

Theoretische Mechanik

Kirill Melnikov
TTP KIT

26. Juli 2021



Inhaltsverzeichnis

1	Das Prinzip der kleinsten Wirkung	2
2	Erhaltungssätze, Noether-Theorem, Virialsatz und Ähnlichkeits- transformationen	13
3	Eindimensionale Bewegung	24
4	Dreidimensionale Bewegung	28
5	Streuung von Teilchen	38
6	Kleine Schwingungen in einer Dimension	45
7	Kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden	52
8	Anharmonische Schwingungen	62
9	Hamiltonsche Gleichungen	66
10	Kanonische Transformationen, Phasenraum, Satz von Liouville	71
11	Physik des starren Körpers	79
12	Eulerwinkel	90

1 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Wir fangen mit einer Bemerkung an: Das Ziel der Mechanik ist es, die Bewegung eines Körpers in externen Kraftfeldern zu beschreiben. Ein typisches Beispiel ist die Bewegung der Erde um die Sonne. Der Körper behält seine Form und bewegt sich als Ganzes.

Einer der Grundbegriffe der Mechanik ist der Begriff des *Massenpunktes* oder des *Teilchens*. Diese Begriffe beschreiben einen Körper, dessen Ausmaße bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigt werden können. Wann das möglich ist und wann nicht, ist von der Situation abhängig: Falls wir die Bewegung der Erde um die Sonne beschreiben wollen, ist die Erde ein Massenpunkt; falls wir hingegen die Bewegung eines Flugzeugs um die Erde beschreiben wollen, ist die Erde kein Massenpunkt mehr.

Wir können den Zustand eines Teilchens vollständig beschreiben, indem wir drei Koordinaten des Teilchens, x, y, z , oder einen Ortsvektor \vec{r} angeben.¹ Falls das Teilchen sich bewegt, sind die Koordinaten des Teilchens zeitabhängig. Unser Ziel ist es, diese Abhängigkeit zu bestimmen und die Funktion $\vec{r}(t)$ zu finden.

Die Zeitabhängigkeit von $\vec{r}(t)$ folgt aus dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (1)$$

wobei m die Masse des Teilchens ist und \vec{F} die externe, auf das Teilchen wirkende Kraft. Wenn wir diese Gleichung lösen, finden wir die zeitabhängige Bahn des Teilchens.

Mathematisch ist das zweite Newtonsche Gesetz eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das heißt, für eine vollständige Lösung (also um die Bahn des Teilchens vollständig beschreiben zu können) brauchen wir *zwei* Randbedingungen. Diese zwei Randbedingungen können wir beliebig wählen – z.B. können wir fordern, dass zum Zeitpunkt $t = t_0$ das Teilchen einen bestimmten Ortsvektor und eine bestimmte Geschwindigkeit hat

$$\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0, \quad \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\vec{r}}|_{t=t_0} = \vec{v}_0. \quad (2)$$

Alternativ können wir z.B. verlangen, dass das Teilchen zu den Zeitpunkten

¹Wir werden verschiedene Schreibweisen benutzen, um Ortsvektoren und deren Komponenten zu bezeichnen. Z.B. $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $\vec{r} = \sum_{i=1}^3 r_i \vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_{1,2,3} = \vec{e}_{x,y,z}$ und $\vec{e}_{x,y,z}$ die drei Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems sind.

$t = t_{0,1}$ zwei bestimmten Ortsvektoren hat

$$\vec{r}(t = t_0) = r_1, \quad \vec{r}(t = t_1) = r_2. \quad (3)$$

Es gibt auch verschiedene Kombinationen von Randbedingungen, die wir benutzen können.

Das zweite Newtonsche Gesetz ist im Prinzip alles, was man braucht, um die Bahn des Teilchens zu bestimmen. Wir können jetzt das zweite Newtonsche Gesetz einfach als Postulat annehmen oder wir können ein anderes Prinzip identifizieren, dessen Folge das zweite Newtonsche Gesetz ist. Die zweite Alternative ist nicht nur theoretisch interessant, sondern auch in der Praxis für die Beschreibung komplizierter mechanischer Systeme sehr hilfreich.

Um dieses Prinzip zu formulieren, stellen wir uns vor, dass für jedes mechanische System eine Funktion existiert, die uns schlussendlich die Bewegungsgleichung für dieses System gibt. Wir nennen diese Funktion die *Lagrange-funktion* L . Die Lagrangefunktion ist vom Ortsvektor und der Geschwindigkeit des Teilchens und auch von der Zeit abhängig

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (4)$$

Mit Hilfe dieser Funktion können wir die sogenannte *Wirkung* S berechnen

$$S[\vec{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t). \quad (5)$$

Die Wirkung ist eine Funktion von $t_{1,2}$ und von der gesamten Bahn des Teilchens. Eine Funktion S , die eine Funktion (z.B. $\vec{r}(t)$) auf eine Zahl abbildet, heißt *Funktional*. Man sagt, dass die Wirkung ein Funktional der Bahn des Teilchens ist.

Falls die Lagrangefunktion gegeben ist, können wir mit Hilfe der Wirkung für jede Bahn jedes mechanischen Systems eine Zahl berechnen. Es muss betont werden, dass es unendlich viele Bahnen gibt, die einen Anfangspunkt und einen Endpunkt verbinden. Es ist auch klar, dass ein mechanisches System in der Natur nur *einer* Bahn folgt. Es stellt sich nun die Frage: Wie wählt ein System die "richtige" Bahn?

Die Antwort zu dieser Frage ist durch das Prinzip der kleinsten Wirkung

gegeben. Das Prinzip lautet:

Ein mechanisches System bewegt sich so, dass der Wert der Wirkung S minimal ist.

Wie findet man das Minimum der Wirkung? Wir erinnern uns dazu zunächst an das entsprechende Vorgehen für Funktionen. Um ein Extremum x_0 einer Funktion $f(x)$ zu finden, können wir $f(x)$ mit $f(x + \delta x)$ vergleichen und einen Wert x suchen, wo der Unterschied zwischen den Werten der zwei Funktionen keine linearen Terme in δx hat. D.h. falls

$$f(x + \delta x) - f(x) \approx \mathcal{O}(\delta x^2) \Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx} = 0, \quad (6)$$

gilt, ist x ein Extremum.

Wir können genau das Gleiche mit der Wirkung S machen. D.h. wir berechnen S für zwei unterschiedliche Bahnen $\vec{r}_a(t) = \vec{r}(t)$ und $\vec{r}_b(t) = \vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)$ und versuchen so eine Bahn $\vec{r}(t)$ zu finden, für die

$$S[\vec{r}_b(t)] - S[\vec{r}_a(t)] \sim \mathcal{O}(\delta\vec{r}^2), \quad (7)$$

für beliebige $\delta\vec{r}(t)$ gilt. Es ist dabei wichtig, dass wir, wenn wir die Beiträge verschiedener Bahnen vergleichen, immer den Anfangspunkt und den Endpunkt festhalten; d.h.

$$\vec{r}_a(t_1) = \vec{r}_b(t_1) = \vec{r}_i, \quad \vec{r}_a(t_2) = \vec{r}_b(t_2) = \vec{r}_f, \quad \delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = 0. \quad (8)$$

Mathematisch bedeutet das, dass wir die Wirkung für bestimmte Randbedingungen minimieren.

Wir zeigen jetzt, wie wir die Differenz der Wirkungen berechnen können. Wir schreiben

$$\delta S = S[\vec{r}_b(t)] - S[\vec{r}_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt [L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)] \quad (9)$$

Weil $\delta\vec{r}$ und $\delta\dot{\vec{r}}$ klein sind, können wir die Lagrangefunktion in einer Taylorreihe entwickeln. Wir erhalten

$$L(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) \approx L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i. \quad (10)$$

Dann gilt

$$\delta S = \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i \right]. \quad (11)$$

Wir können den letzten Term umschreiben, sodass wir $\delta \vec{r}$ statt $\delta \dot{\vec{r}}$ bekommen. Wir integrieren partiell und erhalten

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta \dot{r}_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \frac{d \delta r_i}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \delta r_i \right\}. \quad (12)$$

Den ersten Term können wir vereinfachen

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right] = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \delta r_i \right|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (13)$$

weil $\delta \vec{r}(t_{1,2}) = 0$ ist. Wir bekommen dann für δS

$$\delta S = \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] \right\} \delta r_i. \quad (14)$$

Falls $\vec{r}(t)$ ein Minimum ist, muss $\delta S \sim \mathcal{O}(\delta \vec{r}^2)$ sein, für alle möglichen $\delta \vec{r}$. Das kann nur passieren, falls $\vec{r}(t)$ die folgende Gleichung erfüllt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

sodass der Integrand in Gl. (14) punktweise verschwindet. Gleichung (15) nennt man die *Euler-Lagrange-Gleichung*. Hier ist anzumerken, dass die Lagrangefunktion nur bis auf eine totale Zeitableitung einer Funktion von $q(t)$ und t definiert ist. D.h., dass die zwei Lagrangefunktionen $L(q, \dot{q}, t)$ und $L(q, \dot{q}, t) + df(q, t)/dt$ zu den gleichen Bewegungsgleichungen führen – oder, wie wir sagen, “die gleiche Physik beschreiben”.

Falls die Euler-Lagrange-Gleichung (15) tatsächlich die Bahn eines mechanischen Systems beschreibt, muss sie äquivalent zum zweiten Newtonschen Gesetz sein. Um diese Äquivalenz zu erreichen, müssen wir die Lagrangefunktion L als die Differenz zwischen der kinetischen Energie des Teilchens T und dessen potenzieller Energie U ausdrücken

$$L = T - U(\vec{r}), \quad (16)$$

wobei

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}. \quad (17)$$

Als nächsten Schritt leiten wir die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrangefunktion in Gl. (16) her. Wir erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\ddot{\vec{r}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad (18)$$

sodass die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \quad (19)$$

Weil die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ als $\vec{F}(\vec{r}) = -\partial U/\partial \vec{r}$ definiert ist, ist die obige Gleichung in der Tat das zweite Newtonsche Gesetz, wie angekündigt.

Obwohl die Euler-Lagrange-Gleichungen und die Newtonschen Gleichungen äquivalent sind, bietet der Lagrangeformalismus viele Vorteile. In der Tat

1. kann man fast "mechanisch" (d.h. ohne viel darüber nachzudenken) die Bewegungsgleichungen herleiten; unter anderem bekommt man alle Kräfte automatisch;
2. kann man beliebige Koordinaten wählen, um die Position eines Teilchens zu beschreiben; das ist sehr nützlich, falls die Bewegung durch Zwangsbedingungen eingeschränkt ist;
3. kann man allgemeine Bewegungscharakteristiken des Systems (z.B. sogenannte Bewegungsintegrale oder Erhaltungsgrößen – die Größen, die während der Bewegung konstant bleiben) viel einfacher erkennen.

Wir werden jetzt ein Beispiel betrachten, das die Stärken des Lagrangeformalismus sehr deutlich macht. Als ersten Schritt erweitern wir die Lagrangefunktion für den Fall, dass das mechanische System mehrere Teilchen umfasst. Wenn die Zahl der Teilchen N ist, lautet die Lagrangefunktion

$$L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m\dot{\vec{r}}_{\alpha}^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (20)$$

Bitte beachten Sie, dass wir jetzt mit \vec{r}_{α} den Ortsvektor des Teilchens α bezeichnen. Die drei Komponenten dieses Ortsvektors bezeichnen wir als $\vec{r}_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, 3$ oder $x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}$.

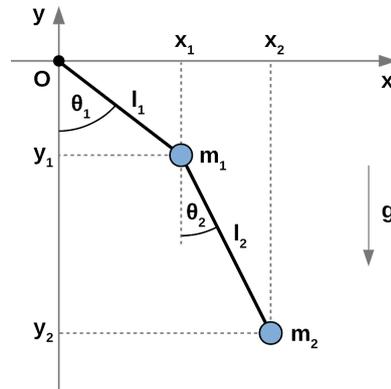


Abbildung 1: Doppelpendel im Gravitationsfeld.

Als Beispiel betrachten wir das Doppelpendel, d.h. zwei unterschiedliche Teilchen, die durch masselose Stangen verbunden sind und sich im Gravitationsfeld befinden (siehe Abb. 1). Wir wollen die Bewegungsgleichungen des Systems herleiten. Wir fangen mit der Lagrangefunktion an, die wir mit Hilfe der *kartesischen Koordinaten* schreiben. Wir erhalten

$$L = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} + \frac{m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} - U(y_1, y_2), \quad (21)$$

wobei die potentielle Energie U lautet

$$U(y_1, y_2) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \quad (22)$$

Obwohl es einfach ist, die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten zu schreiben, ist diese Form der Lagrangefunktion nicht sehr nützlich, weil die Koordinaten *nicht voneinander unabhängig* sind. Tatsächlich erhalten wir, wenn wir die Länge der Stangen $l_{1,2}$ und die Winkel zwischen der y -Achse und den Stangen $\theta_{1,2}$ einführen, folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & x_2 &= x_1 + l_2 \sin \theta_2, \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1, & y_2 &= y_1 - l_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (23)$$

Wir sehen, dass von vier Variablen nur zwei unabhängig sind. Wenn wir Euler-Lagrange-Gleichungen herleiten, müssen wir nur nach unabhängigen Variablen variieren. Das bedeutet, dass wir als ersten Schritt die Lagrangefunktion Gl. (21) durch die Variablen $\theta_{1,2}$ ausdrücken müssen. Das können wir machen, indem wir Gl. (23) nach der Zeit ableiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \\ \dot{y}_1 &= l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Wir setzen die Ergebnisse in die Lagrangefunktion Gl. (21) ein und finden

$$L = \frac{(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2}{2} + \frac{m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2}{2} + m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2. \quad (25)$$

Weil $\theta_{1,2}$ zwei unabhängige Variablen sind, können wir dann die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \quad (26)$$

sofort benutzen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= l_1^2 (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2), \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Die gleiche Herleitung kann man für den zweiten Winkel θ_2 machen.

Wir bekommen dann folgende Bewegungsgleichungen für das Doppelpendel

$$\begin{aligned} l_1^2 (m_1 + m_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2) \\ = -m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1. \end{aligned} \quad (28)$$

und

$$\begin{aligned} m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_1) \\ = m_2 l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 g l_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Wir haben in diesem Beispiel gesehen, dass, falls es Zwangsbedingungen gibt, die Zahl unabhängiger Koordinaten *kleiner* ist, als die Zahl kartesischer Koordinaten. Ganz allgemein werden wir, statt über kartesische Koordinaten zu reden, die *unabhängigen Größen*, die ein mechanisches System vollständig beschreiben, *verallgemeinerte Koordinaten* nennen und sie mit $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ bezeichnen. Solche Koordinaten bezeichnen wir als Freiheitsgrade. Die Zahl der Freiheitsgrade ist durch Zwangsbedingungen beschränkt. Oft können wir die Zwangsbedingungen als eine Gleichung ausdrücken

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0. \quad (30)$$

Zum Beispiel müssen die Koordinaten eines Teilchens, das sich auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius R bewegt, die folgende Gleichung erfüllen

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0. \quad (31)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit diesen Zwangsbedingungen umzugehen: Entweder eliminieren wir die abhängigen Koordinaten aus der Lagrangefunktion (wie wir dies für das Doppelpendel gemacht haben) oder wir benutzen sogenannte Lagrangemultiplikatoren und ändern die Lagrangefunktion

$$L \rightarrow L' = L + \lambda f(q_1, \dots, q_N, t). \quad (32)$$

Der Parameter λ heißt der Lagrangemultiplikator und muss wie eine neue Koordinate behandelt werden.

Die Idee hinter die Erweiterung der Lagrangefunktion wie in Gl. (32) ist folgendes. Stellen wir uns vor, dass die Funktion $f(q_1, \dots, q_N)$ eine Oberfläche in N -dimensionalen Raum beschreibt, auf der das Teilchen sich bewegen kann. Weil das Teilchen sich unter Zwang bewegt, gibt es eine Zwangskraft, die senkrecht zur Oberfläche steht. Die Richtung der Zwangskraft finden wir, indem wir die totale Ableitung der Funktion f berechnen und zu Null setzen

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i = 0. \quad (33)$$

Der Vektor $d\vec{q} = (dq_1, dq_2, \dots, dq_N)$ beschreibt die Bewegung auf der Oberfläche und der Vektor $\vec{\partial}f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_N f)$ steht, Gl. (33) zufolge, orthogonal zu $d\vec{q}$. Das bedeutet, dass die Zwangskraft \vec{N} proportional zu $\vec{\partial}f$ ist

$$\vec{N} = \lambda \vec{\partial}f. \quad (34)$$

Diese Kraft muss auf der rechten Seite der Euler-Lagrange-Gleichungen auftreten, zusammen mit den externen Kräften. Genau das erreichen wir mit der Modifizierung der Lagrangefunktion wie in Gl. (32). Falls wir den Parameter λ als neue Koordinate betrachten, dann bekommen wir auch die Zwangsbedingung $f = 0$ automatisch.

Wir gehen zurück zur Gl. (32) und berechnen die neuen Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L'}{\partial \lambda}. \quad (35)$$

Weil die Lagrangefunktion L' von $\dot{\lambda}$ unabhängig ist, erhalten wir aus der letzten Gleichung die Zwangsbedingung,

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N, t) = 0. \quad (36)$$

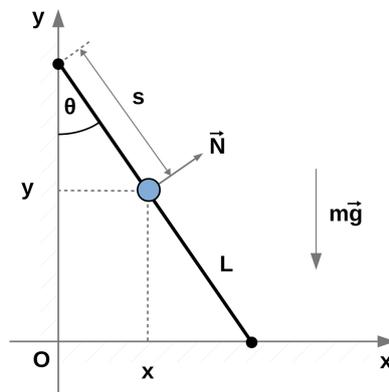


Abbildung 2: Ein Teilchen an einer Stange im Gravitationsfeld.

