonnen, also  $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i U$

$$2\langle T \rangle = \left\langle \sum_i (\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \vec{r}_i) \right\rangle$$

**Eulersches Theorem**Annahme :  $U$  sei homogene Funktion vom Grad  $k$ 

$$\sum_i (\vec{\nabla}_i U) \vec{r}_i = kU$$

Somit gilt für homogene  $U$ 

$$\langle T \rangle = \frac{k}{2} \langle U \rangle$$

Beispiele:(a)  $k = -1 \implies$  Galaxienhaufen(b)  $k = 2 \implies$  Harmonischer Oszillator**3.2 Symmetrien  $\iff$  Erhaltungssätze****3.2.1 Motivation**Energieerhaltung vs  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  $\mathcal{L}$  ist invariant unter  $t \rightarrow t' = t + \varepsilon$ **3.2.2 Zyklische Koordinate** $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  ist erhalten

Frage : Kann der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgröße und Invarianz ohne Bezug auf Koordinatensystem formuliert werden?

**3.2.3 Noethertheorem**Invarianz von  $S[q_i]$  :  $q_i$  sei Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung

Es gebe eine Transformation :

$$T : \begin{pmatrix} q_i \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_i^* = q_i + \varepsilon \psi_i(q_j, \dot{q}_j, t) \\ t^* = t + \varepsilon \varphi(q_j, \dot{q}_j, t) \end{pmatrix}$$

Wobei  $\varepsilon$  infinitesimal klein sei.

Vergleiche  $S[q_i(t)]$  (Randwerte  $t_1, t_2$ ) und  $S[q_i^*(t^*)]$  (Randwerte  $t_1^*, t_2^*$ )

### Satz

#### Noethertheorem

Sei  $S[q_i(t)] = S[q_i^*(t^*)]$  mit

$$T : \begin{pmatrix} q_i \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_i^* = q_i + \varepsilon\psi_i(q_j, \dot{q}_j, t) \\ t^* = t + \varepsilon\varphi(q_j, \dot{q}_j, t) \end{pmatrix}$$

Dann nennen wir  $S$  invariant unter  $T$ . Es liegt eine Symmetrie vor  $\implies$  Es gibt eine Erhaltungsgröße  $Q$  mit

$$Q(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i \right) + \left( \mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi$$

und

$$\frac{d}{dt} Q = 0$$

### Beispiele

- (a) Zeitinvarianz  $\implies \psi = 0, \varphi = 1$

$$Q = \mathcal{L} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i$$

Laut Eulertheorem ist  $\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \dot{r}_i = 2T$

Somit ist  $Q = T - U - 2T = -(T + U)$ , also ist nach Noethertheorem  $\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt}E = 0 \implies$  Energieerhaltung

- (b)  $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$  sei unabhängig von  $q_j$ .

$$\text{Wähle } \psi = \delta_{ij}, \varphi = 0 \implies Q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$$

- (c) Zwei Variablen  $q_x, q_y$  und  $\mathcal{L}$  sei von der Form  $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{q}_x^2 + \dot{q}_y^2) - U(q_x^2 + q_y^2)$

$$\text{Transformation } \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_x^* = q_x + \varepsilon q_y \\ q_y^* = q_y - \varepsilon q_x \\ t^* = 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \psi_x = q_y \\ \psi_y = -q_x \\ \varphi = 0 \end{pmatrix}$$

Also  $Q = m(\dot{q}_x q_y - \dot{q}_y q_x) = \vec{L}_z$ . Somit folgt Drehimpulserhaltung in  $z$  Richtung

### 3.2.4 Beweis des Noethertheorems

$$S[q] \text{ ist invariant unter } T : \begin{pmatrix} q_i \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_i^* = q_i + \varepsilon \psi_i(q_j, \dot{q}_j, t) \\ t^* = t + \varepsilon \varphi(q_j, \dot{q}_j, t) \end{pmatrix}$$

$$S[q] = S[q^*] \text{ mit den Randwerten } t_1^*, t_2^*$$

**Beweis:** 
$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q, \frac{dq}{dt}, t)$$

Für die linke Seite mit Variablentransformation  $t^*$  als Funktion von  $t$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \right) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \mathcal{L}(q, \frac{dq}{dt}, t) \right) + \varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \right)$$

$$\implies \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Für alle  $q, t \implies \frac{d}{d\varepsilon} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$

Umformung von  $\left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \right)$ .

Verwende dazu

$$\begin{aligned} \frac{dt^*}{dt} &= 1 + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{dq^*}{dt^*} &= \frac{dq^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} \\ &= \left( \frac{dq}{dt} + \varepsilon \frac{d\psi}{dt} \right) \left( 1 - \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \dot{q} + \varepsilon(\dot{\psi} - \dot{q}\dot{\varphi}) \end{aligned}$$

Hierbei wurde getaylor,  $\frac{dt}{dt^*} = (1 + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt})^{-1} = 1 - \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + O(\varepsilon^2)$

Setze die Transformationen in  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dt^*}{dt} \mathcal{L}(q^*, \frac{dq^*}{dt^*}, t^*) \right) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$  ein.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \left( \mathcal{L}(q + \varepsilon\psi, \dot{q} + \varepsilon(\dot{\psi} - \dot{q}\dot{\varphi}), t + \varepsilon\varphi)(1 + \varepsilon\dot{\varphi}) \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} (\dot{\psi} - \dot{q}\dot{\varphi}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \varphi + \mathcal{L}\dot{\varphi} \right) \\
&= \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\psi} + \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} + \mathcal{L} \right) \dot{\varphi} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}_{\text{nach 2.2.2 } \frac{d}{dt}(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q})} \varphi \\
&= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \psi \right) + \frac{d}{dt} \left( \left( \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \varphi \right)
\end{aligned}$$

Also ist  $Q(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \psi + \left( \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \varphi = \text{const}$

Mehrere Koordinaten

$$Q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \psi_i + \left( \mathcal{L} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \varphi$$

Jede konstante Symmetrietransformation liefert eine Erhaltungsgröße.

# Kapitel 4

## Schwingungen eines Systems bei kleinen Auslenkungen

### 4.1 Eigenfrequenzen und Eigenmoden

Sei

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - U(q_i)$$

Annahme:  $U$  besitze ein Minimum bei  $q_i = q_i^0$  (Wobei 0 hier den Index angibt,  $i$  die Komponente)

Taylor-Entwicklung um Minimum

$$U(q_i) = \underbrace{U(q_i^0)}_{\text{Irrelevant}} + \underbrace{\sum_j \frac{dU(q_i)}{dq_j} \Big|_{q_i=q_i^0} \cdot (q_i - q_i^0)}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{d}{dq_j} \frac{d}{dq_k} U(q_i) \Big|_{q_i=q_i^0} \cdot (q_j - q_j^0)(q_k - q_k^0)$$

Betrachte nun kleine Auslenkungen :  $\dot{q}_i, \dot{q}_k$  ist bereits quadratisch

$$\implies a_{jk}(q_i) \rightarrow a_{jk}(q_i^0) = \text{const}$$

Es sei  $x_i = q_i - q_i^0, \dot{x}_i = \dot{q}_i$

Definiere

$$a_{jk}(q_i^0) = M_{jk}$$
$$\frac{d}{dq_j} \frac{d}{dq_k} U \Big|_{q_i=q_i^0} = K_{jk}$$

26 KAPITEL 4. SCHWINGUNGEN EINES SYSTEMS BEI KLEINEN AUSLENKUNGEN

$$\mathcal{L} = \sum_{j,k} \frac{1}{2} M_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k - \sum_{j,k} \frac{1}{2} K_{jk} x_j x_k = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} - \frac{1}{2} x^T K x$$

Also gilt für weitere Betrachtungen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} - \frac{1}{2} x^T K x$$

$M$  und  $K$  können symmetrisch gewählt werden

$$x \in \mathbb{C}^n, M \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\text{Bewegungsgleichung } \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{Es gilt : } \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} x_j x_k \right) = \sum_j K_{ij} x_j$$

$$\frac{d}{dt} \sum_j M_{ij} \dot{x}_j + \sum_j K_{ij} x_j = 0$$

Somit ergibt sich

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

System linearer DGL mit konstanten Koeffizienten.

$$\text{Ansatz } x_k(t) = A_k e^{i\omega t}, A \in \mathbb{C}^n$$

Eingesetzt :

$$-\omega^2 M \cdot A + KA = 0 \text{ oder}$$

$$(K - \omega^2 M)A = 0 \tag{4.1}$$

In Komponenten

$$\sum_j (K_{ij} - \omega^2 M_{ij}) A_j = 0 \tag{4.2}$$

Damit diese Gleichung eine nicht-triviale Lösung hat, muss  $K - \omega^2 M$  singulär sein, also

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

$\det(K - \omega^2 M)$  ist ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\omega^2 \implies n$  Nullstellen

Beachte: Eigenwerte von  $K$  und  $M$  sind positiv definiert, da

$$x^T K x > 0 \text{ für } |x| > 0 \text{ ( Minimum bei } x=0 \text{ )}$$

$$\dot{x}^T M \dot{x} > 0 \text{ für } |\dot{x}| > 0 \text{ ( kinetische Energie positiv)}$$

Lösung der DGL

$$x_i(t) = \Re(A_i e^{-i\omega t})$$

mit  $\omega = \sqrt{\omega^2}$  und  $A_i$  komplex. Aus physikalischen Prinzipien muss  $\omega^2$  positiv sein, sonst gibt es exponentiell wachsende Lösungen.

Mathematischer Beweis :

$$\begin{aligned} KA &= \omega^2 M && \text{nach (4.1)} \\ A^{*T} KA &= \omega^2 A^{*T} MA \\ \omega^2 &= \frac{A^{*T} KA}{A^{*T} MA} \end{aligned}$$

Wobei Zähler und Nenner jeweils positiv sind.

Wegen  $\Re((a_i + ib_i)e^{\pm i\omega t}) = a_i \cos(\omega t) \mp b_i \sin(\omega t)$  genügt es,  $\omega > 0$  und nur  $e^{-i\omega t}$  zu betrachten

$\det(K - \omega^2 M) = 0$  hat  $n$  Lösungen (Eigenwerte) ,  $\omega_k^2, k = 1, \dots, n$

Eventuell fallen  $r$  zusammen. Dann hat das zu  $\omega_k^2$  gehörige Gleichungssystem

$$\sum_j (K_{ij} - \omega_k^2 M_{ij}) A_j^{(k)} = 0$$

den Rang  $n - r$ . Es können  $r$  Komponenten von  $A^{(k)}$  frei gewählt werden  $\implies r$  verschiedene Lösungen (Linear unabhängige Lösungen) zu  $\omega_k$ .

$A_j^{(k)}$  bezeichnet hier allerdings nicht die  $k$ -te Ableitung des Vektors, sondern der zu  $\omega_k^2$  dazugehörige Vektor  $A$

Die allgemeinste Lösung ist eine Kombination der Fundamentalschwingungen (Einzellösungen)

Im Fall  $\omega_k^2 = 0$  ersetzen wird  $c_k e^{i\omega_k t}$  durch  $a_k + b_k t$

## 4.2 Normalkoordinaten

Übergang zu neuen Koordinaten, die den Eigenmoden entsprechen (analog zu Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix. Hier wegen  $M$  und  $K \neq \mathbb{1}$  etwas komplizierter)  
Es gilt

$$(K - \omega_k^2 M)A^{(k)} = 0 \implies A^{(l)T}(K - \omega_k^2 M)A^{(k)} = 0 \text{ für beliebige } k, l \quad (4.3)$$

Ebenso  $(K - \omega_k^2 M)A^{(k)} = 0$  transponiert :  $A^{(l)T}(K^T - \omega_k^2 M^T) = 0$   
Aufgrund der Symmetrie ist  $K^T = K, M^T = M$

$$A^{(l)T}(K - \omega_l^2 M)A^{(k)} = 0 \quad (4.4)$$

Betrachte nun (4.4) - (4.3)  $(\omega_k^2 - \omega_l^2)A^{(l)T}MA^{(k)} = 0$   
Für  $k \neq l$  gelte  $\omega_l^2 \neq \omega_k^2$ . Also

$$A^{(l)T}MA^{(k)} = 0$$

Für  $k = l$  wähle die Normierung von  $A^{(k)}$  so, dass  $A^{(k)T}MA^{(k)} = 1 \implies A^{(l)T}M$  Also

$$A^{(l)T}MA^{(k)} = \delta_{lk}$$

Falls  $M = \mathbb{1} \implies$  Eigenvektoren von  $K$  bilden ein Orthonormalsystem.

Definiere die Matrix

$$a = (a_{ij}) = (A^{(1)}|A^{(2)}|\dots|A^{(n)})$$

Wobei  $a^T M a = \mathbf{1}$

Wegen  $A^{(k)T}(K - \omega_k^2 M)A^{(k)} = 0$  gilt  $A^{(l)T} K A^{(k)} = \omega_k^2 \delta_{lk}$  oder

$$a^T K a = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n^2 \end{pmatrix} = (\omega^2)$$

Die Ersetzung  $x = aQ$  führt auf ein System von *entkoppelten* harmonisch Oszillierenden  $Q_i$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} - \frac{1}{2} x^T K x \\ &= \frac{1}{2} \dot{Q}^T \underbrace{a^T M a}_{\mathbf{1}} \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T \underbrace{a^T K a}_{(\omega^2)} Q \\ &= \frac{1}{2} \dot{Q}^T \mathbf{1} \dot{Q} - \frac{1}{2} Q^T (\omega^2) Q \\ &= \sum_k \frac{1}{2} \dot{Q}_k^2 - \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2 \end{aligned}$$

### 4.3 Anharmonische Schwingungen

Bisher : *kleine* Auslenkungen um die Ruhelage, woraus sich ergeben haben

- lineare Bewegungsgleichungen
- Frequenz unabhängig von der Stärke der Auslenkung.

*Frage:* Was passiert bei Berücksichtigung höherer Terme in der Taylor-Entwicklung? Es ergeben sich Nicht-Linearitäten und Anharmonizitäten. (Nichtlineare Medien ergeben Eismischungen von Oberschwingungen, z.B.: Optik - Frequenzverdopplung) Ansatz ist dann

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} (n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l) - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} (l_{ikl} x_i x_k x_l)$$

Verboten sind hierbei jedoch  $\dot{x}^3$  und  $\dot{x}^1$ , da die Geschwindigkeit nie linear auftaucht wegen  $T = f_{ik}(x_j) \dot{x}_j \dot{x}_k$

### 4.3.1 Betrachtung der Quadratischen Terme

Übergang zur Normalkoordinaten durch lineare Transformation :  $x_i =$  lineare Funktion von  $Q_k$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_k \left( \dot{Q}_k^2 - \omega_k^2 Q_k^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \left( \lambda_{ijk} \dot{Q}_i \dot{Q}_j Q_k \right) - \frac{1}{3} \sum_{i,j,k} \left( \mu_{ijk} Q_i Q_j Q_k \right)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_k} = 0$ , woraus sich hier ergibt

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = f_k(Q, \dot{Q}, \ddot{Q})$$

Wobei  $f_k$  von *allen*  $Q$  abhängen kann. *Frage*: Wie lautet  $f_k$  ausgedrückt durch  $\lambda, \mu$  ?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \frac{d}{dt} \left( \dot{Q}_k + \sum_{h,j} \lambda_{hjk} \dot{Q}_h Q_j \right) \\ &= \ddot{Q}_k + \underbrace{\sum_{h,j} \lambda_{hjk} \left( \ddot{Q}_h Q_j + \dot{Q}_h \dot{Q}_j \right)}_{f_k} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_k} &= \end{aligned}$$

$f_k$  harmonische Funktion zweiten Grades in  $Q, \dot{Q}, \ddot{Q}_j$

## Störungstheorie

Die Summenterme, also mit  $f_k$  sind klein gegenüber  $\omega_k^2 Q_k$ . Alternative Lösung

$$Q_k = Q_k^{(1)} + Q_k^{(2)} + Q_k^{(3)} + \dots$$

(a) Bestimme  $Q_k^{(1)}$  aus

$$\ddot{Q}_k^{(1)} + \omega_k^2 Q_k^{(1)} = 0$$

(b)  $Q_k^{(1)}$  in  $f$  eingesetzt liefert eine Gleichung für  $Q_k^{(2)}$  mit

$$|Q_k^{(2)}| \ll |Q_p^{(1)}| \quad \forall k, p$$

Es ergibt sich  $Q_k^{(1)} = a_k \cos(\omega_k t + \alpha_k)$ .  $Q_k^{(1)} + Q_k^{(2)}$  wird in  $\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = f_k(Q, \dot{Q}, \ddot{Q})$  eingesetzt. Auf der linken Seite fällt  $Q_k^{(1)}$  heraus, es bleibt  $\ddot{Q}_k^{(2)} + \omega_k Q_k^{(2)} = \dots$ . Auf der rechten Seite setzen wir für  $Q_i$  die Näherung  $Q_i^{(1)}$  ein. Dies ist quadratisch in  $Q, \dot{Q}, \ddot{Q}$  und ist gegeben durch

$$f_k(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(2)})$$

$f_k$  enthält Produkte vom Typ

$$\begin{aligned} Q_i^{(1)} Q_j^{(1)} &= a_i a_j \cos(\omega_i t + \alpha_i) \cos(\omega_j t + \alpha_j) \\ &= a_i a_j \frac{1}{2} (\cos((\omega_i t + \alpha_i) + (\omega_j t + \alpha_j)) + \cos((\omega_i t + \alpha_i) - (\omega_j t + \alpha_j))) \end{aligned}$$

und ähnlich für  $Q\dot{Q}, \dot{Q}^2, \dots$

Betrachten wir nun die Zweite Ordnung

$$\ddot{Q}_k^{(2)} + \omega_k^2 Q_k^{(2)} = \sum_{i,j} a_i a_j (\cos((\omega_i t + \alpha_i) + (\omega_j t + \alpha_j)) + \cos((\omega_i t + \alpha_i) - (\omega_j t + \alpha_j)))$$