Aus den Gleichungen für q_i erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}. \quad (37)$$

Wir müssen jetzt die Gln. (36,37) lösen und alle q_i und λ bestimmen. Dadurch finden wir die Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Wir betrachten jetzt ein Beispiel, bei dem wir verschiedene Methoden benutzen werden, um die Bewegung eines Teilchens zu beschreiben. Das Teilchen befindet sich an einer Stange im Gravitationsfeld, siehe Abb. 2. Der Winkel zwischen der Stange und der y -Achse ist mit θ bezeichnet. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy. \quad (38)$$

Um die Zwangsbedingung aufzuschreiben, führen wir die Koordinate s ein, welche die Entfernung entlang der Stange parametrisiert. Die kartesischen Koordinaten des Teilchens lauten

$$x = s \sin \theta, \quad y = L \cos \theta - s \cos \theta. \quad (39)$$

Wir eliminieren s und bekommen eine Zwangsbedingung für die Koordinaten des Teilchens

$$y \sin \theta + x \cos \theta - L \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (40)$$

Die neue Lagrangefunktion sieht dann folgendermaßen aus

$$L' = L + \lambda (y \sin \theta + x \cos \theta - L \sin \theta \cos \theta), \quad (41)$$

sodass die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \cos \theta, \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \sin \theta, \\ y \sin \theta + x \cos \theta - L \sin \theta \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, leiten wir die letzte Gleichung zweimal nach der Zeit ab und erhalten

$$\ddot{y} \sin \theta + \ddot{x} \cos \theta = 0. \quad (43)$$

Wir addieren dann die zwei ersten Gleichungen in Gl. (42) mit den Gewichten $\cos \theta$ und $\sin \theta$ und bekommen

$$\begin{aligned} 0 &= m(\cos \theta \ddot{x} + \sin \theta \ddot{y}) = \cos \theta m\ddot{x} + \sin \theta m\ddot{y} \\ &= \lambda \cos^2 \theta - mg \sin \theta + \lambda \sin^2 \theta = \lambda - mg \sin \theta. \end{aligned} \quad (44)$$

Es folgt

$$\lambda = mg \sin \theta. \quad (45)$$

Wir erhalten die Bewegungsgleichungen für x und y aus Gl. (42)

$$m\ddot{x} = mg \cos \theta \sin \theta, \quad m\ddot{y} = -mg + mg \sin^2 \theta = -mg \cos^2 \theta. \quad (46)$$

Diese Gleichungen können wir ohne weitere Probleme lösen. Zum Beispiel, falls das Teilchen sich bei $t = 0$ bei $x = 0$ in Ruhe befindet, finden wir

$$x = \frac{g \cos \theta \sin \theta t^2}{2}, \quad y = L \cos \theta - \frac{g \cos^2 \theta t^2}{2}. \quad (47)$$

Wir beschreiben jetzt ein andere Möglichkeit, das gleiche Problem zu lösen. Wir können, statt die Lagrangemultiplikatoren einzuführen, unsere Variable s als allgemeine Koordinate benutzen. Die Verbindung zwischen x, y und s finden wir in Gl. (39). Es folgt die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m\dot{s}^2}{2} - mg(L \cos \theta - s \cos \theta), \quad (48)$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung

$$m\ddot{s} = mg \cos \theta. \quad (49)$$

Falls das Teilchen bei $t = 0$ sich am höchsten Punkt der Stange befindet, lautet die Lösung

$$s = \frac{g \cos \theta t^2}{2}. \quad (50)$$

Wir benutzen jetzt diese Lösung, um $x(t)$ und $y(t)$ aufzuschreiben und erhalten die gleichen Ergebnisse, die bereits in Gl. (47) zu sehen sind.

Letztendlich wollen wir die Lösung auch mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetz herleiten. Um die Bewegungsgleichungen aufzuschreiben, brauchen wir die Kräfte. Es gibt die Gravitationskraft $F = -mg\vec{e}_y$ und die Zwangskraft, die senkrecht zur Stange wirkt. D.h.

$$\vec{N} = N \sin \theta \vec{e}_y + N \cos \theta \vec{e}_x. \quad (51)$$

Die Komponente der Gravitationskraft, die senkrecht zur Stange steht, lautet $-mg \sin \theta$, sodass

$$N = mg \sin \theta. \quad (52)$$

Wir erhalten dann die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta \cos \theta, \quad m\ddot{y} = -mg + mg \sin \theta^2. \quad (53)$$

Wenn wir diese Gleichungen mit Gl. (42,45) vergleichen, sehen wir, dass die Terme $\lambda \partial f / \partial q_i$ in der Tat die Zwangskräfte beschreiben.

Hierzu gibt es noch eine Bemerkung: Es gibt Zwangsbedingungen, die von der Geschwindigkeit abhängig sind. In diesem Fall kann man die Lagrange multiplikatoren nicht verwenden; man muss dann die Zwangsbedingungen explizit eliminieren und die Lagrange funktion durch unabhängige Koordinaten schreiben.

2 Erhaltungssätze, Noether-Theorem, Virialsatz und Ähnlichkeitstransformationen

In der Mechanik ist es unser Ziel, die Zustände mechanischer Systeme für gegebene Randbedingungen als Funktion der Zeit zu beschreiben. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen für alle unabhängigen Koordinaten lösen. Es kann einfacher sein, solche Lösungen zu finden, falls wir wissen, dass bestimmte Kombinationen von Koordinaten und Geschwindigkeiten zeitunabhängig sind

$$I = F(q_1(t), \dot{q}_1(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_N(t), t), \quad \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1)$$

Solche Konstanten nennt man *Bewegungsintegrale* oder *Erhaltungsgrößen*.

Um ein Beispiel zu zeigen, betrachten wir ein System, dessen Lagrange-funktion L explizit zeitunabhängig ist, $L = L(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots)$. Wir betrachten L für die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen und berechnen die *totale* Zeitableitung

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right). \quad (2)$$

Weil L explizit zeitunabhängig ist, verschwindet die Zeitableitung $\partial L / \partial t = 0$ und, weil $q_i(t)$ die Lösungen der Bewegungsgleichungen sind, haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3)$$

Mit Hilfe von Gl. (3), schreiben wir Gl. (2) um

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \quad (4)$$

Wenn wir dann eine Funktion $E(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\})$ definieren

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L, \quad (5)$$

bedeutet Gl. (4), dass E eine Erhaltungsgröße ist

$$\frac{d}{dt} E(\{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}) = 0. \quad (6)$$

Es ist einfach zu sehen, dass für $L = m\dot{\vec{r}}^2/2 - U(\vec{r})$,

$$E = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} + U(\vec{r}) = T + U. \quad (7)$$

Offensichtlich ist die Erhaltungsgröße E die Energie des mechanischen Systems.

Es ist wichtig, die Existenz der Erhaltungsgrößen mit den Eigenschaften der Lagrangefunktion zu verbinden. Diese Verbindung ergibt sich durch das *Noether-Theorem*. Um das Noether-Theorem zu erklären, betrachten wir ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden, welches wir mit Hilfe der Lagrangefunktion $L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ beschreiben. Mit der Lagrangefunktion können wir natürlich die Wirkung berechnen

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q_i\}, \{dq_i/dt\}, t). \quad (8)$$

Wir können aber die verallgemeinerten Koordinaten und sogar die Zeit anders wählen; d.h. statt q_i und t , können wir q'_i und t' benutzen um unser System zu beschreiben. Nehmen wir an, dass die Transformation so aussieht

$$q_i = f_i(\{q'_i\}, t'), \quad t = f_t(\{q'_i\}, t'). \quad (9)$$

Die Funktionen $f_{i,t}$ an dieser Stelle sind ganz beliebig.

Wir können die Wirkung in den neuen Koordinaten ausdrücken; wir erhalten

$$S = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L'(\{q'_i\}, \{dq'_i/dt'\}, t'). \quad (10)$$

Gl. (10) definiert uns die neue Lagrangefunktion.

Normalerweise, wenn man andere Koordinaten wählt, unterscheiden sich L' und L und man kann nicht viel mit dem Variablenwechsel anfangen – man hat lediglich andere Variablen gewählt. Es gibt aber Situation, wo nach der Variablentransformation $L' = L$ gilt. In solchen Fällen es ist möglich, zeitunabhängige Kombinationen der Koordinaten und Geschwindigkeiten direkt aus der Lagrangefunktion abzuleiten.

Normalerweise ist es schwierig, mit exakten Variablentransformationen zu arbeiten. Wir können daher diejenigen Transformationen betrachten, die sich von Identitätstransformationen nur wenig unterscheiden. Um dies zu realisieren, nutzen wir, dass eine Variablentransformation normalerweise von einem

Parameter abhängt. Wenn dieser Parameter klein ist, reden wir von einer *infinitesimalen* Transformation. Wenn wir eine solche Transformation anwenden, müssen wir konsistent bis zu einer bestimmten Ordnung in der Entwicklung in diesem kleinen Parameter arbeiten.

Dementsprechend schreiben wir die infinitesimale Version der Transformation Gl. (9) als

$$q'_i = q_i + \epsilon \Psi_i(\{q_j\}, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad t' = t + \epsilon X(\{q_j\}, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (11)$$

Die Größe $\epsilon \ll 1$ parametrisiert die Größe der Transformation; für $\epsilon = 0$ erhalten wir die Identitätstransformation. Wir werden nun bis zur ersten Ordnung in der Entwicklung in ϵ arbeiten.

Wir nehmen an, dass die Transformation Gl. (11) die Lagrangefunktion invariant lässt. Dann gilt

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q_i\}, \{dq_i/dt\}, t) = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'_i\}, \{dq'_i/dt'\}, t') + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (12)$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Zeitunabhängigkeit der Größe

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} [\Psi_i - X \dot{q}_i] + LX \quad (13)$$

aus Gl. (12) folgt. Um das zu erreichen, drücken wir

$$S' = \int dt' L(q', dq'/dt', t') \quad (14)$$

durch q und t aus und nutzen dann die Gleichheit von S' und S .

Wir beginnen zunächst mit der Berechnung verschiedener Bausteine

$$\begin{aligned} dt' &= dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right), \\ \frac{dq'_i}{dt'} &= \frac{1}{1 + \epsilon \frac{dX}{dt}} \frac{d(q_i + \epsilon \Psi_i)}{dt} = \dot{q}_i + \epsilon \left[\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Wir benutzen diese Ausdrücke, um die Lagrangefunktion zu entwickeln. Wir erhalten

$$\begin{aligned} L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') &\approx L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \epsilon X \frac{\partial L}{\partial t} \\ &+ \epsilon \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left[\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right] \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Wir setzen dieses Ergebnis in den Ausdruck für die Wirkung ein und erhalten (wir vernachlässigen alle $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ Beiträge)

$$\begin{aligned}
S' &= \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 + \epsilon \frac{dX}{dt} \right) L(\{q'\}, \{dq'/dt'\}, t') \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) + \epsilon \left(\frac{dX}{dt} L + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right) \right] \right) \right\} \\
&= S + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d(XL)}{dt} - X \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} X + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Psi_i}{dt} - \frac{dX}{dt} \dot{q}_i \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Wir können die letzte Gleichung vereinfachen, indem wir die totale Zeitableitung explizit ausdrücken

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \tag{18}$$

Wir schreiben dann

$$\begin{aligned}
0 = S' - S &= \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d(XL)}{dt} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} - X \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - X \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{dX}{dt} \right) \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Bis zum diesen Punkt haben wir keine Annahmen über die Zeitabhängigkeit von $q_i(t)$ gemacht; jetzt werden wir $q_i(t)$ als echte Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen betrachten. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{20}$$

sodass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q_i} \Psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} &= \Psi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Psi_i \right), \\
X \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + X \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{dX}{dt} & \\
= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i X + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{dX}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i X \right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Mit Hilfe von Gl. (21) schreiben wir Gl. (19) um als

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dI(t)}{dt}, \quad (22)$$

wobei

$$I(t) = LX + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\Psi_i - X \dot{q}_i) \quad (23)$$

ist. Es folgt aus Gl. (22), dass

$$0 = I(t_1) - I(t_2), \quad (24)$$

sodass $I(t)$ in Gl. (23) zeitunabhängig ist. Dies ist die Aussage des Noether-Theorems.

Als nächsten Schritt werden wir verschiedene Beispiele diskutieren.

1. Wir kehren zu unserem Beispiel zurück, in dem die Lagrangefunktion *explizit* zeitunabhängig ist, d.h. $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\})$. Diese Lagrangefunktion ist invariant unter der Transformation

$$q'_i = q_i, \quad t' = t + \tau, \quad (25)$$

wobei τ eine beliebige Konstante ist. In der Tat gilt $dt' = dt$, sodass $\dot{q}_i = dq_i/dt = dq_i/dt' = dq'_i/dt'$. Das bedeutet, dass

$$L = L(\{q_i\}, \dot{q}_i) = L(\{q'_i\}, dq'_i/dt'), \quad dt' = dt, \quad (26)$$

und wir können somit das Noether-Theorem anwenden.

Die Transformation in Gl. (25) ist exakt. Wir müssen die infinitesimale Version dieser Transformation finden und mit Gl. (11) vergleichen. Es ist offensichtlich, dass $\Psi_i = 0$ ist und, falls wir τ in Gl. (25) als klein betrachten und mit ϵ identifizieren, finden wir, dass $X = 1$ ist. Die Erhaltungsgröße ist dann

$$I = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i, \quad (27)$$

und das ist (minus) die Energie E , wie aus dem Vergleich mit Gl. (5) folgt.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir die Situation, in der die Lagrange-funktion von einer Koordinate unabhängig ist. Bezeichnen wir diese Koordinate mit q_1 , sodass

$$L = L(q_2, q_3, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_N, t), \quad (28)$$

bleibt die Lagrange-funktion invariant unter der Transformation

$$q'_1 = q_1 + \epsilon, \quad q'_{i \neq 1} = q_i, \quad t' = t. \quad (29)$$

Das bedeutet

$$\Psi_1 = 1, \quad \Psi_{i \neq 1} = 0, \quad X = 0. \quad (30)$$

Wir finden dann die Erhaltungsgröße

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \quad (31)$$

sodass in diesem Fall der kanonische Impuls $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1$ zeitunabhängig ist. Man bezeichnet die Koordinate, von der die Lagrange-funktion un-abhängig ist, auch als *zyklische* Koordinate.

3. Als Nächstes betrachten wir geschlossene mechanische Systeme.² Die Lagrange-funktion lautet

$$L = \sum_{\alpha}^N \frac{m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2}{2} - \sum_{\alpha, \beta} U(\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}). \quad (32)$$

Weil die potentielle Energie nur von $\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}$ abhängt, bleibt die Lagran-ge-funktion invariant, wenn wir *alle* Ortsvektoren um einen konstanten Vektor $\vec{\epsilon}$ verschieben

$$\vec{r}'_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} + \vec{\epsilon}. \quad (33)$$

Beachten Sie, dass wir diese Transformation mit einem Vektor $\vec{\epsilon}$ para-metrisiert haben; d.h. Gl. (33) beschreibt *drei* unterschiedliche Trans-formation (d.h. einmal verschieben wir die x-Koordinaten aller Teilchen, einmal die y-Koordinaten usw.). Dementsprechend ist auch Ψ ein Ein-heitsvektor

$$\vec{\Psi}_{\alpha} = \vec{1}, \quad (34)$$

²Unter einem "geschlossenen mechanischen System" versteht man ein mechanisches Sys-tem mit vielen Teilchen, die nur miteinander wechselwirken, aber frei von externen Kräften sind.

sodass die Erhaltungsgrößen lauten

$$\vec{I} = \sum_{\alpha}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_{\alpha}} = \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}. \quad (35)$$

Diese Erhaltungsgröße ist der Gesamtimpuls des Systems \vec{P}_{tot} . Die Folge dieses Ergebnis ist, dass sich der Schwerpunkt des geschlossenen Systems \vec{R} mit konstanter Geschwindigkeit \vec{V} bewegt. In der Tat gilt

$$\vec{R} = \frac{\sum m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\sum m_{\alpha}} \Rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}}{\sum m_{\alpha}} = \frac{\vec{P}_{\text{tot}}}{M_{\text{tot}}} = \text{const.} \quad (36)$$

4. Als letztes Beispiel betrachten wir die Lagrangefunktion, welche die Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld beschreibt

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(|\vec{r}|). \quad (37)$$

Die potentielle Energie in Gl. (37) hängt nur vom Betrag des Ortsvektors ab und deswegen ist die Lagrangefunktion invariant unter Drehungen. Die Variablentransformation, welche infinitesimale Drehungen um die Achse \vec{n} um den kleinen Winkel ϵ beschreibt, lautet

$$\vec{r}' = \vec{r} + \epsilon[\vec{n} \times \vec{r}] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (38)$$

Eine Drehung ist dadurch definiert, dass der Betrag eines Vektors invariant bleibt. Um daher zu beweisen, dass Gl. (38) eine Drehung darstellt, berechnen wir \vec{r}'^2 und vergleichen das Ergebnis mit \vec{r}^2 . Wir finden

$$\vec{r}'^2 = \vec{r}^2 + 2\epsilon[\vec{n} \times \vec{r}] \cdot \vec{r} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \vec{r}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (39)$$

Weil $\vec{r}'^2 = \vec{r}^2$ ist, stellt Gl. (38) in der Tat eine Drehung dar.