Gleichung wie mit einer äußeren periodischen Kraft, die mit einer *Kombinationsfrequenz*  $\omega_i \pm \omega_j$ , wirkt, darunter auch  $\omega_k \pm \omega_k = \begin{pmatrix} 2\omega_k \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$  Frequenzverdopplung.

Bei der dritten Näherung  $Q^{(3)}$  gibt es bei den Winkelfunktionen der Form

$$a_i a_j a_k \cos((\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k)t + \alpha_i \pm \alpha_j \pm \alpha_k)$$

und speziell für  $i = j = k$  auch Terme der Form

$$a_k^3 \cos(\omega_k t + \alpha_k)$$

Die Differentialgleichung ist dann von der Form

$$\ddot{Q}_k^{(3)} + \omega_k^2 Q_k^{(3)} = a_k^3 \cos(\omega_k t + \alpha_k)$$

und führt zu Lösungen mit zeitlich wachsender Amplitude mit

$$Q_k^{(3)} = \frac{a_k^3}{2\omega_k} t \sin(\omega_k t + \alpha_k)$$

### 32 KAPITEL 4. SCHWINGUNGEN EINES SYSTEMS BEI KLEINEN AUSLENKUNGEN

Dies ist jedoch nicht physikalisch akzeptabel! Es würde einen Widerspruch zur Energieerhaltung geben. Wir müssen die Frequenz korrigieren. Der lineare Term rührt hier von

$$\underbrace{\cos\left((\omega_k^{(0)} + \Delta\omega_k)t\right)}_{\text{ursprüngliche Grundfunktion, } \leq 1} \approx \cos(\omega_k^{(0)}t) - t\Delta\omega_k \sin(\omega_k^{(0)}t)$$

Dies ist jedoch linear in  $t$  und kann deswegen nur für kleine Zeiten gelten. Durch Isolierung der in  $t$ -linearen Terme gewinnt man die Frequenzverschiebung. *Beispiel:* Ein Freiheits-

grad, Rechnung bis zur dritten Ordnung.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \underbrace{\left(\frac{m\omega_0^2}{2}x^2 + \frac{m}{3}\alpha x^3 + \frac{m}{4}\beta x^4\right)}_{:=V(x)} \quad (4.5)$$

Die Bewegungsgleichung ist dann

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3$$

und  $|\omega_0^2 x| \gg |\alpha x^2| \gg |\beta x^3|$ . Als Ansatz wähle

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)} + \dots \\ x^{(1)} &= a \cos(\omega t) \\ \omega &= \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} \end{aligned}$$

$\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  soll so bestimmt werden, dass *kein* Resonanzterm auftaucht. Umformung von (4.5) so, dass die linke Seite immer Null wird.

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x} \quad (4.6)$$

Als Ansatz wähle

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} + x^{(2)} \\ \omega &= \omega_0 + \omega^{(1)} \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.6) liefert, dass die linke Seite verschwindet für  $x = x^{(1)}$ . Auf der rechten Seite nur  $x^{(1)}$  einsetzen, aufgrund kleiner Auslenkungen von  $x^{(2)}$ . Weiterhin kann der  $x^3$  Term aufgrund vergleichsweise kleiner Werte vernachlässigt werden. Also

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} &= -\alpha a^2 \cos^2(\omega t) - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) (-a)\omega^2 \cos(\omega t) \\ &= -\alpha a^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) + a(\omega^2 - \omega_0^2) \cos(\omega t) \\ &= -\alpha a^2 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) + \underbrace{(2\omega_0 + \omega^{(1)})\omega^{(1)}}_{\text{Dies wäre jedoch ein Resonanzterm}} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, da kein Resonanzterm existieren darf

$$\omega^{(1)} = 0$$

. Dies bedeutet keine Frequenzveränderung. In der zweiten Näherung ergibt sich : Bestimme  $x^{(2)}(t)$  aus

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \quad (4.7)$$

Die Lösung ist bereits aus Theo A bekannt, es ist eine Verschiebung um  $-\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}$  und um eine harmonische Frequenz  $2\omega$

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega t) \quad (4.8)$$

Die dritte Näherung

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$$

$$\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$$

### 34 KAPITEL 4. SCHWINGUNGEN EINES SYSTEMS BEI KLEINEN AUSLENKUNGEN

Betrachte die Gleichung (4.6), wobei nur die Terme der dritten Ordnung betrachtet werden z.B.:

$$\begin{aligned} (x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)})^2 &= (x^{(1)})^2 && \text{Zweite Ordnung} \\ &= 2x^{(1)}x^{(2)} && \text{dritte Ordnung} \\ &= (x^{(2)})^2 && \text{vierte Ordnung} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)}x^{(2)} - \beta(x^{(1)})^3 + 2\omega_0\omega^{(2)}x^{(1)}$$

Setze  $x^{(1)}$  und  $x^{(2)}$  aus (4.8) rechts ein. Verwende Theoreme für Produkte von Sinus und Cosinus.

$$\begin{aligned} \cos \omega t \cdot \cos 2\omega t &= \\ \cos^3 \omega t &= \end{aligned}$$

Nach Rechnung erhält man

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = a^3 \left[ \frac{\beta}{4} - \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos(3\omega t) + a \underbrace{\left[ 2\omega_0\omega^{(2)} + \frac{5}{6} \frac{a^2\alpha^2}{\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2\beta \right]}_{\text{Muss 0 sein aufgrund von Resonanzschwingungen}} \cos(\omega t)$$

Daraus folgt

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3}{8} \frac{\beta}{\omega_0} - \frac{5}{12} \frac{\alpha^2}{\omega_0^3} \right) a^2$$

Daraus ergibt sich für die Störung von  $x$

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} - \frac{\beta}{2} \right) \cos(3\omega t)$$

**Beispiel** Als Beispiel wähle ein Fadenpendel mit Auslenkwinkel  $\theta$ , Länge  $l$  und Masse des Pendelkörpers  $m$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - V(\theta) \\ E &= \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + V(\theta) \\ V(\theta) &= -mgl \cos(\theta)\end{aligned}$$

**1. Methode**  $E = \text{const}$ ,  $\dot{\theta}^2 = \frac{E-V(\theta)}{m \frac{l^2}{2}}$

$$\sqrt{\frac{ml^2}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{E - V(\theta)}} = dt$$

Wähle  $\theta_0$  (eine mögliche Auslenkung) so, dass  $V(\theta_0) = E$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{ml^2}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{-mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta)}} &= dt \\ \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} &= \frac{T}{4}\end{aligned}$$

Wobei  $T$  die Umlaufdauer angibt mit  $T = \frac{2\pi R}{\omega}$ . Dies ist ein elliptisches Integral, mit Bronstein u.ä. zu lösen.

Näherung ist hier dann

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}$$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta_0^2 - \theta^2) + (\theta^4 - \theta_0^4) \cdot \frac{1}{12}}}$$

Führende Ordnung

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{\pi}{2}$$

### 36 KAPITEL 4. SCHWINGUNGEN EINES SYSTEMS BEI KLEINEN AUSLENKUNGEN

Damit gilt für die führende Ordnung

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} 2\pi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Korrektur :

$$\omega_0 \frac{T}{4} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 + \theta_0^2 (u^4 - 1) \cdot \frac{1}{12}}}$$

Verwende

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \delta}} \approx 1 + \frac{\delta}{2} \quad \text{für kleine } \delta$$

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{T}{4} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \left[ 1 + \frac{\theta_0^2}{2} \frac{1 + u^2}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0^2}{24} \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\omega_0 T}{4} &= \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \end{aligned}$$

Woraus sich ergibt

$$\omega = \omega_0 \left( 1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

## 2. Methode

$$\mathcal{L} = ml^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \left( \theta^2 - \frac{\theta^4}{12} \right) \right]$$

Daraus ergibt sich

$$\beta = \frac{1}{6} \omega_0^2 \quad a = \theta_0$$

$$\frac{3}{8} \omega^{(2)} = \frac{\theta_0^2}{\omega_0} \left( -\frac{1}{6} \omega_0^2 \right) = -\frac{1}{16} \omega_0 \theta_0^2$$

Dies ist jedoch genau das Ergebnis aus der Menablathode der Anharmonischen Näherung aus der 1. Methode.

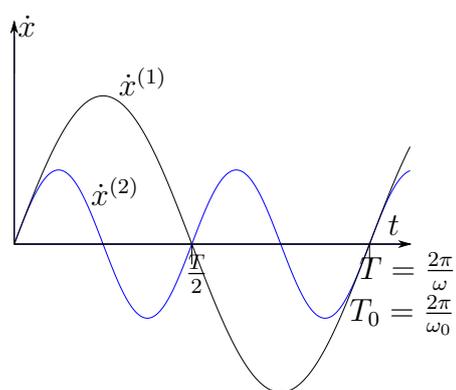


Abbildung 4.1: Fourier-Reihe



# Kapitel 5

## Hamilton-Formalismus kanonischer Gleichungen/ Poisson-Klammern

### 5.1 Struktur der Mechanik

- Hamilton Funktion  $H$  (Symmetrie zwischen Koordinaten und Impuls, Quantenmechanik Hamilton Operator).
- Poisson-Klammern (In der Quantenmechanik vergleichbar mit der Vertauschungsrelation).
- Phasenraum (Satz von Liouville)

#### 5.1.1 Legendre Transformation : von $\mathcal{L}$ zu $H$

Lagrange Funktion hängt ab von  $q, \dot{q}, t$ . Euler-Lagrange-Gleichungen liefern Differentialgleichungen zweiten Grades.

*Ziel:* Übergang zu  $q$  und  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  (und  $t$ ) als unabhängige Variablen liefern ein System von Zwei Differentialgleichungen erster Ordnung (bzw  $2n$  DGL für  $n$  Freiheitsgrade).

**Mathematischer Einschub: Legendre Transformation** Betrachte  $f(x, y) \implies df = udx + vdy$  mit  $u = \frac{\partial f}{\partial x}, v = \frac{\partial f}{\partial y}$ .  $f$  spielt die Rolle eines Potentials. Wenn lediglich  $u$  und  $v$  gegeben sind, muss gelten

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$f, u, v$  sind Funktionen von  $x, y$ . Ziel: Übergang auf neue Funktion  $g$ , so dass  $u = \frac{\partial f}{\partial x}$  und  $y$  unabhängige Variablen sind. Wähle hierzu

$$g = f - ux \quad (5.1)$$

$g$  = Legendre-Transformation zu  $f$

$$dg = df - udx - xdu = udx + vdy - udx - xdu$$

$$dg = vdy - xdu \quad (5.2)$$

$v$  und  $x$  sind selbst als Funktion von  $u$  und  $y$  zu interpretieren. Es gilt weiterhin  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = u$ . Die Inversion liefert  $x =$ Funktion von  $y, u$ .  $v = \frac{\partial f}{\partial y}(x(y, u), y)$

Wegen (5.2) gilt

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{u=\text{const}} = v, \quad \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{y=\text{const}} = -x$$

Verweis auf Thermodynamik : Energie auf freie Energie (Thermodynamische Potentiale).

### 5.1.2 Hamilton Funktion

Betrachte

$$H = \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L}$$

(bis auf Vorzeichen wie (5.1) Annahme  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) = p$  ist umkehrbar  $\implies \dot{q} =$ Funktion von  $q, p, t$ )

$$H(q, p, t) = \dot{q}(q, p, t)p - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

$$dH = \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

Somit folgt

### Definition

Kanonische Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= -\dot{p} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\end{aligned}$$

**Energieerhaltung** Wegen

$$dH = \dot{q}dp - \dot{p}dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

gilt  $\frac{dH}{dt} = \dot{q}\frac{dp}{dt} - \dot{p}\frac{dq}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$ . Also

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial t}$$

### 5.1.3 Poisson Klammern

Es sei  $f(p, q, t)$  eine beliebige Funktion der Koordinaten, Impulse und der Zeit. Dann ist

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Die Hamilton - Gleichungen liefern

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Notation

**Definition**Poisson-Klammern bei  $n$  Freiheitsgraden

$$\{H, f\} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k}$$

Somit folgt

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Falls  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  und falls  $\{H, f\} = 0$  ergibt sich

$$\frac{df}{dt} = 0$$

Beispiel:  $f = xp_y - yp_x$  und  $H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x^2 + y^2 + z^2)$  Für beliebige  $f, g$  definieren wir

$$\{f, g\} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k}$$

Was erhält man für  $\{L_x, L_y\}$  mit  $L_x = yp_z - zp_y$  und  $L_y = xp_z - zp_x$ . Es gilt dann

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}$$

$$\{q_i, q_k\} = 0$$

$$\{p_i, p_k\} = 0$$

$$\{p_i, q_k\} = \delta_{ij}$$

Quantenmechanik :  $\{f, g\} \implies [F, G]$ **5.1.4 Phasenraum**

Wodurch ist der Zustand eines mechanischen Systems vollständig beschrieben?

Die *Lage* eines mechanischen Systems mit  $N$  Freiheitsgraden wird durch die  $N$  Koordinaten  $g_i$  beschrieben. Allein durch die Angabe der Lage der Teilchen lässt sich die zeitliche Entwicklung des Systems nicht berechnen, DGL 2. Ordnung, daher *2 Anfangsbedingungen*.

Zur vollständigen Beschreibung des Zustands des Systems benötigt man die Kenntnis der Impulse zum Zeitpunkt  $t_0$ .

Alle möglichen Werte der Koordinaten  $q_i$  und Impulse  $p_i$  bilden den *Phasenraum*. Zu jeder Zeit wird der Zustand eines Systems durch einen *Punkt im Phasenraum* beschrieben.

### Beispiel: harmonischer Oszillator

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

der kanonische Impuls  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \implies \dot{q} = \frac{p}{m}$

$$H(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m} - \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

Definiere neue Variablen:

$$z_1 = \sqrt{m\omega}q, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}p$$

$$\implies H = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

Kanonische Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{d}{dt}q, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{d}{dt}p$$

Ausgedrückt durch die neuen Variablen

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{m\omega}} z_1 = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \frac{d}{dt} z_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} z_1$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} z_2$$

mit  $\tau = t\omega$  folgt

$$\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{d}{dt} z_1, \quad \frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{d}{dt} z_2$$

$$\implies z_2 = \frac{d}{dt} z_1, \quad z_1 = -\frac{d}{dt} z_2$$

mit der Lösung

$$z_1(t) = a \cos(\tau - \varphi)$$

$$z_2(t) = -a \sin(\tau - \varphi)$$

Anfangswerte zur Zeit  $t = 0$ :

$$z_1^0 = \sqrt{m\omega}q(0)$$

$$z_2^0 = \frac{1}{\sqrt{m}}p(0)$$

die Energie ist erhalten,  $E = H$ , also

$$E = H = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2) = \text{const.} = \frac{a^2}{2}$$

durch Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$a = \sqrt{(z_1^0)^2 + (z_2^0)^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{z_1^0}{a}, \quad \sin(\varphi) = \frac{z_2^0}{a}$$

Betrachte Bewegung im Phasenraum:

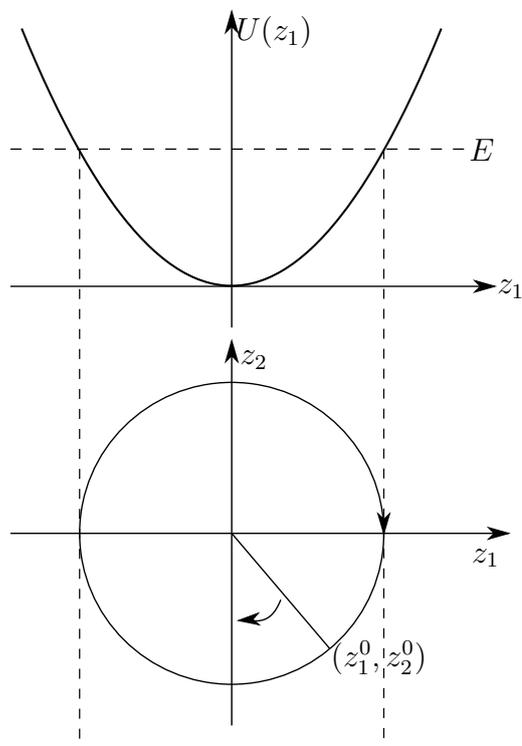


Abbildung 5.1: Bewegung im Phasenraum

Bewegung im Phasenraum liegt auf einem Kreis.