Die Transformation der Geschwindigkeit erhalten wir, indem wir Gl. (38) nach der Zeit ableiten. Wir erhalten

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \epsilon[\vec{n} \times \dot{\vec{r}}], \quad (40)$$

sodass

$$\dot{\vec{r}}'^2 = \dot{\vec{r}}^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (41)$$

Wir schreiben $[\vec{n} \times \vec{r}]_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k$, wobei ϵ_{ijk} der Levi-Civita-Tensor ist, und finden Ψ_i

$$\Psi_i = \epsilon_{ijk} n_j r_k. \quad (42)$$

Wir erhalten für die Erhaltungsgröße

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \psi_i = \vec{n} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}], \quad (43)$$

wobei $\vec{p} = m\vec{\dot{r}}$ der Impuls ist. Weil die Drehachse \vec{n} beliebig ist, können wir Gl. (43) als die Erhaltung eines *Vektors* interpretieren. Dieser Vektor

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] \quad (44)$$

ist gerade der Drehimpuls des Teilchens, das von unserer Lagrangefunktion Gl. (37) beschrieben wird.

Es gibt eine Reihe von Transformationen, unter denen die Lagrangefunktion sich ändert, aber auf bekannte Weise. In solchen Fällen können wir keine Erhaltungsgrößen mit den Transformationen identifizieren, aber es ist möglich, nützliche Informationen über mechanische Systeme gewinnen. Ein Beispiel ist das sogenannte *Virialtheorem*. Es geht dabei um Folgendes: Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens in einem Potential, das eine homogene Funktion ist

$$U(\lambda\vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r}). \quad (45)$$

Um zum Analogon des Noether-Theorems zu kommen, betrachten wir folgende Transformationen

$$\vec{r}' = \lambda\vec{r}, \quad t' = \beta t. \quad (46)$$

Die Lagrangefunktion transformiert sich folgendermaßen

$$L' = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}'}{dt'} \right)^2 - U(\vec{r}') = \frac{\lambda^2 m}{\beta^2} \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \lambda^n U(\vec{r}). \quad (47)$$

Wenn wir β als $\beta = \lambda^{1-n/2}$ wählen, erhalten wir

$$L(\vec{r}', d\vec{r}'/dt') = \lambda^n L(\vec{r}, d\vec{r}/dt). \quad (48)$$

Wir konstruieren die Wirkung und erhalten

$$\int dt' L(\vec{r}', d\vec{r}'/dt') = \lambda^{1-n/2} \lambda^n \int dt L(\vec{r}, d\vec{r}/dt) = \lambda^{1+n/2} \int dt L(\vec{r}, d\vec{r}/dt). \quad (49)$$

Wir betrachten jetzt die infinitesimale Transformation $\lambda = 1 + \epsilon$ und benutzen die obige Gleichung, um einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Beiträgen zu finden. Wir haben

$$\vec{r}' = (1 + \epsilon)\vec{r}, \quad t' = (1 + (1 - n/2)\epsilon)t, \quad (50)$$

sodass

$$\Psi_i = r_i, \quad X = (1 - n/2)t, \quad (51)$$

sind.

Wir fangen mit Gl. (49) an und wiederholen die Schritte, die zum Beweis des Noether-Theorems geführt haben. Wir müssen nur aufpassen, da wir im Vergleich zum Noether-Theorem, wegen des Faktors $\lambda^{1+n/2}$ auf der rechten Seite von Gl. (49), einen zusätzlichen Term erhalten. Wir bekommen

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left(1 + \frac{n}{2}\right) L + \frac{d}{dt} [EX - m\dot{r}_i \Psi_i] \right), \quad (52)$$

und mit Hilfe von Gl. (51) schreiben wir diese Gleichung um

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\left(1 + \frac{n}{2}\right) L + \frac{d}{dt} [E(1 - n/2)t - m\dot{r}_i r_i] \right). \quad (53)$$

Um diese Größe zu interpretieren, ist es nützlich das Konzept des Mittelwerts einer Funktion zu nutzen. Der Mittelwert einer Funktion $f(t)$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, T]$ lautet

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t). \quad (54)$$

Dieser Mittelwert gibt uns eine grobe Idee über die Funktion $f(t)$.

Gl. (53) erlaubt uns, die Verhältnisse zwischen den Mittelwerten verschiedener Größen zu finden

$$0 = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \langle L \rangle_T + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \langle E \rangle_T - \left\langle \frac{d}{dt} m\dot{r} \cdot \vec{r} \right\rangle_T. \quad (55)$$

Den letzten Term in Gl. (55) können wir vereinfachen. Wir schreiben

$$\left\langle \frac{d}{dt} m\dot{r} \cdot \vec{r} \right\rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} m\dot{r} \cdot \vec{r} dt = \frac{1}{T} (m\dot{r}(T) \cdot \vec{r}(T) - m\dot{r}(0) \cdot \vec{r}(0)). \quad (56)$$

Betrachten wir jetzt den Limes $T \rightarrow \infty$. Falls die Bewegung unseres Systems in einem *endlichen räumlichen Bereich* mit endlichen Geschwindigkeiten stattfindet, können wir an Hand von Gl. (56) feststellen, dass

$$\left\langle \frac{d}{dt} m\dot{r} \cdot \vec{r} \right\rangle_\infty = 0. \quad (57)$$

Dieses Ergebnis erlaubt uns, im Limit $T \rightarrow \infty$, den dritten Term in Gl. (55) zu vernachlässigen. Wir erhalten dann

$$0 = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \langle L \rangle_\infty + \left(1 - \frac{n}{2}\right) \langle E \rangle_\infty. \quad (58)$$

Wir schreiben die Lagrangefunktion und die Energie als $L = T_k - U$ und $E = T_k + U$, wobei T_k die kinetische und U die potentielle Energie sind und erhalten

$$\langle T_k \rangle_\infty = \frac{n}{2} \langle U \rangle_\infty. \quad (59)$$

Diese Gleichung, als das *Virialtheorem* bekannt, beschreibt den Zusammenhang zwischen den Mittelwerten der kinetischen und der potentiellen Energien im Falle endlicher Bewegung eines Teilchens.

Wir können auch andere interessante Erkenntnisse über die Bewegungseigenschaften mechanischer Systeme mit homogener potentieller Energie gewinnen. Wir betrachten ein mechanisches System mit potentieller Energie $U(\vec{r})$, die homogen ist

$$U(\lambda \vec{r}) = \lambda^n U(\vec{r}). \quad (60)$$

Wie wir schon wissen, erhalten wir, falls wir die Variablentransformationen $\vec{r}' = \lambda \vec{r}$ und $t' = \beta t$, mit $\beta = \lambda^{1-n/2}$ durchführen,

$$L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}') = \lambda^n L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (61)$$

Falls zwei Lagrangefunktionen proportional zueinander sind, sind die zugehörigen Bewegungsgleichungen identisch. Das bedeutet, dass falls $\vec{r}'(t')$ die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist, muss

$$\vec{r}(t) = \lambda^{-1} \vec{r}'(\beta t) \quad (62)$$

ebenfalls eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen sein.

Wir können das direkt überprüfen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} &= \frac{m}{\lambda} \frac{d^2 \vec{r}'(\beta t)}{dt^2} = \frac{m \beta^2}{\lambda} \frac{d^2 \vec{r}'(t')}{dt'^2} = -\frac{\beta^2}{\lambda} \frac{\partial U(\vec{r}')}{\partial \vec{r}'} \\ &= -\frac{\beta^2}{\lambda} \frac{\partial U(\lambda \vec{r})}{\partial \lambda \vec{r}} = -\frac{\beta^2 \lambda^n}{\lambda^2} \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}, \end{aligned} \quad (63)$$

weil $\beta = \lambda^{1-n/2}$ ist.

Es folgt aus Gl. (62), dass sich, wenn wir eine Lösung $\vec{r}'(t')$ haben, aus dieser Lösung eine weitere Lösung $\lambda^{-1} \vec{r}'(\beta t)$ konstruieren lässt. Wir können

diese Ähnlichkeitsbedingungen dazu verwenden, um grobe Eigenschaften verschiedener Lösungen mit einander zu verknüpfen. Um das zu sehen, stellen wir uns vor, dass wir zwei Bahnen mit den Abmessungen $L_{1,2}$ und den Umlaufzeiten $T_{1,2}$ betrachten. Es folgt aus der vorigen Diskussion, dass falls sich die Abmessungen um einen Faktor λ unterscheiden, sich die Umlaufzeiten um einen Faktor β unterscheiden müssen. Dann

$$\frac{L_1}{L_2} = \lambda, \quad \frac{T_1}{T_2} = \beta = \lambda^{1-n/2}. \quad (64)$$

Weil λ und β abhängig sind, bedeutet das, dass es ein Verhältnis zwischen den Abmessungen und den Umlaufzeiten *im Falle homogener potentieller Energien* gibt. Wir finden

$$\left(\frac{L_1}{L_2}\right)^{1-n/2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (65)$$

Als Beispiel können wir ein Pendel betrachten. In diesem Fall ist die potentielle Energie $U = k\vec{r}^2/2$, sodass $n = 2$ ist. In diesem Fall ist die Abmessung der Bahn die Amplitude der Schwingungen. Es folgt aus Gl. (65), dass

$$\frac{T_2}{T_1} = 1, \quad (66)$$

und das heißt, dass für ein Pendel die Umlaufzeit unabhängig von der Amplitude der Schwingungen ist.

Ein anderes Beispiel ist das dritte Keplersche Gesetz, das die Größe der Orbits von Planeten R und deren Umlaufzeiten miteinander verbindet. Dabei ist die potentielle Energie $U(r) = GmM/r$, sodass $n = -1$ ist. Es folgt

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3/2}. \quad (67)$$

3 Eindimensionale Bewegung

Wir betrachten jetzt die eindimensionale Bewegung eines Teilchen m in einem zeitunabhängigen Potential $U(x)$. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \quad (1)$$

Wir können für die Lagrangefunktion L die Euler-Lagrange-Gleichung aufstellen und dann versuchen, sie zu lösen. Das ist in der Tat möglich, aber für eindimensionale Bewegungen gibt es einen besseren Weg.

Der Schlüssel ist die Zeitunabhängigkeit der Lagrangefunktion und die Energieerhaltung. Die Energie lautet

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x). \quad (2)$$

Wir können die Geschwindigkeit des Teilchens durch Gl. (2) ausdrücken und erhalten

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}. \quad (3)$$

Dann können wir diese Gleichung integrieren

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (4)$$

Welches Vorzeichen man wählt, ist von den Randbedingungen abhängig. Generell beschreibt Gl. (4) die Zeitabhängigkeit der Bahn implizit. Die Integrationskonstanten sind so gewählt, dass $x(t_0)$ gleich x_0 ist.

Wenn wir das Integral in Gl. (4) berechnen und $x(t)$ als Funktion von t ausdrücken, haben wir eine explizite Lösung gefunden. Wenn dies nicht möglich ist, können wir immernoch das eindimensionale Integral numerisch berechnen oder quantitativ analysieren.

Für den letzten Zweck ist es hilfreich, die potentielle Energie $U(x)$ und die Gesamtenergie E in einem Diagramm zu zeichnen. Weil die kinetische Energie immer positiv ist, kann sich das Teilchen nur dort bewegen, wo $E > U(x)$ ist.

Es gibt dann verschiedene Möglichkeiten. Nehmen wir zum Beispiel an, dass die potentielle Energie ein Maximum hat, $U(x) < U_{\max}$. Dann kann sich das Teilchen, falls $E > U_{\max}$ ist, überall zwischen $x = \pm\infty$ bewegen. Diese Situation ist in Abb. 3 für $E = E_1$ dargestellt.

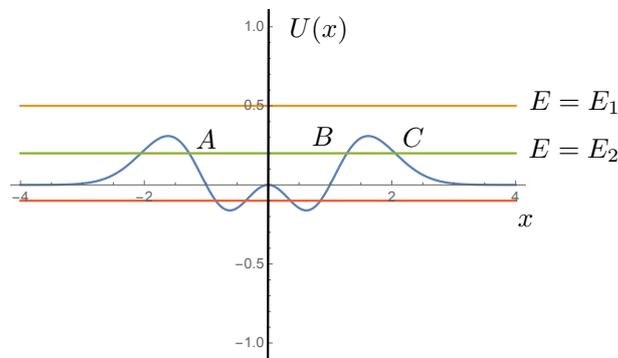


Abbildung 3: Die eindimensionale Bewegung im zeitunabhängigen Potential.

Für $E = E_2$ in Abb. 3 sieht man eine andere Situation mit verschiedenen Möglichkeiten. Falls sich das Teilchen beispielsweise zwischen Punkt C und $x = \infty$ befindet, dann bleibt es in diesem Intervall und kann nicht links von Punkt C gelangen. Falls sich das Teilchen andererseits zwischen A und B findet, dann pendelt es zwischen den Punkten A und B hin und her. In diesem Fall können wir die Umlaufzeit berechnen

$$T = \sqrt{2m} \int_{x=x_A}^{x=x_B} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (5)$$

Diese zwei Punkte, x_A und x_B , wo sich die Bewegung des Teilchens umkehrt, können wir mit Hilfe der Gleichung

$$E = U(x_{A,B}) \quad (6)$$

finden. Dies sind die Punkte, an denen die kinetische Energie und dementsprechend die Geschwindigkeit des Teilchens Null ist.

Als Beispiel betrachten wir ein Teilchen mit der Masse m im Gravitationsfeld. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz. \quad (7)$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich das Teilchen auf der Höhe $z = h$ in Ruhe. Wir wollen nun herausfinden, was danach passiert. Wir schreiben

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{z(t)}^h \frac{dz}{\sqrt{E - mgz}}. \quad (8)$$

Weil für gegebene Randbedingungen das Teilchen nach unten fliegt, haben wir das Vorzeichen in Gl. (8) so gewählt, dass beide Seiten dieser Gleichung für $z(t) < h$ positiv sind.

Die Energie E können wir mit Hilfe der Randbedingungen so ausdrücken

$$E = mgh. \quad (9)$$

Schließlich berechnen wir das Integral in Gl. (8) und erhalten

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{-2}{\sqrt{mg}} \right) \sqrt{h-z} \Big|_{z=z(t)}^{z=h} = \sqrt{\frac{2}{g}} \sqrt{h-z(t)}. \quad (10)$$

Es folgt das bekannten Ergebnis

$$z(t) = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (11)$$

Als zweites Beispiel berechnen wir die Umlaufzeit für ein Pendel. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (12)$$

Die Lagrangefunktion ist zeitunabhängig. Deswegen ist wieder die Energie E erhalten. Wir schreiben

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (13)$$

Die Umlaufzeit ist dann

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_A(E)}^{x_B(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}}. \quad (14)$$

Um die zwei Umkehrpunkte zu finden, lösen wir die Gleichung

$$E = U(x_{A,B}) = \frac{m\omega^2 x_{A,B}^2}{2}, \quad (15)$$

und finden

$$x_{A,B} = x_0 = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}. \quad (16)$$

Dann schreiben wir

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2m} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}} = \sqrt{\frac{2m}{E}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}} \\ &= (x \rightarrow x_0 \xi) = \sqrt{\frac{2m}{E}} x_0 \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ &= (\xi \rightarrow \cos \phi) = \frac{2}{\omega} \int_0^\pi d\phi = \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned} \tag{17}$$

D.h. wir erhalten für die Umlaufzeit

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{18}$$

die damit E -unabhängig ist, wie wir in der vorigen Vorlesung diskutiert haben.

4 Dreidimensionale Bewegung

1. Zwei-Körper-Problem. Wir betrachten zwei Körper, die miteinander wechselwirken. Die Wechselwirkung ist vom Abstand zwischen den Körpern abhängig. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (1)$$

Wir können die Euler-Lagrange-Gleichungen für \vec{r}_1 und \vec{r}_2 aufstellen und versuchen sie zu lösen. Dass ist möglich, aber nicht effektiv. Ein besserer Weg ist es, andere Koordinaten zu wählen, weil die potentielle Energie nur von der Differenz von \vec{r}_1 und \vec{r}_2 abhängt.

Dementsprechend nehmen wir $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ als eine neue Koordinate. Als zweite neue Koordinate nehmen wir den Ortsvektor des Schwerpunktes des Systems \vec{R} . Dann gilt

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (2)$$

Wir drücken $\vec{r}_{1,2}$ durch \vec{r} und \vec{R} aus und erhalten

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (3)$$

Es bleibt nur, die Lagrangefunktion Gl. (1) durch \vec{R} und \vec{r} auszudrücken. Wir erhalten

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 + 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 \right) \\ &\quad + \frac{m_2}{2} \left(\dot{\vec{R}}^2 - 2\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \dot{\vec{r}}^2 \right) - U(\vec{r}) \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}). \end{aligned} \quad (4)$$

Wir schreiben diese Lagrangefunktion als

$$L = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \quad (5)$$

wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse und $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse des Systems sind.

Es ist offensichtlich, dass die Lagrangefunktion in Gl. (5) in zwei unabhängige Lagrangefunktionen aufgespalten werden kann. Diese Lagrangefunktion beschreibt ein freies Teilchen mit der Masse M (die Bewegung des Schwerpunktes) und die Bewegung eines Teilchens mit der Masse μ im Potential $U(\vec{r})$. Die Bewegung des Schwerpunktes lautet

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t, \quad (6)$$

wobei \vec{R}_0 und \vec{V}_0 der Ortsvektor an $t = 0$ und die (konstante) Geschwindigkeit sind. Um $\vec{r}(t)$ zu bestimmen, müssen wir die Bewegung eines Teilchens im Potential $U(\vec{r})$ untersuchen.