Verschiedene Energien entsprechen verschiedenen Radien des Kreises, Kreisfrequenz ist für alle Energien dieselbe!

Die Zustände mit  $E_1 \leq E \leq E_2$  belegen ein bestimmtes Volumen im Phasenraum entspricht der Fläche des entsprechenden Kreisringes. Drückt man die Variablen  $z_1, z_2$  wieder durch  $q$  und  $p$  aus, erhält man im Phasenraum eine Ellipse mit Halbachsen

$$P_{max} = \sqrt{2Em}, \quad q_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Die Fläche der Ellipse ist gegeben durch

$$F = \pi q_{max} p_{max} = 2\pi \frac{E}{\omega}$$

Die Zustände mit Energie  $E_1 \leq E \leq E_2$  besitzen das Volumen

$$\frac{2\pi}{\omega} (E_2 - E_1)$$

Dimension des Volumens:

$$\begin{aligned} \text{Wirkung} &= \text{Energie} \cdot \text{Zeit} \\ &= \text{Ort} \cdot \text{Impuls} \\ &= \text{verallgemeinerter Ort} \cdot \text{verallgemeinerter Impuls} \end{aligned}$$

Quantenmechanik: Nur *ein* Zustand in einem Volumenelement der Größe  $2\pi \frac{1}{n}$  existiert.

Harmonischer Oszillator: Energien quantisiert

$$E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad n \in \mathbb{N}$$

**Beispiel: ebenes Pendel**

$$\mathcal{L} = \frac{l^2 m}{2} \dot{\varphi}^2 - U(\varphi) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + (\cos(\varphi) - 1) mgl$$

kanonisch konjugierter Impuls:  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = l^2 m \dot{\varphi}$

$$\implies \dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2}$$

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - (\cos(\varphi) - 1)mgl$$

Führe wie zuvor neue Variablen ein

$$z_1 = \varphi, \quad z_2 = \frac{p}{ml^2\omega}, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \tau = \omega t$$

$$\frac{dz_1}{d\tau} = z_2(\tau), \quad \frac{dz_2}{d\tau} = -\sin(z_1(\tau))$$

$$H = \frac{1}{2}mglz_2^2 - (\cos(z_1) - 1)mgl$$

Energie ist wieder erhalten.

$$\varepsilon = \frac{H}{mgl} = \frac{1}{2}z_2^2 - (\cos(z_1) - 1) = \text{const.}$$

Bahnen im Phasenraum für festes  $\varepsilon$

$$z_2 = \pm \sqrt{2(\varepsilon + \cos(z_1) - 1)} \quad (5.3)$$

Diskutier 5.3 für verschiedene Werte von  $\varepsilon$ .

(1)  $\varepsilon > 2$ :

$$\varepsilon + \cos(z_1) - 1 > 0 \forall z_1$$

Nullstelle wird nicht erreicht.  $z_2$  immer entweder  $> 0$  oder  $< 0$

Lösung periodisch mit Periode  $2\pi$  symmetrisch um 0

maximal für  $z_1 = 0, 2\pi, \dots$

minimal für  $Z_1 = \pi, -\pi, \dots$

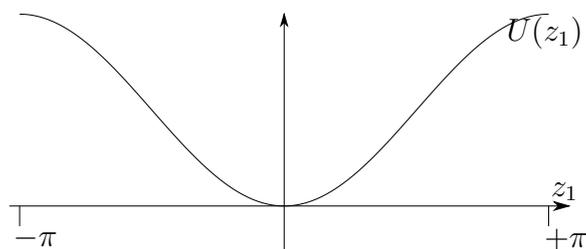


Abbildung 5.2: Potential

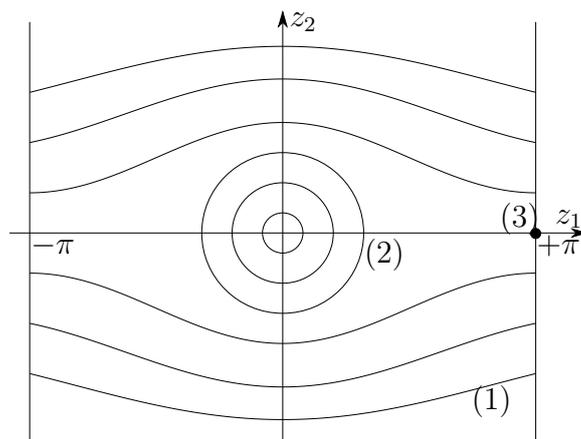


Abbildung 5.3: Phasenraumdiagramm des Pendels

(2) kleine  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon + \cos(z_1) - 1 > 0 \implies z_1 \text{ klein}$$

$$\varepsilon + \left(1 + \frac{z_1^2}{2}\right) - 1 > 0 \implies z_1^2 \lesssim 2\varepsilon$$

$$\text{also } z_2 = \pm \sqrt{2\varepsilon - z_1^2}$$

$$\implies z_1^2 + z_2^2 = 2\varepsilon$$

Kreise im Phasenraum mit Radius  $\sqrt{2\varepsilon}$ !

(3) Grenzfall  $\varepsilon = 2$ , Kriechfall:

$$z_2 = \pm \sqrt{2(\cos(z_1) + 1)}$$

$z_2$  nimmt für  $z_1 = \pm\pi$  den Wert 0 an.

### Satz

Satz von Liouville

*Gegeben sei ein Ensemble von Zuständen in einem Gebiet des Phasenraums mit vorgegebenem Volumen  $V$ . Bei der zeitlichen Entwicklung bleibt das Volumen konstant.*



# Kapitel 6

## Starrer Körper ( Kreisel )

### 6.1 Kinematik

Bisher lediglich Massenpunkte. Ein ausgedehnter, starrer Körper  $K$  wird interpretiert als viele Massenpunkte und Zwangsbedingung

$$\sum_i m_i \rightarrow \int \rho(\vec{x}) dV$$

Wobei  $\rho(\vec{x})$  die ortsabhängige Dichte beschreibt. Eine Beschreibung der Lage von  $K$  führt zu einem Koordinatensystem.

- $L \hat{=}$  Laborsystem (ruhend)  $(X, Y, Z)$
- $K \hat{=}$  körperfestes System  $(x, y, z)$ . Der Nullpunkt von  $K$  wird häufig im Schwerpunkt gewählt.

Im  $K$ -System (bezüglich  $L$ ) festgelegt durch Ursprung von  $K$  und die Orientierung der Achsen von  $K$ .

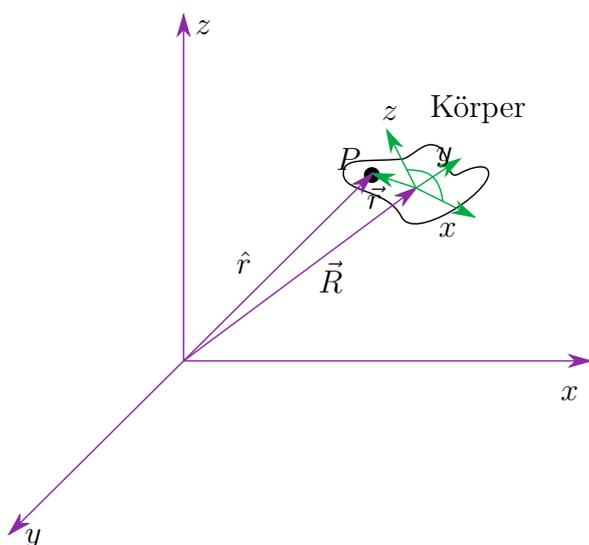


Abbildung 6.1: Laborsystem

### Lage des Körpers ist festgelegt durch 6 Koordinaten

- (a) Lage wird offensichtlich bestimmt durch die Lage von 3 Punkten des Körpers  $P_1, P_2, P_3$ .  
Es gilt, dass 3 Punkten 9 Koordinaten entsprechen, jedoch gibt es 3 Zwangsbedingungen (Abstände von  $P_1, P_2, P_3$ ).
- (b) Lage des Schwerpunkts ( $\hat{=}$  3 Koordinaten) , 3 Winkel ( Eulerwinkel).

Lage eines beliebigen Punktes  $P$  des Körpers

- bezüglich L.

$$\hat{r} = (X, Y, Z)$$

- bezüglich K

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

*Bewegung*

Infinitesimale Verschiebung von  $P$ : durch Verschiebung von K bezüglich L und durch Drehung

$$d\hat{r} = d\vec{R} + d\hat{\varphi} \times \vec{r} \quad (6.1)$$

$d\hat{r}$  ist die Änderung im L-System,  $d\vec{R}$  ist die Verschiebung von K,  $d\hat{\varphi}$  ist die Drehung um Winkel  $|d\hat{\varphi}|$  um die Drehachse  $\frac{d\hat{\varphi}}{|d\hat{\varphi}|}$ .

Geschwindigkeit von  $P$ , betrachtet in L mit

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\hat{\varphi}}{dt} &= \vec{\Omega} \\ \frac{d\vec{R}}{dt} &= \vec{V}\end{aligned}$$

Dann ergibt sich aus (6.1)

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Wobei  $\vec{V}$  die Translationsbewegung ist,  $\vec{\Omega}$  die Winkelgeschwindigkeit ist und  $\vec{r}$  körperfeste Koordinaten von P sind.

Wähle ein zweites körperfestes System  $K'$ , verschoben gegen K.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}$$

Geschwindigkeit von  $K'$  gegen L sei  $\vec{V}_2$ , Winkelgeschwindigkeit sei  $\vec{\Omega}_2$ .

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \\ &= \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_2\end{aligned}$$

Andererseits per Definition

$$\vec{v} = \vec{V}_2 + \vec{\Omega}_2 \times \vec{r}_2$$

für alle  $\vec{r}_2$ . Insgesamt ergibt sich also

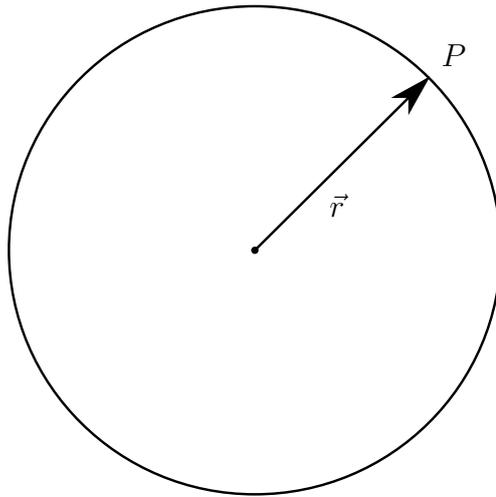
$$\vec{V}_2 = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a}$$

und

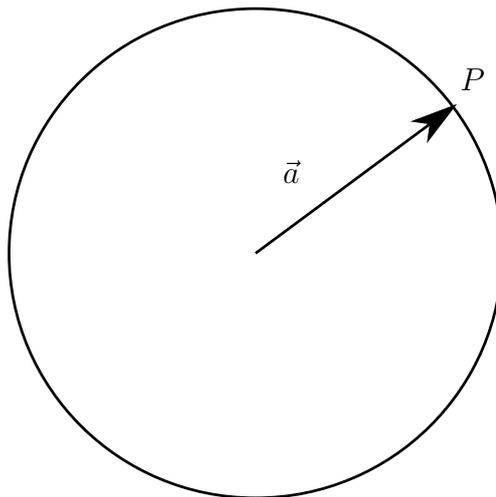
$$\vec{\Omega}_2 = \vec{\Omega}$$

Rotationsgeschwindigkeit eines Körpers ist unabhängig von der Wahl des Systemsnullpunkt, aber  $\vec{V}$  hängt ab vom Nullpunkt.

- $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  und  $\vec{V}_2 = 0$



- P sei Ursprung,  $\vec{r}_2 = 0$ ,  $\vec{V}_2 = \vec{\Omega} \times \vec{a}$



Falls  $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$  zu einem bestimmten Zeitpunkt, also

$$\vec{V} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

Also

$$\vec{V}_2 \perp \vec{\Omega}$$

für beliebiges körperfestes System, da

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{V}_2 = \vec{\Omega} \cdot (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{a}) = 0$$

Ferner gilt in diesem Fall

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{v} = \vec{\Omega} \cdot (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = 0$$

für alle P, also

$$\vec{\Omega} \perp \vec{v}$$

Falls  $\vec{V} \perp \vec{\Omega}$ , dann kann man ein System O' finden, so dass  $\vec{V}'_2 = 0$  (zu diesem Zeitpunkt).

*Konstruktion* Es sei  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ . Wähle  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}$  mit  $\vec{a} = -\frac{(\vec{V} \times \vec{\Omega})}{|\vec{\Omega}|^2}$ .

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_2 - \vec{\Omega} \times (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \frac{1}{|\vec{\Omega}|^2} \\ &= \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_2 - \left( \vec{V} \cdot \vec{\Omega}^2 - \vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{V}) \right) \frac{1}{|\vec{\Omega}|^2} \\ &= \vec{\Omega} \times \vec{r}_2 \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_2$$

Drehung und Translation des L-System entspricht also einer Drehung um verschobene Achse.

## 6.2 Trägheitstensor

Kinetische Energie

$$T = \sum_i m_i \frac{\vec{v}_i^2}{2}$$

Verwende

$$\begin{aligned} \vec{v}_i^2 &= (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i)^2 \\ &= \vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) + (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i)^2 \\ &= \vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) + \vec{\Omega}^2 r_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \end{aligned}$$

Also

$$T = \frac{V^2}{2} \sum_i m_i + \underbrace{\vec{V} \times \vec{\Omega} \sum_i m_i \vec{r}_i}_{0 \text{ falls O das Schwerpunktsystem ist}} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left( \vec{\Omega}^2 r_i^2 - (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i)^2 \right)$$

Notation

$$\vec{r}_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$$

Definiere Trägheitstensor

$$I_{jk} = \sum_i m_i (\delta_{jk} r_i^2 - x_j^i x_k^i) \implies \int_V \rho(\vec{x}) (\delta_{jk} r^2 - x_j x_k) dV$$

Dann kann der zweite Term von  $T$  geschrieben werden als

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Omega_j I_{jk} \Omega_k = \frac{1}{2} \vec{\Omega} I \vec{\Omega}$$

Definiere weiterhin

$$\mu = \sum_i m_i \implies \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Somit gilt insgesamt

$$T = \frac{\vec{V}^2}{2} \mu + \frac{1}{2} \vec{\Omega} I \vec{\Omega}$$

Der Trägheitstensor ist definiert im Körperfesten System, welches den Ursprung im Schwerpunkt hat.

### Eigenschaften des Trägheitstensors

- Reell
- Symmetrisch

Daraus folgt, dass der Trägheitstensor diagonalisierbar ist. Dies entspricht einer Drehung des körperfesten Systems. Die neuen Achsen bezeichnet man als *Trägheitsachsen*. Die Eigenwerte ( $I_1, I_2, I_3$ ) werden als *Trägheitsmomente* bezeichnet.

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

Im allgemeinen

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

(z.B. unsymmetrische Kreisel), falls

$$I_1 = I_2$$

ist dies der symmetrische Kreisel. Falls

$$I_1 = I_2 = I_3$$

bezeichnet man dies auch als Kugelkreisel. Dies muss nicht unbedingt eine Kugel sein, einfachstes Beispiel ist ein Würfel.

Falls alle Massenpunkte auf Geraden sind,  $x_1 = x_2 = 0, x_3 \neq 0$  folgt

$$I_1 = I_2 = \sum_i m_i (x_3^i)^2 \quad I_3 = 0$$

Dies nennt man einen Rotator (Beispiel Hantel, 2-Atomiges Molekül).

Es gilt *zyklisch*

$$I_1 + I_2 \geq I_3$$

Falls alle  $m_i$  in der  $(x_1, x_2)$  Ebene liegen, dann folgt

$$I_1 + I_2 = I_3$$

### Satz von Steiner

Falls  $(I_2)_{jk}$  bezüglich  $O_2$  berechnet wird mit  $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}$  gilt

$$(I_2)_{jk} = I_{jk} + \mu (\delta_{jk} \vec{a}^2 - a_j a_k)$$

## 6.3 Drehimpuls

Definiere

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Sei

$O =$  Schwerpunkt des starren Körpers

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = 0 \quad \vec{r}_i \text{ bezüglich Körperfestem System } K$$

$\vec{L} \equiv$  Eigendrehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) - \sum_i \left( m_i \vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) + \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{V}) \right) \\ &= \sum_i m_i \left( \vec{r}_i^2 \vec{\Omega} - \vec{r}_i (\vec{r}_i \Omega) \right) \\ L_j &= \sum_k I_{jk} \Omega_k\end{aligned}$$

Somit gilt allgemein

$$\vec{L} = I \vec{\Omega}$$

Wenn zu einem Zeitpunkt das Koordinatensystem in Richtung der Hauptachsen zeigt, dann gilt

$$L_1 = I_1 \Omega_1 \quad L_2 = I_2 \Omega_2 \quad L_3 = I_3 \Omega_3$$

Richtung von  $\vec{L}$  und  $\vec{\Omega}$  sind im allgemeinem verschieden.