2. Bewegung im Zentralfeld. Wir betrachten jetzt die Bewegung eines Teilchens im *Zentralfeld* $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|) = U(r)$. Wir haben in der zweiten Vorlesung diskutiert, dass in diesem Fall der Drehimpuls $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ erhalten ist. Wir wollen diesen Fakt nutzen, um die Berechnung zu vereinfachen.

Aus der Zeitunabhängigkeit von \vec{M} folgt, dass die Bewegung *in einer Ebene stattfindet*, da in jedem Moment $\vec{r} \cdot \vec{M} = 0$ und $\vec{p} \cdot \vec{M} = 0$ gilt. Falls wir die z -Achse entlang des Vektors \vec{M} wählen, findet die Bewegung in der $(x - y)$ -Ebene statt.

Die Lagrangefunktion des Teilchens mit der Masse m im Zentralfeld lautet

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r). \quad (7)$$

Um die Bewegung in der $(x - y)$ -Ebene zu beschreiben, führen wir Polarkoordinaten ein

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (8)$$

und erhalten

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} - U(r). \quad (9)$$

Wir sehen, dass die Lagrangefunktion Gl. (9) zeit- und φ -unabhängig ist. Das bedeutet, dass die Energie

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r), \quad (10)$$

und der Drehimpuls

$$M = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad (11)$$

erhalten sind.

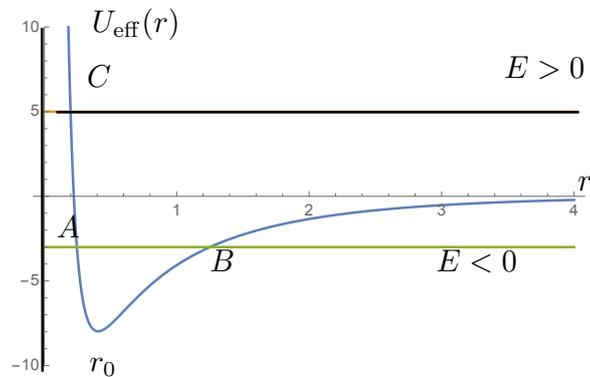


Abbildung 4: Die eindimensionale Bewegung im Zentralfeld.

Wir benutzen Gl. (11), um $\dot{\varphi}$ durch M auszudrücken und erhalten

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}. \quad (12)$$

Wir ersetzen $\dot{\varphi}$ mit diesem Ausdruck in Gl. (10) und erhalten die neue Formel für die Energie

$$E = \frac{mr^2}{2} + U_{\text{eff}}(r), \quad (13)$$

wobei

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (14)$$

ist.

Wir sehen, dass die Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld zu einer eindimensionalen Bewegung im Potential $U_{\text{eff}}(r)$ reduziert werden kann; wie man mit eindimensionalen Problemen umgeht, haben wir in der vorherigen Vorlesung diskutiert. Dementsprechend schreiben wir die Formel, die uns implizit die Trajektorie des Teilchens liefert

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r(t)} \frac{d\bar{r}}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(\bar{r})}}. \quad (15)$$

Wie sich ein Teilchen im Zentralfeld bewegt, können wir quantitativ mit Hilfe von $U_{\text{eff}}(r)$ analysieren. Falls $U(r) = 0$ ist, ist $U_{\text{eff}}(r) > 0$ für alle r und unendlich bei $r = 0$. Das bedeutet, dass sich das Teilchen immer zwischen $r = r_{\text{min}}$ und $r = \infty$ bewegt und es keine räumlich beschränkte Bewegung gibt.

Falls $U(r) < 0$ ist, gibt es mehrere Möglichkeiten, siehe Abb. 4. Angenommen das Potential verhalte sich asymptotisch wie

$$U(r)|_{r \rightarrow 0} \sim -\alpha r^{-n}. \quad (16)$$

Falls $n < 2$ ist, dann kann das Teilchen das Kraftzentrum nicht erreichen und falls $n \geq 2$ ist, kann das Teilchen bis zum Kraftzentrum fallen. Es kann auch passieren, dass das effektive Potential ein Minimum hat ($r = r_0$ in Abb. 4). In diesem Fall kann eine endliche Bewegung stattfinden (das Teilchen kann zwischen den Punkten A und B in der Skizze pendeln). Falls die Energie E gleich U_{eff} ist, ist die Trajektorie ein Kreis mit dem Radius $r = r_0$.

Die Bewegung eines Teilchens in der Ebene beschreiben wir mit einer Trajektorie $r = r(\varphi)$. Wir können diese Trajektorie bestimmen, indem wir erst die Bewegungsgleichungen lösen, $r(t)$ und $\varphi(t)$ finden und dann $r(t)$ als eine Funktion von $\varphi(t)$ ausdrücken. Wir können aber auch die Abhängigkeit $r(t)$ von $\varphi(t)$ finden, ohne zuerst die Lösungen der Bewegungsgleichungen zu konstruieren.

Betrachten wir dazu die zwei Differentialgleichungen

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}, \quad (17)$$

die wir aus den Definitionen der Energie und des Drehimpulses erhalten, und drücken dr durch $d\varphi$ aus. Wir erhalten

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mr^2}{M} \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad (18)$$

Es folgt

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(\bar{r})}}. \quad (19)$$

Für eine endliche Bewegung können wir ausrechnen, um wie viel sich φ während eines Umlaufs zwischen den zwei Umkehrpunkten r_A und r_B ändert; wir erhalten

$$\Delta\varphi = \frac{2M}{\sqrt{2m}} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\bar{r}^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \quad (20)$$

wobei $r_{A,B}$ aus folgender Gleichung folgen

$$E = U_{\text{eff}}(r_{A,B}). \quad (21)$$

Eine endliche Trajektorie kann entweder geschlossen oder offen sein. Eine Trajektorie ist geschlossen, falls

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{n_1}{n_2}, \quad (22)$$

wobei n_1 und n_2 ganze Zahlen sind. Falls die Trajektorie offen ist, dann wird ein Teilchen nach unendlicher Zeit jeden Punkt auf der $(r - \varphi)$ -Ebene mit $r_A \leq r \leq r_B$ mindestens einmal besuchen; für eine geschlossene Trajektorie ist das nicht der Fall. Es gibt nur zwei Potentiale, $U(r) = -\alpha/r$ und $U(r) = kr^2$, in denen *alle* endlichen Trajektorien geschlossen sind.

3. Kepler-Problem. Unter dem Kepler-Problem versteht man die Beschreibung der Bewegung im Potential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (23)$$

Dieses Potential beschreibt die Gravitationswechselwirkung zwischen Planeten, die elektrische Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen usw. Die Kopplungskonstante α kann entweder positiv (anziehende Kraft) oder negativ (abstoßende Kraft) sein.

Wir fangen mit einer positiven Kopplungskonstante α an. In diesem Fall besitzt das effektive Potential ein Minimum

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}, \quad \left. \frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \Rightarrow r_0 = \frac{M^2}{m\alpha}. \quad (24)$$

Der minimale Wert der effektiven Energie ist

$$U_{\text{eff}}(r_0) = U_{\text{min}} = -\frac{\alpha}{2r_0} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \quad (25)$$

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Energie des Teilchen gleich der minimalen effektiven Energie ist, $E = U_{\text{min}}$. In diesem Fall ist $r(t) = r_0$ und die Trajektorie ist ein Kreis. Die Umlaufzeit können wir ausrechnen, indem wir den Zusammenhang zwischen $\dot{\varphi}$ und M betrachten

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr_0^2} = \frac{m\alpha^2}{M^3}. \quad (26)$$

Das bedeutet, dass das Teilchen sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit bewegt; die Umlaufzeit ist dann

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi mr_0^2}{M} = \frac{2\pi M^3}{m\alpha^2} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}, \quad (27)$$

wobei wir das Verhältnis zwischen $E = U_{\min}$ und M benutzt haben.

Als nächstes betrachten wir den Fall $U_{\min} < E < 0$. Das Teilchen dreht sich um das Kraftzentrum und pendelt zwischen zwei Radiuswerten $r_{A,B}$. Um die Trajektorie zu bestimmen, müssen wir in Gl. (19) das Integral ausrechnen. Als ersten Schritt schreiben wir $E - U_{\text{eff}}(r)$ um

$$\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r)) = \frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{M^2}{m^2 r^2} = \frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M}\right)^2. \quad (28)$$

Es ist einfach zu sehen, dass

$$\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} = \frac{2E}{m} - \frac{2U_{\min}}{m} = \frac{2}{m}(E - U_{\min}) > 0. \quad (29)$$

Wir wollen das Integral ausrechnen

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{m} \int_{\bar{r}}^r \frac{d\bar{r}}{\bar{r}^2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{m\bar{r}} - \frac{\alpha}{M}\right)^2}}. \quad (30)$$

Es ist nun hilfreich, zwei Variablentransformationen zu machen. Als erstes führen wir die neue Variable ξ ein,

$$\xi = \frac{1}{\bar{r}}, \quad (31)$$

und erhalten dann

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M}{m} \int_{1/r} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m} - \left(\frac{M}{m}\xi - \frac{\alpha}{M}\right)^2}}. \quad (32)$$

Dann machen wir die zweite Variablentransformation, indem wir statt ξ eine weitere Variable θ einführen

$$\xi = \frac{m}{M} \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \cos \theta + \frac{\alpha}{M} \right). \quad (33)$$

Wenn wir die Variablentransformation in Gl. (32) durchführen, bekommen wir

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{\theta_0} d\theta = \theta_0, \quad (34)$$

wobei

$$\theta_0 = \arccos \left[\left(\frac{M}{mr} - \frac{\alpha}{M} \right) / \sqrt{\frac{\alpha^2}{M^2} + \frac{2E}{m}} \right]. \quad (35)$$

Wir können jetzt den Radius r durch den Winkel φ ausdrücken (wir setzen $\varphi_0 \rightarrow 0$ ein) und erhalten

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (36)$$

wobei der Parameter p und die Exzentrizität e durch

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad (37)$$

gegeben sind. Wir sehen, dass $e < 1$ ist, weil die Energie E für endliche Bewegung negativ ist.

Die Trajektorie in Gl. (36) ist offensichtlich geschlossen und, geometrisch gesehen, eine Ellipse. Um das explizit zu machen, erkennen wir, dass $r \cos \varphi = x$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, wobei x und y kartesische Koordinaten sind. Es folgt aus Gl. (36)

$$r + e r \cos \varphi = p \Rightarrow r + ex = p \Rightarrow r = p - ex \Rightarrow (x^2 + y^2) = (p - ex)^2. \quad (38)$$

Wir können die letzte Gleichung umschreiben und die Formel einer Ellipse erreichen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (39)$$

wobei

$$x_0 = -\frac{ep}{1 - e^2}, \quad a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (40)$$

Es ist klar, dass Trajektorien mit kleinen e -Werten wie ein Kreis aussehen und Trajektorien mit e -Werten in der Nähe von $e = 1$ entlang der x -Achse gestreckt sind.

Wir können jetzt die Umlaufzeit um das Kraftzentrum berechnen. Wir benutzen dazu den Zusammenhang zwischen M und $d\varphi/dt$

$$M = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (41)$$

und schreiben

$$dt = \frac{mr^2 d\varphi}{M} = \frac{mp^2 d\varphi}{M(1 + e \cos \varphi)^2}. \quad (42)$$

Die Umlaufzeit T ist dann

$$T = \frac{p^2 m}{M} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}. \quad (43)$$

Um dieses Integral auszurechnen, führen wir eine Hilfsvariable a ein und schreiben

$$T = \frac{p^2 m}{M} (-1) \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\partial I(a)}{\partial a}, \quad (44)$$

wobei

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + e \cos \varphi} \quad (45)$$

ist.

Weil wir über alle Werte von φ integrieren, ist es offensichtlich, dass

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + e \cos \varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a - e \cos \varphi}. \quad (46)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{1}{a + e \cos \varphi} + \frac{1}{a - e \cos \varphi} \right] \\ &= a \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi} = 4a \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \quad (47)$$

Wir machen dann eine Variablentransformation $\varphi \rightarrow \xi$, wobei

$$\xi = \tan \varphi, \quad (48)$$

sodass

$$d\varphi = \cos^2 \varphi d\xi, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \xi^2}. \quad (49)$$

Die Integrationsgrenzen sind

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \xi < \infty. \quad (50)$$

Wir erhalten dann

$$I = 4a \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{a^2 - e^2 + a^2 \xi^2} \stackrel{\xi = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{a} \mu}{=} \frac{4}{\sqrt{a^2 - e^2}} \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{1 + \mu^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - e^2}}. \quad (51)$$

Wir leiten $I(a)$ nach a ab, setzen $a = 1$ ein und erhalten die Umlaufzeit

$$T = \frac{p^2 m}{M} (-1) \left. \frac{\partial I(a)}{\partial a} \right|_{a=1} = \frac{2\pi p^2 m}{M(1-e^2)^{3/2}} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (52)$$

Das Teilchen, das sich im Potential $U(r) = -\alpha/r$ bewegt, kann auch positive Energie haben. In diesem Fall ist die Bewegung unbeschränkt (das Teilchen kommt aus dem Unendlichen und verschwindet auch wieder ins Unendliche). Fast alle Formeln, die wir vorher hergeleitet haben bleiben gültig, aber weil $E > 0$ ist, ist auch $e > 1$. D.h., dass die Trajektorie

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (53)$$

eine *Hyperbel* ist. Außerdem bedeutet das, dass der Winkel des Teilchens φ nur zwischen $\varphi_0 = \arccos(-e^{-1})$ und $2\pi - \varphi_0$ definiert ist

$$\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0. \quad (54)$$

Bei $\varphi = \varphi_0$ oder $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ ist Betrag des Ortsvektors r unendlich.

Im Fall einer abstoßenden Kraft sind alle Bahnen unbeschränkt. Die Trajektorien sind Hyperbeln

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \varphi}. \quad (55)$$

Die Ausdrücke für p und e stimmen mit den vorherigen Ausdrücken überein.

4. Runge-Lenz-Vektor. Für ein Teilchen, das sich im Potential $U(r) = -\alpha/r$ bewegt, gibt es eine *zusätzliche Erhaltungsgröße*. Es ist möglich, aber nicht gerade leicht, diese Erhaltungsgröße mit dem Noether-Theorem zu verbinden. Die Erhaltungsgröße heißt Runge-Lenz-Vektor und lautet

$$\vec{A} = [\vec{p} \times \vec{M}] - m\alpha \frac{\vec{r}}{r}. \quad (56)$$

Wir wollen beweisen, dass der Vektor \vec{A} in der Tat erhalten (zeitunabhängig) ist. Um das zu demonstrieren, berechnen wir die Zeitableitung und zeigen, dass sie verschwindet. Die Ableitung lautet

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = [\dot{\vec{p}} \times \vec{M}] - \frac{m\alpha \dot{\vec{r}}}{r} + \frac{m\alpha \vec{r}}{r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (57)$$

Wir benutzen dann

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}, \\ \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} U(\vec{r}) = -\frac{\alpha \vec{r}}{r^3}, \end{aligned} \quad (58)$$

und berechnen

$$\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{M} \right] = -\frac{\alpha}{r^3} [\vec{r} \times [\vec{r} \times \vec{p}]] = -\frac{\alpha}{r^3} (\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}r^2). \quad (59)$$

Wir setzen diese Ergebnisse in Gl. (57) ein und finden dass $d\vec{A}/dt = 0$ ist.

Jede Erhaltungsgröße hilft uns, die Bewegungsgleichungen zu lösen. Das gilt auch für den Runge-Lenz-Vektor, den wir verwenden können, um die Trajektorie des Teilchens im Zentralfeld $U(r) = -\alpha/r$ zu bestimmen. Dazu multiplizieren wir den Vektor \vec{A} mit dem Ortsvektor des Teilchens \vec{r}

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = Ar \cos \varphi, \quad (60)$$

falls wir die x-Achse entlang des Vektors \vec{A} wählen. Andererseits gilt

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = \vec{r} \cdot \left([\vec{p} \times \vec{M}] - \frac{\alpha m \vec{r}}{r} \right) = \vec{M}^2 - \alpha m r. \quad (61)$$

Daraus folgt die Trajektorie

$$r = \frac{M^2}{\alpha m \left(1 + \frac{A}{\alpha m} \cos \varphi \right)}. \quad (62)$$

Wir vergleichen diesen Ausdruck mit Gl. (37) und finden, dass $e = A/(\alpha m)$ ist.

5 Streuung von Teilchen

Die Streuung von Teilchen ist eine wichtige indirekte Methode, um physikalische Systeme zu untersuchen, die wir anders gar nicht erreichen können. Streuexperimente funktionieren folgendermaßen: wir schicken ein Teilchen mit gegebenem Impuls von $|\vec{r}| = \infty$ in die Richtung des Kraftzentrums. Das Teilchen wechselwirkt mit dem Kraftzentrum und, falls es genug Energie hat oder falls die Wechselwirkung abstoßend ist, fliegt es ins Unendliche zurück. Wir studieren das Verhältnis zwischen dem sogenannten Stoßparameter und dem Streuwinkel und versuchen aus diesem Verhältnis Erkenntnisse über das Kraftfeld zu gewinnen.