## Kräftefreie Bewegung

Dies führt zu

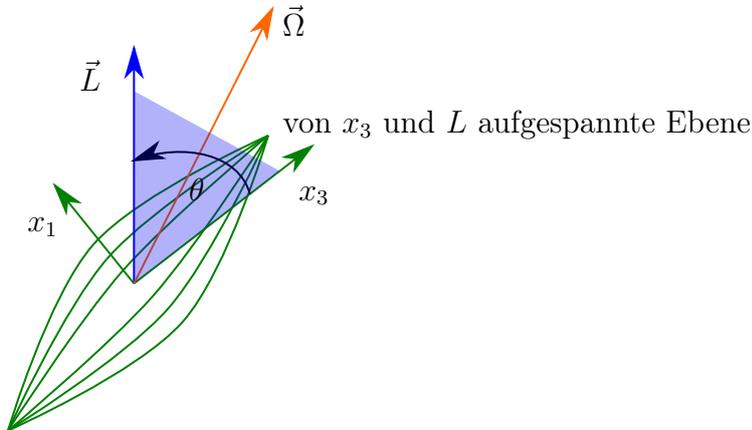
$$\vec{L} = \text{const}$$

Kugelkreisel

$$\vec{L} = I \vec{\Omega} = a \cdot \mathbb{1} \vec{\Omega} \implies \vec{L} \propto \vec{\Omega} \text{const}$$

Wobei  $a \in \mathbb{R}$ . Im Allgemeinen ist  $\vec{\Omega}$  jedoch nicht konstant

## 6.4 Symmetrische Kräftefreie Kreisel



Wähle  $x_1$  in  $\vec{L}$ - $x_3$ -Ebene und  $x_2$  senkrecht dazu.  $L_2 = 0$  zu diesem Zeitpunkt  $\implies \Omega_2 = 0$ .  
Es gilt

$$L_1 = I_1\Omega_1 \quad L_2 = I_2\Omega_2 = 0 \quad L_3 = I_3\Omega_3$$

$\vec{L}, \vec{\Omega}, \vec{e}_{x_3}$  liegen immer in einer Ebene.

Allgemein gilt

$$\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$$

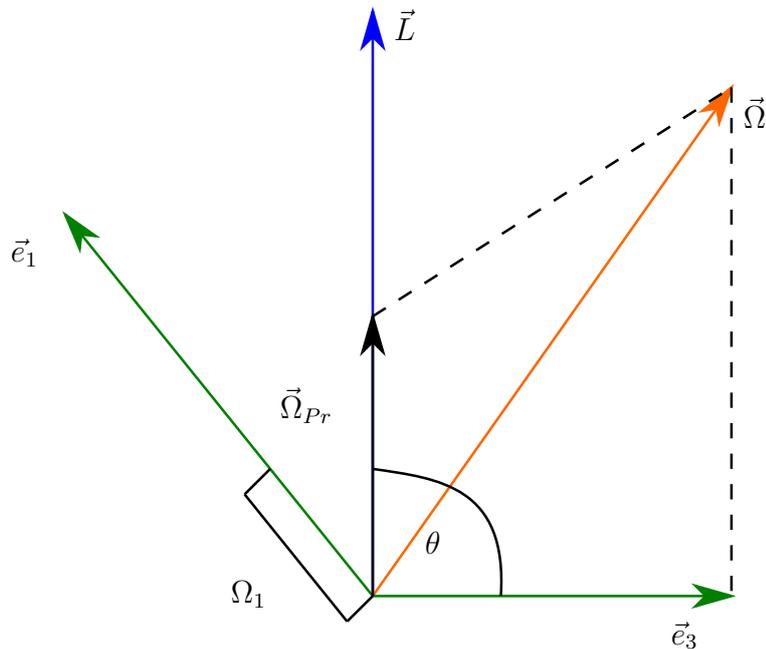
für jeden Punkt des Kreisels. Punkte auf der Symmetrieachse liegen in der von  $\vec{L}$  und  $\vec{e}_{x_3}$  aufgespannten Ebene, daraus folgt  $\vec{v} \perp$  Ebene. Daraus ergibt sich, dass die Geschwindigkeit der Punkte auf der Symmetrieachse dieselbe Richtung hat ( $\vec{\Omega} \times \vec{e}_{x_3}$ ) und ist proportional zum Abstand zum Ursprung. Die Achse rotiert um  $\vec{L}$  und der Winkel zwischen  $\vec{L}$  und  $\vec{e}_{x_3}$  bleibt erhalten: reguläre Präzession. Zusätzliche Rotation um  $x_3$ -Achse.

### Rotationsgeschwindigkeit um $\vec{e}_3$

$$I_3\Omega_3 = L_3 = |\vec{L}| \cos \theta$$

$$\Omega_3 = \frac{|\vec{L}|}{I_3} \cos \theta$$

**Präzessionsgeschwindigkeit** Zerlege  $\vec{\Omega}$  in Anteil längs  $\vec{e}_3$  und Anteil längs  $\vec{L}$



$$|\vec{\Omega}_{pr}| \sin \theta = \Omega_1 = \frac{L_1}{I_3}$$

Andererseits

$$L_1 = |\vec{L}| \sin \theta$$

$$\vec{\Omega}_{praez} = \frac{\vec{L}}{I_1}$$

## 6.5 Bewegungsgleichung des starren Körpers

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M} \equiv \text{Drehmoment}$$

mit

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$

wobei  $\vec{f}_i$  die am Ort  $\vec{r}_i$  wirkende Kraft ist.

$\vec{L}$  und  $\vec{M}$  sind bezüglich Schwerpunkt S definiert, in dessen Ruhesystem wir uns befinden.

Ferner gilt

$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{F} = 0$$

Bei Verschiebung um  $\vec{a}$  gilt

$$\vec{M} = \vec{M}_2 + \vec{a} \times \vec{F}$$

Also falls  $\vec{F} = 0$

$$\vec{M} = \vec{M}_2$$

## Eulerschen Gleichungen

Es sei  $\frac{d}{dt}\vec{A}$  die zeitliche Änderung eines Vektors im Laborsystem. Wenn  $\vec{A}$  in einem mit  $\vec{\Omega}$  rotierendem System konstant bleibt, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Wenn sich  $\vec{A}$  außerdem im rotierendem System ändert und zwar mit  $\frac{d'}{dt}\vec{A}$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{d'}{dt}\vec{A} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

Benutze dies für

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$$

$$\frac{d'}{dt}\vec{L} + \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{M}$$

Wobei  $\frac{d'}{dt}\vec{L}$  die Änderung im Körperfesten rotierendem System  $K$  ist. Drücke alle Komponenten im  $K$ -System aus, d.h.

$$\left(\frac{d'}{dt}\vec{L}\right)_j = \frac{d}{dt}L_j$$

und

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1\Omega_1 \\ I_2\Omega_2 \\ I_3\Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_2 I_3 \Omega_3 - \Omega_3 I_2 \Omega_3 \\ \Omega_3 I_1 \Omega_1 - \Omega_1 I_3 \Omega_3 \\ \Omega_1 I_2 \Omega_2 - \Omega_2 I_1 \Omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 \\ (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_2 \\ (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich

### Definition Euler-Gleichungen

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = M_1$$

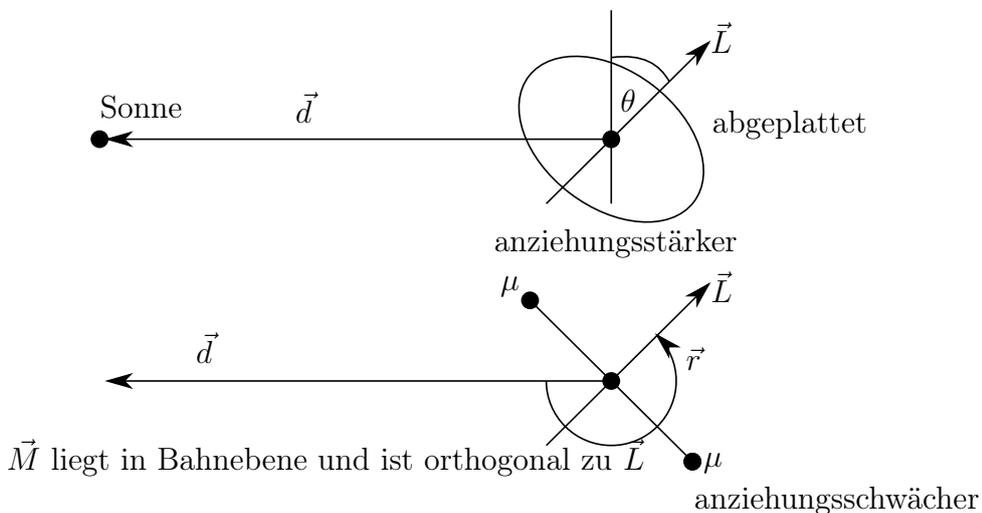
$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 = M_2$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = M_3$$

Falls  $\vec{M} = 0$  und ein symmetrischer Kreisel vorhanden ist, finden wir wieder die Präzession aber nun vom  $K$ -System her betrachtet.