Wir werden uns hier nur mit Zentralkräften beschäftigen. In diesem Fall sind die Energie und der Drehimpuls erhalten. Die Werte der Energie und des Drehimpulses können wir also an einem beliebigen Punkt der Bahn, insbesondere bei $|\vec{r}| = \infty$, ausrechnen. Dort haben wir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U(r) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Für unser Teilchen bedeutet das, dass das Teilchen bei $\vec{r} = \infty$ nur kinetische Energie hat. Falls wir die Geschwindigkeit des Teilchens bei $|\vec{r}| = \infty$ mit v_∞ bezeichnen, lautet die Energie

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}. \quad (2)$$

Wir parametrisieren den Ortsvektor \vec{r} als

$$\vec{r} = z\vec{e}_z + \vec{\rho}, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{\rho} = 0. \quad (3)$$

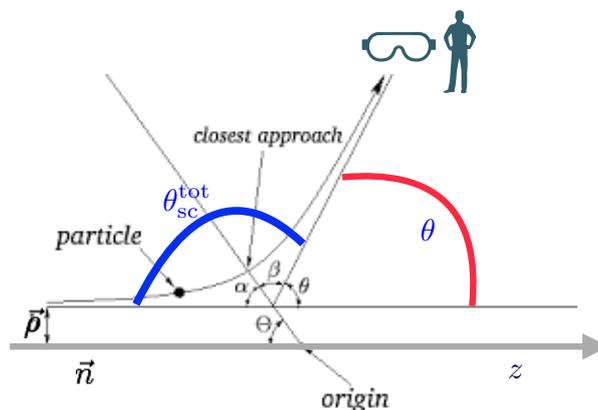


Abbildung 5: Skizze zum Streuexperiment.

und definieren $\vec{r} = \infty$ als $z \rightarrow \infty$. Die Geschwindigkeit bei $\vec{r} = \infty$ ist parallel zur z -Achse $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{e}_z$.

Wir berechnen dann den Drehimpuls. Weil dieser eine Erhaltungsgröße ist, können wir den bei $\vec{r} = \infty$ ausgerechneten Drehimpuls während des gesamten Stoßprozesses verwenden. Wir erhalten

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m [(z\vec{e}_z + \vec{\rho}) \times \vec{v}_\infty] = m [\vec{\rho} \times \vec{v}_\infty], \quad (4)$$

sodass

$$M = |\vec{M}| = mv_\infty \rho. \quad (5)$$

Der Streuwinkel θ_{sc} (siehe Abb. 5) ist abhängig von r

$$\theta_{sc}(r) = \frac{M}{m} \int_r^\infty \frac{d\vec{r}}{\vec{r}^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{eff}(\vec{r}))}}. \quad (6)$$

Der minimale Wert von r ist r_{min} und den vollen Streuwinkel schreiben wir als

$$\theta = \pi - 2\theta_{sc}(r_{min}) = \pi - 2\rho \int_{r_{min}}^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}}. \quad (7)$$

Diese Gleichung erlaubt es uns, die Abhängigkeit des Streuwinkels vom Stoßparameter ρ zu bestimmen.

Wir stellen uns nun vor, dass wir einen Strahl von Teilchen mit der Energie E aus dem Unendlichen zum Kraftzentrum schicken. Die Dichte der Teilchen in dem Strahl ist n . Die Zahl der Teilchen, die durch die Fläche $2\pi\rho d\rho$ pro Zeiteinheit fliegen ist

$$dN = 2\pi\rho d\rho n v_\infty. \quad (8)$$

Diese Teilchen werden um den Winkel $\theta(\rho)$ gestreut. Der Teilchenstrom J ist $J = n v_\infty$. Der Wirkungsquerschnitt ist dann das Verhältnis zwischen der Zahl gestreuter Teilchen und dem Teilchenstrom der einfallenden Teilchen

$$d\sigma = \frac{dN}{J} = 2\pi\rho(\theta) d\rho(\theta). \quad (9)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat also die Dimension einer Fläche. Er kann so interpretiert werden, dass dem Streuprozess eine fiktive Fläche zugeordnet wird, die gerade so groß ist, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes punktförmiges Teilchen diese fiktive Fläche trifft, der Wahrscheinlichkeit entspricht mit der das Teilchen gestreut wird. Diese Fläche muss nicht mit

dem geometrischen Querschnitt des Streuzentrums übereinstimmen, wie wir im Folgenden sehen werden.

Der Wirkungsquerschnitt ist eine Funktion des Streuwinkels. Wir schreiben

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta. \quad (10)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten wir, indem wir $d\sigma$ über alle möglichen Streurichtungen, also über θ von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, integrieren

$$\sigma = \int_0^\pi d\theta \frac{d\sigma}{d\theta}. \quad (11)$$

Als Beispiel betrachten wir die Streuung an einer harten, unendlich schweren Kugel mit dem Radius R . Die entsprechende potentielle Energie lautet

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ \infty, & r < R. \end{cases} \quad (12)$$

In diesem Fall ist der minimale Abstand zwischen Mittelpunkt der Kugel und dem Teilchen $r_{\min} = R$. Wir verwenden dann Gl. (7) und erhalten

$$\theta = \pi - 2\rho \int_R^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} \quad (13)$$

Es ist offensichtlich, dass eine Streuung nur für $\rho < R$ stattfindet.

Wir führen eine Variablentransformation ein, $r \rightarrow \xi$, wobei

$$r = \frac{\rho}{\xi} \quad (14)$$

und erhalten

$$\theta = \pi - 2 \int_0^{\rho/R} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (15)$$

Wir substituieren $\xi = \sin \varphi$ und finden nach der Integration

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \left(\frac{\rho}{R} \right). \quad (16)$$

Im hier betrachteten Fall der Streuung an der harten, unendlich schweren Kugel entspricht dies gerade der geometrischen Situation, dass das einfallende

Teilchen, entsprechend seinem Stoßparameter ρ , an der Oberfläche der Kugel gemäß "Einfallswinkel = Ausfallswinkel" gestreut wird.

Wir schreiben Gl. (16) um als

$$\rho = R \cos \frac{\theta}{2}. \quad (17)$$

Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, brauchen wir die Ableitung $|d\rho/d\theta|$. Wir erhalten

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{R \sin \theta/2}{2}. \quad (18)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{2\pi\rho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|. \quad (19)$$

Wir erhalten

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \frac{2\pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin \theta} = \frac{\pi R^2}{2}. \quad (20)$$

Somit lautet der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int_{-1}^1 d \cos \theta \frac{d\sigma}{d \cos \theta} = \pi R^2. \quad (21)$$

Hier stimmt also der totale Wirkungsquerschnitt mit dem geometrischen Querschnitt der Kugel überein.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Streuung am Potential $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ (die sogenannte Rutherford-Streuung). Die Formel für den Streuwinkel lautet

$$\theta = \pi - 2\rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv^2 r}}}, \quad (22)$$

wobei $v = v_{\infty}$ ist. In der obigen Formel können wir r_{\min} bestimmen, indem wir die Nullstellen der Wurzel im Nenner finden.

Wir schreiben

$$1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv^2 r} = 1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2} - \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv^2 \rho} \right)^2, \quad (23)$$

führen eine Variablentransformation $r \rightarrow \xi$ ein

$$\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv^2 \rho} = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}} \sin \xi, \quad (24)$$

und erhalten

$$1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2} - \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{m v^2 \rho} \right)^2 = \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2} \right) (1 - \sin^2 \xi). \quad (25)$$

Der Punkt r_{\min} entspricht $\xi = \pi/2$ und $r = \infty$ entspricht

$$\xi|_{r=\infty} = \xi_0 = \arcsin \frac{\frac{\alpha}{m v^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}}}. \quad (26)$$

Wir führen diese Variablentransformation in Gl. (22) aus und erhalten

$$\theta = \pi - 2 \int_{\xi_0}^{\pi/2} d\xi = 2\xi_0 = 2 \arcsin \frac{\frac{\alpha}{m v^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}}}. \quad (27)$$

Diese Gleichung formen wir zu

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\alpha}{m v^2 \rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2 v^4 \rho^2}}} \quad (28)$$

um und drücken ρ als Funktion von θ aus. Wir erhalten

$$\rho = \frac{\alpha}{m v^2 \tan \frac{\theta}{2}}. \quad (29)$$

Das ist der gesuchte Zusammenhang zwischen dem Streuparameter ρ und dem Streuwinkel θ .

Um den Wirkungsquerschnitt zu berechnen, brauchen wir die Ableitung von ρ nach θ ; sie lautet

$$\left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{\alpha}{m v^2} \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (30)$$

Wir sind letztendlich in der Lage, den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Wir erhalten

$$\frac{d\sigma}{d \cos \theta} = 2\pi \rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d \cos \theta} \right| = \frac{2\pi \rho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = 2\pi \left(\frac{\alpha}{2m v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (31)$$

Im Prinzip sollten wir den totalen Wirkungsquerschnitt erhalten, indem wir $d\sigma/d \cos \theta$ über $\cos \theta$ integrieren. Es ist aber einfach zu sehen, dass das

Integral unendlich ist. Das Problem entsteht durch die Integration über den Bereich kleiner Winkel. Bei $\theta \ll 1$ gilt

$$\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}, \quad d \cos \theta = \sin \theta d\theta \approx \theta d\theta, \quad \frac{d\sigma}{d \cos \theta} \approx \frac{d\sigma}{\theta d\theta} \approx \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{32\pi}{\theta^4}. \quad (32)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann in der Tat unendlich

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \approx \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{32\pi}{\theta^3} d\theta = \infty. \quad (33)$$

Wir haben zwei Beispiele gesehen – im ersten Beispiel war der totale Wirkungsquerschnitt endlich und im zweiten Beispiel unendlich. Wir haben auch gesehen, dass der Wirkungsquerschnitt für Rutherford-Streuung wegen der Kleinwinkelstreuung unendlich ist. Kleinwinkelstreuung findet bei großem Streuparameter statt, wo die Wechselwirkung schwach ist und die Bewegung des Teilchens nur wenig beeinflussen kann.

Um das besser zu verstehen, betrachten wir den Limes kleiner Kraft oder, äquivalent, den Limes sehr hoher Energie. Falls das Teilchen entlang der z -Achse fliegt und in der x -Richtung in der $(x-z)$ -Ebene gestreut wird, finden wir den Streuwinkel als

$$\sin \theta = \frac{p_x}{p'_z}. \quad (34)$$

Weil die Kraft klein ist, ist es auch der Streuwinkel; deswegen

$$\sin \theta \approx \theta \ll 1, \quad p_x \ll p'_z, \quad p'_z \approx mv. \quad (35)$$

Wir können dann p_x ausrechnen, indem wir die Bewegungsgleichung

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x(x(t), z(t)) \quad (36)$$

über die Zeit integrieren. Wir erhalten

$$p_x = \int_{-\infty}^{\infty} dt F_x(x(t), z(t)). \quad (37)$$

In diesem Integral wollen wir für $x(t)$ und $z(t)$ die ungestörte Trajektorie einsetzen, d.h. $x(t) = \rho$ und $z(t) = vt$.

Die Kraft berechnen wir, indem wir das Potential nach x ableiten

$$F_x = -\frac{\partial U(r)}{\partial x} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{x}{r}. \quad (38)$$

Dann erhalten wir

$$\theta = \frac{p_x}{mv} = -\frac{\rho}{mv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r} \left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=\sqrt{v^2 t^2 + \rho^2}} \quad (39)$$

Das Integral ist symmetrisch in t , sodass wir stattdessen von $t = 0$ bis $t = \infty$ integrieren und mit einem Faktor 2 multiplizieren. Wir machen dann eine Variablentransformation $t \rightarrow r = \sqrt{v^2 t^2 + \rho^2}$, sodass

$$dt = \frac{r dr}{v \sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (40)$$

und erhalten

$$\theta = -\frac{2\rho}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \frac{dU(r)}{dr}. \quad (41)$$

Mit dieser Formel können wir die Kleinwinkelstreuung analysieren. Wir nehmen an, dass sich das Potential asymptotisch bei $r \rightarrow \infty$ wie eine Potenz von r verhält

$$U(r) \approx \frac{\alpha}{r^n}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Die Abhängigkeit des Streuwinkels von ρ können wir mit Hilfe von Gl. (41) ausrechnen

$$\theta = \frac{2\rho\alpha n}{mv^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{r^{n+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}} \stackrel{r=\rho\xi}{=} \frac{2\alpha n}{mv^2 \rho^n} \int_1^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{n+1} \sqrt{\xi^2 - 1}} \approx \rho^{-n}. \quad (43)$$

D.h.

$$\rho \sim \theta^{-1/n}, \quad (44)$$

sodass der differentielle Wirkungsquerschnitt lautet

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \sim \frac{1}{\theta^{1+2/n}}. \quad (45)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist dann

$$\int_0^{\infty} \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \approx \int_0^{\infty} \frac{d\theta}{\theta^{1+2/n}} = \infty. \quad (46)$$

Das bedeutet, dass in der klassischen Mechanik die totalen Wirkungsquerschnitte für *alle Potentiale* unendlich sind, außer für solche, die eine endliche Reichweite haben.

6 Kleine Schwingungen in einer Dimension

1. Freie Schwingungen: Eine sehr wichtige Art von Bewegungen sind kleine Schwingungen. Der Grund dafür ist, dass diese Bewegungsart immer wieder in sehr vielen physikalischen Systemen auftritt, die sich in der Nähe von Gleichgewichten befinden. Daher stellen kleine Schwingungen eine *universelle Art* von Bewegungen dar, die von den Eigenschaften des konkreten Systems fast unabhängig sind.

Um diese Aussagen zu illustrieren, betrachten wir eine Lagrangefunktion

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \quad (1)$$

Das Potential $U(x)$ ist beliebig; das Einzige, was wir brauchen ist, dass $U(x)$ ein Minimum hat. Nehmen wir an, dass das Minimum des Potentials $U(x)$ bei $x = x_0$ liegt. Uns interessiert die Bewegung des Teilchen *in der Nähe des Minimums*.

Um das zu beschreiben, führen wir die neue Koordinate $x = x_0 + \xi$ ein und erhalten

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - U(x_0 + \xi). \quad (2)$$

Weil ξ per Konstruktion klein ist, können wir $U(x_0 + \xi)$ in eine Taylorreihe entwickeln. Wir erhalten

$$U(x_0 + \xi) \approx U(x_0) + \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \xi + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3) \quad (3)$$

Da x_0 ein Minimum des Potentials $U(x)$ ist, gilt $dU/dx|_{x=x_0} = 0$. Deswegen können wir die Lagrangefunktion Gl. (2) für kleine ξ 's so schreiben

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{k\xi^2}{2}, \quad (4)$$

wobei

$$k = \left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (5)$$

ist. Der Parameter k ist positiv, weil x_0 ein Minimum ist. Wir haben in Gl. (4) alle $\mathcal{O}(\xi^n)$ -Beiträge, $n \geq 3$, vernachlässigt weil wir uns nur für die Bewegung in der Nähe des Minimums interessieren. Wir sehen, dass die Lagrangefunktion in Gl. (4) *universell ist*; das Einzige was vom konkreten Potential des Systems abhängt, ist der Parameter k , der durch die zweite Ableitung der potentiellen Energie am Punkt des Minimums gegeben ist, siehe Gl. (5).

Als Beispiel betrachten wir zwei Potentiale

$$U_1(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4 \quad (6)$$

und

$$U_2(x) = \frac{-U_0}{\cosh^2(\gamma x)}. \quad (7)$$

Die Potentiale sind unterschiedlich. Trotzdem gibt es in beiden Fällen Minima. Für U_1 gibt es zwei Minima, bei $x = \pm\sqrt{\alpha/\beta}$, und für U_2 ist das Minimum bei $x = 0$. In der Nähe des Minimums bei $x = x_p = \sqrt{\alpha/\beta}$ können wir U_1 als Taylor-Reihe darstellen und erhalten

$$U_1(x) \approx -\frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{1}{2}(2\alpha)(x - x_p)^2 + \mathcal{O}((x - x_p)^3). \quad (8)$$

Wir nehmen die Entfernung von x_p als die neue Koordinate $\xi = x - x_p$ und erhalten für $U_1(x)$

$$k = 2\alpha. \quad (9)$$

Analog könnten wir für das andere Minimum vorgehen.

Für U_2 , konstruieren wir die Taylor-Reihe in der Nähe von $x = 0$ und erhalten

$$U_2(x) = -U_0 + \gamma^2 U_0 x^2 + \mathcal{O}(x^3). \quad (10)$$

Das bedeutet, dass in diesem Fall

$$k = 2U_0\gamma^2 \quad (11)$$

ist.

Wir konzentrieren uns jetzt auf die *universelle* Lagrangefunktion, die kleine Schwingungen beschreibt, Gl. (4). Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial L}{\partial \xi} \quad (12)$$

ergibt

$$m\ddot{\xi} + k\xi = 0. \quad (13)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (14)$$

wobei

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (15)$$

ist, und A die Amplitude und φ die Phase der Schwingungen heißen. Die Amplitude und die Phase bestimmt man durch die Randbedingungen.

2. Erzwungene Schwingungen: Wir betrachten jetzt die Situation, in der eine externe zeitabhängige Kraft die Schwingungen beeinflusst. Für kleine Schwingungen ist die externe Kraft ξ -unabhängig. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - \frac{m\omega^2\xi^2}{2} + \xi F(t). \quad (16)$$

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{F(t)}{m}. \quad (17)$$

Einen wichtigen Fall einer externen Kraft stellen harmonische Kräfte dar, also Kräfte der Form

$$F(t) = F_0 \cos(\gamma t + \beta). \quad (18)$$

Um Gl. (17) zu lösen, schreiben wir ξ als eine Linearkombination aus der allgemeinen Lösung der freien (homogenen) Gleichung und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + A_f \cos(\gamma t + \beta). \quad (19)$$

Wir benutzen diesen Ansatz in Gl. (17) und erhalten

$$A_f (-\gamma^2 + \omega^2) = \frac{F_0}{m}, \quad (20)$$

sodass

$$A_f = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)}. \quad (21)$$

Die vollständige Lösung ist dann

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (22)$$

Die Randbedingungen können wir erfüllen, indem wir die zwei Parameter der freien Lösung A und φ geeignet wählen.

Aus Gl. (22) wird ersichtlich, dass der Fall $\gamma = \omega$ singular ist. Um diesen Fall zu analysieren, müssen wir den Limes $\gamma \rightarrow \omega$ sorgfältig berechnen. Zum diesen Zweck redefinieren wir die allgemeine Lösung und schreiben Gl. (22) um

$$\xi(t) = \tilde{A} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \gamma^2)} (\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)). \quad (23)$$

Dann benutzen wir

$$\begin{aligned} \cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta) &= 2 \sin((\gamma + \omega)t/2 + \beta) \sin((\omega - \gamma)t/2) \\ &\approx (\omega - \gamma)t \sin(\omega t + \beta). \end{aligned} \quad (24)$$

Wir setzen diesen Ausdruck in Gl. (23) ein und erhalten

$$\xi(t)|_{\gamma=\omega} = \tilde{A} \cos(\omega t + \tilde{\varphi}) + \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin(\omega t + \beta). \quad (25)$$

Wir sehen, dass im Fall $\gamma = \omega$ (Resonanzfall) die Amplitude *linear mit der Zeit wächst*. Das bedeutet, dass wir nach einer bestimmten Zeit nicht mehr von kleinen Schwingungen reden können, weil ξ einfach zu groß wird. Wir werden später diskutieren, was mit der Resonanz passiert, falls wir Reibungskräfte berücksichtigen. Zunächst aber gehen wir zurück zu Gl. (17) und diskutieren, wie diese Gleichung für allgemeine Kraft $F(t)$ gelöst werden kann.

Wir schreiben die Gl. (17) um

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \left[\frac{d}{dt} + i\omega \right] \left[\frac{d}{dt} - i\omega \right] \xi = \frac{F(t)}{m}. \quad (26)$$

und führen eine neue Variable ein

$$\left[\frac{d}{dt} - i\omega \right] \xi = \rho(t) \quad (27)$$

Die Gleichung für ρ sieht so aus

$$\left[\frac{d}{dt} + i\omega \right] \rho(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (28)$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, sodass es einfach ist, die Lösung zu finden.

Wir suchen nach einer speziellen Lösung mit Hilfe der Methode, die "Variation der Konstanten" heißt, und schreiben

$$\rho(t) = C(t)e^{-i\omega t}. \quad (29)$$

Wir setzen diesen Ansatz in der Differentialgleichung für $C(t)$ ein und erhalten

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m} e^{i\omega t}. \quad (30)$$

Direkte Integration ergibt

$$C(t) = \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m} e^{i\omega\tau}. \quad (31)$$

Um $\xi(t)$ zu finden, benutzen wir die Definition von ρ , Gl. (27). Weil wir eine reelle Lösung $\xi(t)$ suchen, folgt aus Gl. (27) folgende Gleichung

$$\xi(t) = -\operatorname{Im} \left[\frac{\rho(t)}{\omega} \right]. \quad (32)$$

Wir berechnen den Imaginärteil und erhalten die *spezielle Lösung* für eine beliebige zeitabhängige Kraft

$$\xi(t) = \int_0^t d\tau \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(t - \tau)). \quad (33)$$

3. Freie Schwingungen mit Reibung: Was passiert mit den Schwingungen, wenn eine Reibungskraft vorhanden ist? Wir nehmen an, dass die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist, $f_R = -2m\kappa\dot{\xi}$, und erhalten die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + 2\kappa\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0. \quad (34)$$

Um diese Gleichung zu lösen, suchen wir Lösungen in der Exponentialform

$$\xi = Ae^{i\lambda t}. \quad (35)$$

Wir setzen diesen Ansatz in Gl. (34) ein und erhalten eine Gleichung für λ

$$-\lambda^2 + 2i\kappa\lambda + \omega^2 = 0. \quad (36)$$

Es gibt zwei Lösungen

$$\lambda_{\pm} = i\kappa \pm \sqrt{\omega^2 - \kappa^2}. \quad (37)$$

Wir können aus diesen zwei Lösungen die allgemeine Lösung für Schwingungen mit Reibung konstruieren

$$\xi(t) = \operatorname{Re} [A_1 e^{i\lambda_+ t} + A_2 e^{i\lambda_- t}], \quad (38)$$

wobei $A_{1,2}$ zwei komplexe Konstanten sind.

Es ist nützlich, zwei Fälle zu unterscheiden. Für *schwache* Reibung gilt $\omega > \kappa$. In diesem Fall sieht die allgemeine Lösung so aus

$$\xi(t) = Ae^{-\kappa t} \cos \left(\omega t \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{\omega^2}} + \varphi \right) \quad (39)$$

Für *starke* Reibung ist $\kappa > \omega$, so dass λ_{\pm} imaginär sind. Dann

$$\xi(t) = A_1 e^{-t(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})} + A_2 e^{-t(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2})}, \quad (40)$$

wobei $A_{1,2}$ reell sind.

4. Erzwungene Schwingungen mit Reibung: Wir betrachten dann die erzwungenen Schwingungen mit Reibung. Die Kraft ist harmonisch. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\xi} + 2\kappa\dot{\xi} + \omega^2\xi = \frac{F_0}{m} \cos(\gamma t + \beta). \quad (41)$$

Wir suchen nach der speziellen Lösung

$$\xi = A e^{i(\gamma t + \beta)} + A^* e^{-i(\gamma t + \beta)}. \quad (42)$$

Die gleiche Zerlegung können wir für den inhomogenen Term auf der rechten Seite benutzen,

$$\frac{F_0}{m} \cos(\gamma t + \beta) = \frac{F_0}{2m} (e^{i(\gamma t + \beta)} + e^{-i(\gamma t + \beta)}). \quad (43)$$

Weil die Funktionen $e^{i(\gamma t + \beta)}$ und $e^{-i(\gamma t + \beta)}$ unabhängig voneinander sind, können wir die Gleichung in zwei Gleichungen aufteilen, jeweils eine für jede der Exponentialfunktionen. Aus beiden Gleichungen folgt für A

$$(\omega^2 - \gamma^2 + 2i\kappa\gamma)A = \frac{F_0}{2m}. \quad (44)$$

Es folgt

$$A = \frac{F_0}{2m} \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2 + 2i\kappa\gamma}. \quad (45)$$

Es ist nützlich, die komplexe Größe A als Betrag und Phase umzuschreiben; wir erhalten

$$A = \frac{F_0}{2m} \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\kappa^2\gamma^2}}, \quad (46)$$

mit

$$\phi = \arctan \frac{2\kappa\gamma}{\gamma^2 - \omega^2}. \quad (47)$$

Die spezielle Lösung folgt

$$\xi(t) = A e^{i(\gamma t + \beta)} + A^* e^{-i(\gamma t + \beta)} = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\gamma t + \beta + \phi)}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\kappa^2\gamma^2}} \quad (48)$$

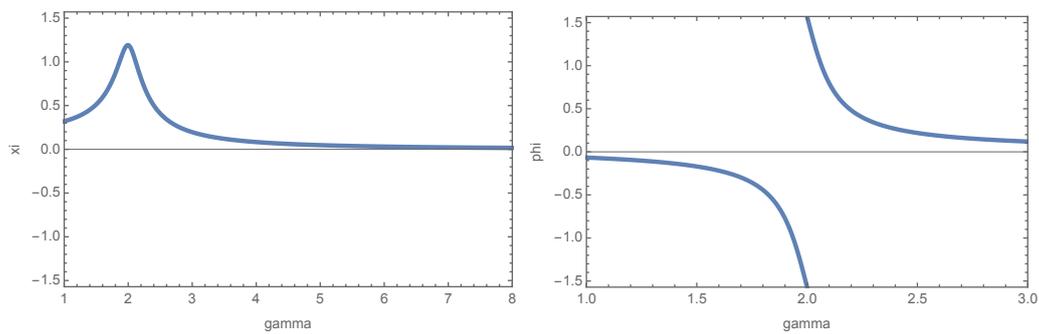


Abbildung 6: Der Betrag der Amplitude ξ und die Phase ϕ der erzwungenen Schwingung mit Reibung, Gl. (47,48) in Abhängigkeit von γ . Wir benutzen folgende Parameter: $\omega = 2$, $\kappa = 0.1$ und $F_0/(2m) = 1$.

Wir sehen, dass für Schwingungen mit Reibung eine relative Phase zwischen der Kraft und der Verschiebung $\xi(t)$ existiert. Im Resonanzfall ist die Amplitude der Schwingungen endlich

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\kappa^2\gamma^2}} = \frac{F_0}{2m\kappa\omega}, \quad (49)$$

aber die relative Phase ändert sich ganz plötzlich bei $\gamma = \omega$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega-0} \phi = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \omega+0} \phi = \frac{\pi}{2}. \quad (50)$$

7 Kleine Schwingungen mit vielen Freiheitsgraden

Wir betrachten ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden, welches wir mit folgender Lagrangefunktion beschreiben

$$L = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_N). \quad (1)$$

Wir nehmen an, dass die potentielle Energie $U(q_1, \dots, q_N)$ ein Minimum für $q_i = q_{0,i}$, $i = 1, \dots, N$, hat.

Die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) = \vec{q}_0$ ist eine Schwingung. Um die Bewegung des Systems in der Nähe von $\vec{q} = \vec{q}_0$ zu beschreiben, entwickeln wir die Lagrangefunktion in eine Taylorreihe in $\vec{\xi} = \vec{q} - \vec{q}_0$. Die Auslenkungen $|\vec{\xi}|$ sind klein; wir entwickeln $U(q_1, \dots, q_N)$ bis zur zweiten Ordnung in ξ und vernachlässigen alle Terme höherer Ordnung.

Die Lagrangefunktion Gl. (1) enthält auch die kinetische Energie, die wir ebenfalls entwickeln müssen. Um das zu machen, nutzen wir, dass die Geschwindigkeiten $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$ *genauso klein sind wie ξ_i selbst*. Der Grund dafür ist das Verhältnis zwischen den Geschwindigkeiten $\dot{\xi}_i$ und den Amplituden ξ_i , $\dot{\xi}_i \sim \omega \xi_i$, das für Schwingungen gilt, wobei ω die Frequenz der Schwingung entspricht. Das bedeutet, dass die kinetische Energie $\sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j$ in Gl. (1) schon eine Größe zweiter Ordnung ist, sodass wir in der Funktion $a_{ij}(q_1, \dots, q_N)$ q_i mit $q_{0,i}$ ersetzen können. Wir bezeichnen

$$a_{ij}(q_{0,1}, \dots, q_{0,N}) = \frac{1}{2} m_{ij} \quad (2)$$

und schreiben die entwickelte potentielle Energie als

$$U(q_1, \dots, q_N) \approx U_0 + \frac{1}{2} k_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (3)$$

wobei

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}=\vec{q}_0} \quad (4)$$

sind.

Letztendlich erhalten wir *die universelle Lagrangefunktion*, die kleine Schwingungen von Systemen mit vielen Freiheitsgraden beschreibt

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} (m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j). \quad (5)$$

Die Koeffizienten m_{ij} und k_{ij} sind per Konstruktion symmetrisch

$$m_{ij} = m_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}. \quad (6)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \Rightarrow \sum_{j=1}^N [m_{ij} \ddot{\xi}_j + k_{ij} \xi_j] = 0 \quad (7)$$

Diese Gleichungen können wir wie eine Matrixgleichung schreiben

$$\hat{m} \ddot{\xi} + \hat{k} \xi = 0, \quad (8)$$

wobei die Matrizen \hat{m}, \hat{k} die Elemente m_{ij} und k_{ij} haben.

Um die Lösungen der Matrixgleichung zu finden, nehmen wir an, dass das System mit der bestimmten Frequenz ω als Ganzes schwingt. Wir schreiben dann

$$\xi = \text{Re} [\vec{a} e^{i\omega t + \varphi}], \quad (9)$$

setzen diesen Ansatz in Gl. (8) ein und erhalten

$$[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}] \vec{a} = 0. \quad (10)$$

Aus Gl. (10) können wir die Frequenzen ω und die Amplituden \vec{a} der Schwingungen erhalten. Das passiert in folgender Weise: Die homogene lineare Gleichung Gl. (10) hat nicht-triviale³ Lösungen für die Amplitude \vec{a} nur dann, wenn

$$\det [-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}] = 0. \quad (11)$$

Die Eigenfrequenzen des Systems folgen aus dieser Gleichung. Für ein System mit N Freiheitsgraden gibt es N Eigenfrequenzen, wovon aber mehrere entartet (also gleich) sein können. Nachdem die Frequenzen bekannt sind, können wir die Amplituden aus Gl. (10) bestimmen.

Die Eigenfrequenzen und Eigenamplituden haben wichtige Eigenschaften. Wir können beispielsweise zeigen, dass alle Frequenzen reell sind. Um das zu tun, multiplizieren wir Gl. (10) mit dem transponierten Vektor \vec{a} und erhalten⁴

$$\omega^2 = \frac{\vec{a}_i \hat{k}_{ij} \vec{a}_j}{\vec{a}_i m_{ij} \vec{a}_j}. \quad (12)$$

³“Nicht-triviale” bedeutet $\vec{a} \neq 0$.

⁴Zur Erinnerung: Zwei identische Indizes in einer Formel bedeuten, dass man über diese Indizes summieren muss.

Die Matrizen \hat{m} und \hat{k} müssen positiv sein,⁵ d.h.

$$\omega^2 > 0 \quad (13)$$

und alle Frequenzen sind reell.

Eine andere Eigenschaft ist die "Orthogonalität" der Amplituden, die verschiedenen Frequenzen entsprechen. Bezeichnen wir die Frequenzen mit einem Label s . Dann gilt

$$\begin{aligned} -\omega_s^2 m_{ij} a_j^{(s)} + k_{ij} a_j^{(s)} &= 0, \\ -\omega_{s'}^2 m_{ij} a_j^{(s')} + k_{ij} a_j^{(s')} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $a_i^{(s')}$, die zweite mit $a_i^{(s)}$ und summieren über i . Wir bekommen

$$\begin{aligned} \omega_s^2 a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} &= a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)}, \\ \omega_{s'}^2 a_i^{(s)} m_{ij} a_j^{(s')} &= a_i^{(s)} k_{ij} a_j^{(s')}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Matrizen \hat{m} und \hat{k} sind symmetrisch. Das bedeutet, dass die rechten Seiten gleich sind. Wir subtrahieren die zwei Gleichungen Gl. (15) voneinander und erhalten

$$(\omega_s^2 - \omega_{s'}^2) a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0. \quad (16)$$

Das bedeutet, dass, falls $\omega_s \neq \omega_{s'}$ ist, gilt

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = 0, \quad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = 0. \quad (17)$$

Wir können die Amplituden so normieren, dass folgende Gleichungen gelten

$$a_i^{(s')} m_{ij} a_j^{(s)} = \delta^{ss'}, \quad a_i^{(s')} k_{ij} a_j^{(s)} = \omega_s^2 \delta^{ss'}. \quad (18)$$

Diese Orthogonalitätsrelationen für Amplituden kann man benutzen, um die Berechnung von Eigenamplituden zu vereinfachen. Falls es in einem System entartete Frequenzen gibt, müssen wir gezielt die Amplituden, die den entarteten Frequenzen entsprechen, so wählen, dass sie orthogonal zueinander sind.

Nehmen wir an, dass wir die Eigenfrequenzen und die Eigenamplituden eines mechanischen Systems berechnet haben. Wir können dann N unabhängige

⁵D.h., dass die Eigenwerte dieser Matrizen positiv sind.

Vektoren, die die Amplituden darstellen, als die neue Basis benutzen. Wir schreiben dann

$$\vec{\xi} = \sum_{s=1}^N r_s \vec{a}^{(s)}, \quad (19)$$

wobei r_s die Koordinaten des (N -dimensionalen) Vektors $\vec{\xi}$ in der neuen Basis sind. Wir nennen diese Koordinaten "Normalkoordinaten".

Normalkoordinaten spalten die Lagrangefunktion Gl. (5) in N unabhängige Lagrangefunktionen. Um das zu zeigen, benutzen wir Gl. (19), um die Lagrangefunktion in Gl. (5) umzuschreiben. Mithilfe von Gl. (18) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2U &= \sum_{ij} k_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \sum_{ij} k_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} r_s r_{s'} \delta_{ss'} \omega_s^2 = \sum_s \omega_s^2 r_s^2, \\ 2T &= \sum_{ij} m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \sum_{ij} m_{ij} a_i^{(s')} a_j^{(s)} = \sum_{s,s'} \dot{r}_s \dot{r}_{s'} \delta_{ss'} = \sum_s \dot{r}_s^2, \end{aligned} \quad (20)$$

sodass

$$L = \frac{1}{2} \sum_s [\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2]. \quad (21)$$

Es folgt aus der Lagrangefunktion in Gl. (21), dass die Bewegungsgleichungen in Normalkoordinaten unabhängig voneinander sind. Die Euler-Lagrange-Gleichung für die Normalkoordinate r_s lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_s} = \frac{\partial L}{\partial r_s}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}_s + \omega_s^2 r_s = 0. \quad (22)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist offensichtlich

$$r_s = C_s \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (23)$$

wobei C_s und φ_s zwei Konstanten sind, die wir mithilfe der Randbedingungen bestimmen müssen.