Dies ist nicht Klausurrelevant

### Präzession der Erdachse



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Falls  $\vec{M} \perp \vec{L}$  gibt es keine Änderung von  $\vec{L}^2$

$$\frac{d\vec{L}^2}{dt} = 2\vec{L} \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{L}\vec{M}$$

Inertialsystem  $(x, y, z)$ , Körperfestes System  $K(x_1, x_2, x_3)$

$\vec{d}$  liegt in  $(x, y)$ -Ebene  $K$  und  $S$  haben Ursprung im Schwerpunkt der Erde. Kraft auf Massenpunkt bei  $\vec{r}$  (im K-System)

$$d\vec{f} = GM dV \varrho(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^3}$$

Da

$$|\vec{d}| \gg |\vec{r}|$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}|^3} = \frac{1}{(\vec{r} - 2\vec{r}\vec{d} + \vec{d}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{d^3} \left(1 - \frac{2\vec{r}\vec{d}}{d^2} + \frac{\vec{r}^2}{d^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{d^3} \left(1 + 3\frac{\vec{r}\vec{d}}{d^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{GM}{d^3} \int dV \varrho(\vec{r}) (-\vec{r} \times \vec{d}) \left(1 + 3\frac{\vec{r}\vec{d}}{d^2}\right) \\ &= \frac{3GM}{d^5} \int dV \varrho(\vec{r}) (\vec{d} \times \vec{r}) (\vec{r} \cdot \vec{d}) \end{aligned}$$

Die 1 im letzten Summanden fällt weg, da  $\int \varrho r dV = 0$  aufgrund der Schwerpunktdefinition.

Hier ist

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Umformung von

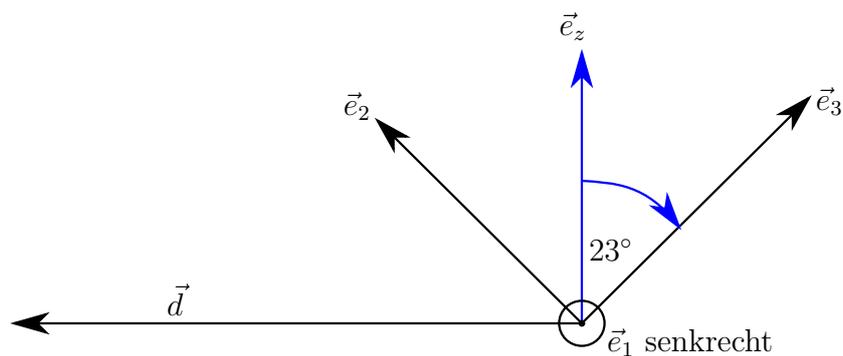
$$(\vec{d} \times \vec{r})_k (\vec{r} \cdot \vec{d}) = \varepsilon_{ijk} d_i x_j x_m d_m$$

ersetze

$$x_j x_m \rightarrow -r^2 \delta_{jm} + x_j x_m$$

Zwischenresultat

$$M_k = \frac{3GM}{d^5} (-I_{jm}) \varepsilon_{ijk} d_i d_m \quad (6.2)$$



$\vec{d}$  im Körperfesten System mit

$$\vec{d} = d \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \cos \Omega t \\ \cos \theta_0 \sin \Omega t \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in (6.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{3GM}{d^5} (-I_{jm} d_m) \varepsilon_{ijk} d_i \\ &= \vec{M} = \frac{3GM}{d^5} \begin{pmatrix} I_1 d_1 \\ I_2 d_2 \\ I_3 d_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (= 0 \iff I_1 = I_2 I_3) \\ M_1 &= \frac{3GM}{d^5} (I_2 - I_3) d_2 d_3 \\ \vec{M} &= \frac{3GM}{d^5} \begin{pmatrix} (I_2 - I_3) d_2 d_3 \\ (I_3 - I_1) d_1 d_3 \\ (I_1 - I_2) d_1 d_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$I_2 = I_1$$

und somit

$$M_3 = 0$$

Setze nun  $\vec{d}$  ein

$$\vec{M} = \frac{3GM}{d^3}(I_1 - I_3) \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \Omega t \\ -\sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos^2 \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wobei das Quadrat in der zweiten Komponente ein magisches Quadrat unbekannter Herkunft ist, das aber benötigt wird.

Der zeitliche Mittelwert ist dann

$$\langle \vec{M} \rangle = \frac{3GM}{2d^3}(I_3 - I_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Drehung liegt in Bahnebene und senkrecht auf  $\vec{e}_3 \propto \vec{L}$  Somit

$$\langle \vec{M} \rangle = \cos \theta_0 \vec{e}_3 \times \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{L}}{|\vec{L}|}$$

Damit folgt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \langle \vec{M} \rangle = \frac{3GM}{2d^3}(I_3 - I_1) \cos \theta_0 \vec{e}_3 \times \vec{e}_z = \omega \vec{L} \times \vec{e}_z$$

Wobei

$$\omega = \frac{3GM \cos \theta_0}{2d^3 L}$$

Die Bewegungsgleichung ist dann

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \omega \vec{L} \times \vec{e}_z \tag{6.3}$$

Betrachte (6.3) im System mit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \hat{=} \text{Planetenebene}$  und  $\vec{e}_3 \perp \text{Planetenebene}$ .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} L_2 \\ -L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich die drei Gleichungen

$$\frac{dL_1}{dt} = \omega L_2 \quad \frac{dL_2}{dt} = -\omega L_1 \quad \frac{dL_3}{dt} = 0$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} L_1 + \omega^2 L_1 &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} L_2 + \omega^2 L_2 &= 0 \end{aligned}$$

Somit gilt für die Lösung

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1(t=0) \cos(\omega t) \\ L_2 &= -L_1(t=0) \sin(\omega t) \\ L_3 &= \text{const} = L \cos \theta_0 \end{aligned}$$

Auswertung von  $\omega$  Erinnerung

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{GM}{d^3} \frac{I_3 - I_1}{\omega_{\text{tag}} I_1} \cos \theta_0$$

Bei einem Ellipsoid gilt

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = \frac{a - c}{a} = \frac{6378 \text{ km} - 6357 \text{ km}}{6378 \text{ km}} = 3.3 \cdot 10^{-3}$$

wobei  $a, c$  die Halbachsen sind. Nach Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} d^3$$

und

$$\begin{aligned} \cos 23^\circ &= 0.92 \\ \omega_{\text{Sonne}} &= \frac{3}{2} \frac{4\pi^2}{T_{\text{jahr}}^2} \frac{1 \text{ Tag}}{2\pi} 0.923.3 \cdot 10^{-3} = \pi \frac{0.92}{365} \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{Jahr}} \\ \nu_{\text{Sonne}} &= \frac{\omega_{\text{Sonne}}}{2\pi} = 1.26 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{Jahr}} \end{aligned}$$

Betrag des Mondes

$$M = M_{\text{Mond}} \quad M_{\text{erde}} = 81 M_{\text{Mond}}$$

$$\mu_{mond} = 2.43 \cdot 10^{-5} \frac{1}{Jahr}$$

$$\mu_{tot} = 3.7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{Jahr} \implies \mu^{-1} = 27 \cdot 10^3 \text{ Jare}$$

Messung ergibt  $25.810^3$  Jahre.



# Kapitel 7

## Anhang

### 7.1 Literaturempfehlungen

- Goldstein
- Landau-Lifschitz
- Nolting
- Fließbach
- Honerkamp und Römer