Die allgemeine Lösung für die Auslenkung $\vec{\xi}$ folgt aus Gl. (19) und Gl. (23) und lautet

$$\vec{\xi}(t) = \sum_{s=1}^N C_s \vec{a}_s \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (24)$$

In dieser Lösung haben wir $2N$ Konstanten ($C_s, \varphi_s, s = 1, \dots, N$), die wir so wählen müssen, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Wir betrachten ein Beispiel. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2 - 2\alpha xy). \quad (25)$$

Das bedeutet, dass die Matrizen \hat{m} , \hat{k} wie folgt aussehen

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{k} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Die Matrix $\hat{O} = -\omega^2 \hat{m} + \hat{k}$ ist dann

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha\omega_0^2 \\ -\alpha\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Die Determinante dieser Matrix muss Null sein. Es folgt

$$\det[-\omega^2 \hat{m} + \hat{k}] = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2 \omega_0^4 = 0. \quad (28)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir zwei mögliche Eigenfrequenzen

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm \alpha \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\pm}^2 = \omega_0^2 (1 \pm \alpha). \quad (29)$$

Nun müssen wir die zugehörigen Eigenamplituden bestimmen. Zu diesem Zweck berechnen wir zuerst \hat{O} für $\omega^2 = \omega_{\pm}^2$. Wir erhalten

$$\hat{O}_{\pm} = \hat{O}|_{\omega^2=\omega_{\pm}^2} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} \pm\alpha & \alpha \\ \alpha & \pm\alpha \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Schließlich finden wir die Eigenamplituden

$$\hat{O}_{\pm} \vec{a}_{\pm} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Wir sehen, dass die Eigenamplituden richtig normiert sind, weil

$$\vec{a}_{\pm}^T \hat{m} \vec{a}_{\pm} = 1. \quad (32)$$

Wir machen jetzt die Variablentransformation zu Normalkoordinaten, die wir mit r_{\pm} bezeichnen. Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_+ \vec{a}_+ + r_- \vec{a}_-, \quad (33)$$

benutzen \vec{a}_\pm aus Gl. (30) und erhalten dann

$$x = \frac{r_+ + r_-}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-r_+ + r_-}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

Wir führen diese Transformation in der Lagrangefunktion ein und finden

$$L = \frac{\dot{r}_+^2}{2} + \frac{\dot{r}_-^2}{2} - \frac{\omega_+^2}{2} r_+^2 - \frac{\omega_-^2}{2} r_-^2. \quad (35)$$

Wie oben erwähnt, beschreibt diese Lagrangefunktion zwei *unabhängige* Schwingungen mit den Frequenzen ω_\pm .

Die Zeitabhängigkeit von r_\pm lautet

$$r_\pm = C_\pm \cos(\omega_\pm t + \varphi_\pm). \quad (36)$$

Wir benutzen diese Ausdrücke in Gl. (33) und erhalten die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{C_+}{\sqrt{2}} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{C_-}{\sqrt{2}} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Die Konstanten C_\pm , φ_\pm müssen so gewählt werden, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Normalkoordinaten sind sehr nützlich, um die erzwungenen Schwingungen in Systemen mit vielen Freiheitsgraden zu untersuchen. Die universelle Lagrangefunktion sieht in diesem Fall so aus

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} [m_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - k_{ij} \xi_i \xi_j] - \sum_i f_i(t) \xi_i. \quad (38)$$

Der letzte Term beschreibt die externe Kraft, die unterschiedlich an verschiedenen Koordinaten wirkt.

Um die erzwungenen Schwingungen zu untersuchen, finden wir die Normalkoordinaten des Systems und schreiben die Lagrangefunktion um

$$L = \frac{1}{2} \sum_s [\dot{r}_s^2 - \omega_s^2 r_s^2] - \sum_s f_s(t) r_s, \quad (39)$$

wobei

$$f_s(t) = \sum_i f_i(t) a_i^{(s)} = \vec{f}(t) \cdot \vec{a}^{(s)}. \quad (40)$$

Es folgt aus Gl. (39), dass die erzwungene Schwingung jeder Normalkoordinate unabhängig von den anderen Normalkoordinaten beschrieben werden kann.

Die Stärke der anregenden, äußeren Kraft für die Eigenfrequenz ω_s ist durch die Projektion des Kraftvektors \vec{f} auf die Eigenamplitude $\vec{a}^{(s)}$ gegeben. Für die harmonische Kraft $\vec{f}(t) \sim \vec{f}_0 \cos(\omega t + \phi)$ gibt es eine Resonanz, falls ω gleich *einer der Eigenfrequenzen ist* – natürlich nur, falls die Projektion von \vec{f} auf die entsprechender Eigenamplitude von Null verschieden ist.

Es gibt eine ganz klare Reihenfolge, der wir folgen müssen, um Eigenfrequenzen und Eigenamplituden zu berechnen. Wir fangen mit der Berechnung der Determinante an und lösen dann viele lineare Gleichungen, um die Amplituden zu berechnen. Diese Vorgehensweise ist zwar klar definiert, kann aber anspruchsvoll sein.

Es ist dennoch möglich, die Berechnung von Amplituden stark zu vereinfachen, in dem wir *die Symmetrien der Lagrangefunktion benutzen*. Wir nehmen an, dass die Lagrangefunktion unter der Transformation

$$\xi_i \rightarrow \xi'_i = S_{ij} \xi_j, \quad (41)$$

invariant ist, wobei die Matrix \hat{S} die folgende Gleichung erfüllt

$$\hat{S}^2 = 1. \quad (42)$$

Diese Gleichung bedeutet, dass wir, falls wir die Transformation zweimal machen, zum ursprünglichen Koordinatensystem

$$\xi = S^2 \xi = S \xi' \quad (43)$$

zurück kommen.

Die Invarianz der Lagrangefunktion bedeutet, dass die Matrizen \hat{m} und \hat{k} auch invariant sein müssen

$$S^T \hat{m} S = \hat{m}, \quad S^T \hat{k} S = \hat{k}. \quad (44)$$

Die Gleichung, die von der Eigenamplitude \vec{a}_s erfüllt wird, lautet

$$[-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}] \vec{a}_s = 0. \quad (45)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit S^T von links und benutzen $SS = 1$, um zu schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= [-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}] \vec{a}_s = S^T [-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}] S \vec{a}_s \\ &= S^T [-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}] SS \vec{a}_s = [-\omega_s^2 \hat{m} + \hat{k}] S \vec{a}_s. \end{aligned} \quad (46)$$

Diese Gleichungen bedeuten, dass nicht nur \vec{a}_s , sondern auch $S\vec{a}_s$ eine Eigenamplitude zur Frequenz ω_s ist. Nehmen wir an, dass die Schwingung mit dieser Frequenz nicht entartet ist. Dann muss gelten

$$S\vec{a}_s = \lambda_s \vec{a}_s. \quad (47)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung noch einmal mit S , benutzen $S^2 = 1$ und erhalten

$$1 = \lambda_s^2 \Rightarrow \lambda_s = \pm 1. \quad (48)$$

Diese Gleichung bedeutet, dass der Vektor \vec{a}_s ein Eigenvektor der Matrix S zum Eigenwert ± 1 ist. Diese Eigenschaft der Eigenamplituden können wir verwenden, um die Berechnung der Amplituden in komplizierten (aber symmetrischen) Fällen zu vereinfachen.

Als Beispiel betrachten wir drei Teilchen, die mit zwei Federn miteinander verbunden sind. Nehmen wir an, dass die Länge der Federn im Gleichgewicht l_3 und l_2 sind und dass die Gleichgewichtskoordinate des ersten Teilchen l_1 ist. Dann schreiben wir die Koordinaten von drei Teilchen als

$$x_1 = l_1 + \xi_1, \quad x_2 = l_1 + l_2 + \xi_2, \quad x_3 = l_1 + l_2 + l_3 + \xi_3, \quad (49)$$

wobei $\xi_{1,2,3}$ die Auslenkungen der entsprechenden Teilchen aus den Gleichgewichtspunkten beschreiben. Die potentielle Energie lautet

$$U = \frac{k}{2} (x_3 - x_2 - l_3)^2 + \frac{k}{2} (x_2 - x_1 - l_2)^2 = \frac{k}{2} (\xi_1 - \xi_2)^2 - \frac{k}{2} (\xi_3 - \xi_2)^2. \quad (50)$$

Dementsprechend lautet die Lagrangefunktion wie folgt

$$L = \frac{m\xi_1^2}{2} + \frac{M\xi_2^2}{2} + \frac{m\xi_3^2}{2} - \frac{k}{2} (\xi_1 - \xi_2)^2 - \frac{k}{2} (\xi_3 - \xi_2)^2. \quad (51)$$

Diese Lagrangefunktion ist invariant unter der Vertauschung von ξ_1 und ξ_3 . Wir können diese Transformation mit der folgenden Matrix beschreiben

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

weil

$$S \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $S^2 = 1$ ist. Unserer Diskussion zur Folge müssen die Eigenamplituden der Lagrangefunktion Gl. (51) dann entweder symmetrisch oder antisymmetrisch unter der Transformation $\xi_1 \leftrightarrow \xi_3$ sein.

Wir fangen an mit der *antisymmetrischen* Amplitude. Diese Amplitude muss dann so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega_1 t} \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Diese Amplitude ist schon richtig normiert.

In Gl. (54) ist die Eigenfrequenz unbekannt. Um sie zu berechnen, benutzen wir die Bewegungsgleichung für ξ_1 , die aus der Lagrangefunktion Gl. (51) folgt

$$m\ddot{\xi}_1 + k(\xi_1 - \xi_2) = 0, \quad (55)$$

setzen den Ansatz Gl. (54) ein und erhalten

$$-\omega_1^2 m + k = 0. \quad (56)$$

Das bedeutet, dass die Eigenfrequenz und die (normierte) Eigenamplitude für die antisymmetrische Schwingung lauten

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Der symmetrische Fall ist etwas komplizierter. In diesem Fall gibt es eine Lösung, die man raten kann. Diese Lösung entspricht einer freien Bewegung von drei Teilchen ohne Schwingungen. Falls wir $\vec{\xi}$ so wählen, dass

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega_2 t} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

verschwindet die Kraft, sodass $\omega_2 = 0$ ist. Die obige Lösung müssen wir etwas verallgemeinern, weil sie die Bewegung des Systems als Ganzes beschreibt. Das bedeutet, dass die Zeitabhängigkeit dieser Lösung so lautet

$$\vec{\xi}(t) = \frac{(vt + x_0)}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

wobei v die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systems ist.

Wir konstruieren jetzt die Amplitude der zweiten symmetrischen Schwingung. Diese Amplitude muss so aussehen

$$\vec{\xi}(t) = e^{i\omega_3 t} \vec{a}_3, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Wir können das Verhältnis zwischen a und b in obiger Gleichung bestimmen, weil diese Amplitude orthogonal zur Amplitude in Gl. (59) sein muss. Dann gilt

$$(1, 1, 1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0. \quad (61)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$b = -\frac{2m}{M}a. \quad (62)$$

Dann fordern wir, dass die Amplitude normiert ist, und erhalten schließlich

$$\vec{a}_3 = \sqrt{\frac{M}{2m(2m+M)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Um die Eigenfrequenz zu finden, benutzen wir Gl. (55) noch einmal und setzen dort $\ddot{\xi}_1 = -\omega_3^2 \xi_1 \rightarrow 1$ und $\xi_2 \rightarrow -2m/M$ ein. Wir erhalten

$$-m\omega_3^2 + k \left(1 + \frac{2m}{M} \right) = 0. \quad (64)$$

Es folgt

$$\omega_3^2 = \frac{k}{m} \frac{M+2m}{M}. \quad (65)$$

Wir sehen, dass es durchaus möglich ist, die Eigenfrequenzen und Eigenamplituden eines komplizierten Systems zu finden, ohne die Determinante zu berechnen. Die Symmetrien des Systems und entsprechende Bewegungsgleichungen spielen dabei eine sehr wichtige Rolle.

8 Anharmonische Schwingungen

Wir betrachten ein Teilchen mit der Masse m in einem Kraftfeld, das wir mit der potentiellen Energie $U(x)$ beschreiben. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x). \quad (1)$$

Die potentielle Energie hat ein Minimum bei $x = x_0$. Wir entwickeln $U(x)$ in der Nähe des Minimums und erhalten

$$U(x)|_{x \sim x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n U(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n. \quad (2)$$

Weil x_0 ein Minimum ist, muss $dU/dx|_{x=x_0}$ verschwinden und $d^2U/dx^2|_{x=x_0}$ positiv sein.

Im Fall kleiner Schwingungen haben wir bisher nur den $\mathcal{O}((x - x_0)^2)$ Term in Gl. (2) berücksichtigt. Allerdings es ist auch interessant zu fragen, was passieren würde, falls wir mehr Terme in Gl. (2) mitnehmen. Dementsprechend führen wir eine neue Koordinate ξ ein, $\xi = (x - x_0)/\sqrt{m}$, und schreiben die Lagrangefunktion als

$$L = \frac{\dot{\xi}^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2} \xi^2 - \frac{\alpha \xi^3}{3} - \frac{\beta \xi^4}{4} + \mathcal{O}(\xi^5). \quad (3)$$

Die Parameter α, β usw. kann man durch entsprechende Ableitungen des Potentials bei $x = x_0$ ausdrücken.

Wir wollen herausfinden, welchen Einfluss die $\mathcal{O}(\xi^3, \xi^4)$ Terme in der Lagrangefunktion auf kleine Schwingungen haben. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\alpha \xi^2 - \beta \xi^3. \quad (4)$$

Für kleine Schwingungen sind die Terme auf der rechten Seite klein. Um das formal aber explizit auszudrücken, führen wir einen Parameter $\epsilon \ll 1$ ein und schreiben Gl. (4) um als

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\epsilon \alpha \xi^2 - \epsilon^2 \beta \xi^3. \quad (5)$$

Die Idee ist dann, die Bewegungsgleichung Gl. (5) als eine Taylor-Reihe in ϵ zu lösen. Dementsprechend machen wir den Ansatz

$$\xi = \xi_0 + \epsilon \xi_1 + \epsilon^2 \xi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad \omega_0^2 = \omega^2 - \epsilon \omega_1^2 - \epsilon^2 \omega_2^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (6)$$

Warum wir die gegebene Größe ω_0^2 durch den unbekannt Parameter ω^2 ausgedrückt haben und nicht umgekehrt, ist momentan nicht klar, aber in Kürze werden wir sehen, dass dies sehr wichtig ist.

Wir schreiben Gl. (5) so um

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = -\epsilon \alpha \xi^2 - \epsilon^2 \beta \xi^3 + (\omega^2 - \omega_0^2) \xi, \quad (7)$$

setzen die Ausdrücke aus Gl. (6) in Gl. (7) ein und schreiben die beiden Seiten als ein Polynom in ϵ

$$\sum_{i=0} \epsilon^i L_i = \sum_{i=0} \epsilon^i R_i. \quad (8)$$

Für kleines, aber ansonsten beliebiges ϵ kann diese Gleichung nur stimmen, falls

$$L_i = R_i, \quad (9)$$

für alle $i = 0, 1, 2, \dots$. Das bedeutet, dass wir durch Koeffizientenvergleich viele Gleichungen aus einer Gleichung bekommen. Diese viele Gleichungen sind einfache zu lösen als die ursprüngliche Gleichung; deswegen macht diese Vorgehensweise Sinn.

Die relevanten Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} i = 0 : \quad & \ddot{\xi}_0 + \omega^2 \xi_0 = 0, \\ i = 1 : \quad & \ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = -\alpha \xi_0^2 + \omega_1^2 \xi_0, \\ i = 2 : \quad & \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 = -2\alpha \xi_0 \xi_1 - \beta \xi_0^3 + \omega_1^2 \xi_1 + \omega_2^2 \xi_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Wir sehen, dass die $i = 0$ Gleichung nur von ξ_0 abhängt, die $i = 1$ Gleichung dann von ξ_1 und ξ_0 , die $i = 2$ Gleichung von ξ_2 , ξ_1 und ξ_0 , usw. Das bedeutet, dass wir diese Gleichungen in der entsprechenden Reihenfolge lösen müssen.

Aus der Gleichung für $i = 0$ erhalten wir

$$\xi_0 = a \cos(\omega t + \varphi). \quad (11)$$

Das ist eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ω , die in dieser Ordnung der ϵ -Entwicklung mit ω_0 identifiziert werden kann.

Wir benutzen jetzt die Lösung für ξ_0 aus Gl. (11), um die rechte Seite der Gleichung für $i = 1$ zu vereinfachen. Wir erhalten

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = -\alpha a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \omega_1^2 a \cos(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Wir schreiben die rechte Seite um und erhalten

$$\ddot{\xi}_1 + \omega^2 \xi_1 = -\frac{\alpha a^2}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)) + \omega_1^2 a \cos(\omega t + \varphi). \quad (13)$$

Diese Gleichung können wir als Gleichung für erzwungene Schwingungen betrachten. Wir wissen, dass wir in diesem Fall eine Resonanz erhalten, falls auf der rechten Seite eine Kraft mit der Frequenz ω steht. Wir können aber hier Resonanzlösungen nicht zulassen, weil im Resonanzfall die Amplitude proportional zur Zeit wächst und das mit der ϵ -Entwicklung und kleinen Schwingungen nicht kompatibel ist. (Dies bedeutet nicht, dass dies physikalisch unmöglich ist, sondern nur, dass wir diesen Fall von unserer Betrachtung hier ausschließen wollen.)

Die Forderung, dass keine resonante Kraft in den Bewegungsgleichung auftritt, gibt uns die Möglichkeit, ω_1 zu bestimmen. In der Tat folgt aus Gl. (13), dass es keine Resonanz gibt, falls $\omega_1^2 = 0$. Damit finden wir die *spezielle Lösung* der Gl. (13) und erhalten

$$\xi_1 = -\frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + 2\varphi). \quad (14)$$

Wir verwenden dann die Ergebnisse für ξ_0 , ξ_1 und ω_1^2 in der $i = 2$ Gleichung. Nachdem wir den Ausdruck mit Hilfe der folgenden Formel vereinfachen

$$\begin{aligned} \cos^3(\omega t + \varphi) &= \frac{3}{4} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t + 3\varphi), \\ \cos(\omega t + \varphi) \cos(2\omega t + 2\varphi) &= \frac{1}{2} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(3\omega t + 3\varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_2 + \omega^2 \xi_2 &= \cos(\omega t + \varphi) \left[\frac{5}{6} \frac{\alpha^2 a^3}{\omega^2} - \frac{3\beta a^3}{4} + \omega_2^2 a \right] \\ &+ \cos(3\omega t + 3\varphi) \left[-\frac{\alpha^2 a^3}{6\omega^2} - \frac{\beta a^3}{4} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Wie im vorherigen Fall beschreibt diese Gleichung erzwungene Schwingungen. Allerdings können wir in diesem Fall die anregende Kraft auf der rechten Seite, die für die Resonanz verantwortlich ist, loswerden, wenn wir ω_2^2 gleich

$$\omega_2^2 = -\frac{5}{6} \frac{\alpha^2 a^2}{\omega^2} + \frac{3\beta a^2}{4} \quad (17)$$

wählen. Wir konstruieren dann die spezielle Lösung für ξ_2 , addieren ξ_0 , ξ_1 und ξ_2 auf und setzen $\epsilon \rightarrow 1$. Die Zeitabhängigkeit der Auslenkung ξ lautet

$$\begin{aligned} \xi(t) &= a \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\alpha a^2}{2\omega^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega^2} \cos(2\omega t + 2\varphi) \\ &+ \left(\frac{\alpha^2 a^3}{48\omega^4} + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \right) \cos(3\omega t + 3\varphi), \end{aligned} \quad (18)$$

wobei die Frequenz ω durch die folgende Formel gegeben ist

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \left[-\frac{5\alpha^2 a^2}{6\omega_0^2} + \frac{3\beta a^2}{4} \right]. \quad (19)$$

Die Ergebnisse in Gl. (18,19) zeigen die Unterschiede zwischen harmonischen und anharmonischen Schwingungen. Harmonische Schwingungen laufen mit einer Frequenz ab und die Amplitude ist frequenzunabhängig. Für anharmonische Schwingungen gibt es Schwingungsmoden mit den Frequenzen ω , 2ω , 3ω usw. und die Frequenz ω ist von der Amplitude a anhängig. Das bedeutet auch, dass die Schwingungsdauer des anharmonischen Pendels von Energie (bzw. Amplitude) des Pendels abhängt.

9 Hamiltonsche Gleichungen

1. Die Hamiltonfunktion: Bisher haben wir mechanische Systeme mit Lagrange-funktionen beschrieben, aber es gibt auch andere Möglichkeiten. Wir werden nun die sogenannte *Hamiltonfunktion* und die *Hamiltonschen Gleichungen* diskutieren. Dieser alternative Zugang ist wichtig, weil er mehr Möglichkeiten für Variablentransformationen bietet und dies genutzt werden kann, um die Beschreibung des Systems zu vereinfachen.

Um die Hamiltonfunktion zu erhalten, gehen wir von einer Lagrange-funktion $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ aus und schreiben deren totale Ableitung

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right). \quad (1)$$

Wir benutzen dann die Definition des kanonischen Impulses und die Euler-Lagrange-Gleichung

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (2)$$

und erhalten

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^N \left(\frac{dp_i}{dt} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right). \quad (3)$$

Den letzten Term formen wir mit Hilfe von

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i \quad (4)$$

um und erhalten

$$d \left(L - \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N [\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i] + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (5)$$

Damit definieren wir eine neue Funktion H , die *Hamiltonfunktion*, in Abhängigkeit von den *Koordinaten, Impulsen und der Zeit*

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \quad (6)$$

und erhalten

$$dH = - \sum_{i=1}^N [\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (7)$$

Aus dieser Formel folgen sofort die partiellen Ableitungen von H . Wir erhalten

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (8)$$

Diese Gleichungen nennen wir die *Hamiltonschen Gleichungen*.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld. Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - U(\vec{r}). \quad (9)$$

Der Impuls ist

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}, \quad (10)$$

sodass

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}). \quad (11)$$

Wir erkennen an dieser Form der Hamiltonfunktion, dass diese hier der Gesamtenergie des Systems (kinetische plus potentielle Energie) entspricht.⁶ Wir erhalten dann die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}. \quad (12)$$

Diese zwei Differentialgleichungen erster Ordnung können wir sofort als Euler-Lagrange-Gleichungen umschreiben, indem wir die zweite Gleichung nach der Zeit ableiten und dann die erste Gleichung einsetzen

$$m \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \frac{d}{dt} \frac{\vec{p}}{m} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}}. \quad (13)$$

Das ist die Euler-Lagrange-Gleichung oder, äquivalent, das Zweite Newtonsche Gesetz.

2. Die Poisson-Klammer: Wir betrachten eine Funktion f , die von Impulsen, Koordinaten und der Zeit abhängt

$$f = f(\{p_i\}, \{q_i\}, t), \quad (14)$$

und berechnen die totale Zeitableitung

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right]. \quad (15)$$

⁶Dies muss jedoch nicht immer der Fall sein, wie z.B. bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen.

Die Zeitabhängigkeit der Impulse und Koordinaten folgt aus den Hamiltonschen Gleichungen Gl. (8). Wir erhalten

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (16)$$

Den letzten Term $\{H, f\}$ haben wir als *Poisson-Klammer* geschrieben. Die Poisson-Klammer zweier Funktionen F, G , die von p_i und q_i abhängen, ist definiert als

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right). \quad (17)$$

Wozu sind Poisson-Klammern gut? Eine Möglichkeit ist Folgendes: Wir können Poisson-Klammern verwenden *um Erhaltungsgrößen zu bestimmen*. Weil die totale Zeitableitung für eine Erhaltungsgröße I verschwindet, erhalten wir

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\{H, I\}, \quad (18)$$

und, falls I nicht explizit zeitabhängig ist, gilt folgendes

$$\{H, I\} = 0. \quad (19)$$

D.h. wenn wir eine zeitunabhängige Funktion finden, deren Poisson-Klammer mit Hamiltonfunktion Null ist, ist diese Funktion eine Erhaltungsgröße.

Die Poisson-Klammern haben verschiedene Eigenschaften, die man aus der Definition herleiten kann. Die entsprechenden Formeln lauten

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\} &= -\{F_2, F_1\}, & \{F_1 + F_2, F_3\} &= \{F_1, F_3\} + \{F_2, F_3\}, \\ \{F_1 F_2, F_3\} &= F_1 \{F_2, F_3\} + F_2 \{F_1, F_3\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Poisson-Klammern erfüllen die Jacobi-Identität

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0. \quad (21)$$

Außerdem sind folgende Poisson-Klammern wichtig

$$\{p_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \{q_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}. \quad (22)$$

Wie bereits gesagt, können wir die Poisson-Klammern benutzen, um Erhaltungsgrößen zu konstruieren. Als erstes Beispiel benutzen wir die Antisymmetrie der Poisson-Klammern und schreiben

$$\{H, H\} = -\{H, H\} \Rightarrow \{H, H\} = 0. \quad (23)$$

Wenn H die Hamiltonfunktion des uns interessierenden Systems ist und falls H nicht explizit von der Zeit abhängt, bedeutet die obige Gleichung, dass H eine Erhaltungsgröße ist. Diese Erhaltungsgröße ist natürlich die Energie.

Als zweites Beispiel betrachten wir zwei Erhaltungsgrößen $I_{1,2}$, die nur von Impulsen und Koordinaten abhängig sind. Dann gilt

$$0 = \{H, I_1\} = \{H, I_2\}, \quad (24)$$

und aus der Jacobi-Identität folgt

$$0 = \{H, \{I_1, I_2\}\} + \{I_1, \{I_2, H\}\} + \{I_2, \{H, I_1\}\} = \{H, \{I_1, I_2\}\}. \quad (25)$$

Das bedeutet, dass die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen $\{I_1, I_2\}$ auch eine Erhaltungsgröße ist.

Um zu sehen, wann das nützlich sein kann, betrachten wir ein Teilchen im Zentralkraftfeld. Die Hamiltonfunktion dazu ist

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(r). \quad (26)$$

Wir wissen, dass der Drehimpuls $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ in diesem Fall erhalten ist und wir können versuchen, das mit Hilfe der Poisson-Klammern zu bestätigen. Wir benutzen die Eigenschaften der Poisson-Klammern, die wir bereits diskutiert haben und berechnen

$$\begin{aligned} \{M_i, H\} &= \epsilon_{ijk} \{r_j p_k, H\} = \epsilon_{ijk} [r_j \{p_k, H\} + p_k \{r_j, H\}] = \epsilon_{ijk} \left[r_j \frac{\partial H}{\partial r_k} - p_k \frac{\partial H}{\partial p_j} \right] \\ &= \epsilon_{ijk} \left[r_j \frac{\partial U}{\partial r_k} - \frac{p_k p_j}{m} \right] = \epsilon_{ijk} \left[\frac{r_j r_k}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{p_k p_j}{m} \right] = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

weil wir zwei symmetrische Tensoren mit einem antisymmetrischen Tensor kontrahiert haben. Weil M_i *explizit* zeitunabhängig ist, folgt aus Gl. (27), dass M_i erhalten ist.

Wir betrachten jetzt zwei Komponenten des Drehimpulsvektors und berechnen deren Poisson-Klammer. Wir wissen bereits, dass wir ein weiteres Bewegungintegral finden sollen. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \{M_a, M_b\} &= \epsilon_{aij} \epsilon_{bkm} \{r_i p_j, r_k p_m\} = \epsilon_{aij} \epsilon_{bkm} [r_i p_m \{p_j, r_k\} + p_j r_k \{r_i, p_m\}] \\ &= \epsilon_{aij} \epsilon_{bkm} [r_i p_m \delta_{jk} - p_j r_k \delta_{im}]. \end{aligned} \quad (28)$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, benutzen wir folgende Formel

$$\epsilon_{aij} \epsilon_{bkm} \delta_{jm} = \delta_{ab} \delta_{ik} - \delta_{ak} \delta_{ib}, \quad (29)$$

und erhalten

$$\{M_a, M_b\} = p_a r_b - p_b r_a = -\epsilon_{abc} \epsilon_{cij} r_i p_j = -\epsilon_{abc} M_c. \quad (30)$$

Wir sehen, dass die Poisson-Klammer zweier Komponenten des Drehimpulses die jeweils dritte Komponente des Drehimpuls erzeugt. Weil alle Komponenten des Drehimpulses erhalten sind, illustriert diese Berechnung die vorherige Aussage, dass die Poisson-Klammer zweier Erhaltungsgrößen auch eine Erhaltungsgröße ist.

3. Hamiltonsche Gleichungen aus dem Variationsprinzip: Die Hamiltonschen Gleichungen können wir auch aus einem Variationsprinzip herleiten. Wir beginnen mit der Wirkung

$$S = \int L dt \quad (31)$$

und drücken die Lagrangefunktion durch die Hamiltonfunktion aus

$$L = p\dot{q} - H. \quad (32)$$

Wir benutzen dann

$$p\dot{q} dt = p dq, \quad (33)$$

und erhalten den Ausdruck für die Wirkung

$$S = \int (p dq - H dt). \quad (34)$$

Wir berechnen dann die Variation

$$\delta S = \int \left[\delta p dq + p d\delta q - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \right]. \quad (35)$$

In der obigen Formel sieht der Term $\int p d\delta q$ etwas unkonventionell aus. Um diesen Term zu vereinfachen, schreiben wir

$$\int p d\delta q = \int (d(p \delta q) - \delta q dp) = p \delta q|_{t_1}^{t_2} - \int \delta q dp = - \int \delta q dp, \quad (36)$$

weil $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ sind. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[\delta p dq - \delta q dp - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \delta q + \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt \right] \\ &= \int \left[\delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + \delta q \left(-dp - \frac{\partial H}{\partial q} dt \right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Wir fordern, dass $\delta S = 0$ für beliebige Variationen δp und δq gilt. Daraus folgen die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (38)$$

10 Kanonische Transformationen, Phasenraum, Satz von Liouville

Kanonische Transformationen und erzeugende Funktion: Im Hamiltonschen Formalismus sind Koordinaten und Impulse unabhängige Variablen. Deswegen entsteht die Möglichkeit, eine Variablentransformation zu machen, die Impulse und Koordinaten mischt. Solche Transformationen sind im Lagrange-Formalismus nicht möglich. Wir werden sehen, dass die Möglichkeit, solche Transformationen zu benutzen, einen großen Vorteil der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik darstellt.

Nehmen wir an, dass die Koordinaten q und Impulse p unsere ursprünglichen kanonischen Variablen sind. Wir wollen nun aber andere Variablen, Q und P , benutzen. Der Zusammenhang zwischen alten und neuen Variablen lautet

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t). \quad (1)$$

Wir nennen eine solche Transformation "kanonisch", falls die Bewegungsgleichungen für Q und P die Hamiltonsche Form haben

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q}. \quad (2)$$

Hier ist K die neue Hamiltonfunktion, die an dieser Stelle noch unbekannt ist.

Wir wollen jetzt herausfinden, unter welchen Bedingungen eine Transformation kanonisch ist. Hierzu können wir die Wirkung entweder mit den alten oder mit den neuen Variablen berechnen

$$S_A = \int (p dq - H dt), \quad S_N = \int (P dQ - K dt). \quad (3)$$

Diese zwei Wirkungen müssen nicht unbedingt gleich sein, aber, weil die physikalischen Trajektorien identisch sein sollen, muss die Variation der beiden Wirkungen simultan Null sein. Damit muss gelten

$$0 = \delta(S_A - S_N) = \delta \int (p dq - H dt - P dQ + K dt). \quad (4)$$

Diese Gleichung können wir erfüllen, indem der Integrand eine totale Ableitung einer Funktion von q und Q (die man *erzeugende Funktion* nennt) ist, also

$$dF(q, Q, t) = p dq - H dt - P dQ + K dt. \quad (5)$$

Nach der Integration bekommt man aus Gl. (5) $\delta F(q(t_{1,2}), Q(t_{1,2}), t_{1,2})$. Diese Variation verschwindet aber, weil $\delta q(t_{1,2})$ und $\delta Q(t_{1,2})$ Null sein sollen.

Aus Gl. (5) folgen die Zusammenhänge zwischen den Ableitungen der erzeugenden Funktion und verschiedenen Koordinaten und Impulsen sowie der alten und neuen Hamiltonfunktion

$$\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q} = -P, \quad \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} = K - H. \quad (6)$$

Invarianz der Poisson-Klammern: Eine der wichtigsten Eigenschaften der kanonischen Transformationen ist die Invarianz der Poisson-Klammern unter kanonischen Transformationen. Wenn wir also die Poisson-Klammern von zwei beliebigen, von Koordinaten und Impulsen abhängenden Funktionen $F_{1,2}$ berechnen, gilt

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}, \quad (7)$$

wobei $\{\dots\}_{x,y}$ die Poisson-Klammern bezeichnet, die wir mit Hilfe der Ableitungen nach den Variablen x, y berechnen.

Um diese Aussage zu beweisen, fangen wir mit elementaren Klammern an. Weil zum Beispiel

$$\{Q, P\}_{P,Q} = -1 \quad (8)$$

gilt, muss auch

$$\{Q, P\}_{p,q} = -1 \quad (9)$$

gelten. Um das zu überprüfen, schreiben wir

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q}. \quad (10)$$

Weil die Variablen Q und P kanonisch sind, existiert eine Funktion F , deren Ableitungen p und P ergeben

$$p = \left. \frac{\partial F}{\partial q} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F}{\partial Q} \right|_q. \quad (11)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_p &= - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_p - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right|_p, \\ \left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_q &= - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial q}{\partial p} \right|_q = - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \right|. \end{aligned} \quad (12)$$

Wir benutzen diese Ausdrücke in Gl. (10) und erhalten

$$\{Q, P\}_{p,q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \right] - \left[- \frac{\partial^2 F}{\partial Q^2} \frac{\partial Q}{\partial p} \right] \frac{\partial Q}{\partial q} = - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} = -1. \quad (13)$$

Der letzte Schritt folgt aus

$$1 = \frac{\partial}{\partial p} p = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial p} + \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q \partial q} \frac{\partial Q}{\partial p}. \quad (14)$$

Die Gleichung (13) ist das gewünschte Ergebnis.

Wir können dann den allgemeinen Fall Gl. (7) untersuchen. Wir fangen an mit

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial F_2}{\partial p}, \quad (15)$$

und schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial q} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial p} &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p}, \end{aligned} \quad (16)$$

sodass

$$\begin{aligned} \{F_1, F_2\}_{p,q} &= \frac{\partial F_1}{\partial p} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} \right) - \frac{\partial F_1}{\partial q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) + \frac{\partial F_2}{\partial P} \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{F_1, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{F_1, P\}_{p,q}. \end{aligned} \quad (17)$$

Es ist nützlich, diese Formel für $F_1 = Q$ oder $F_1 = P$ zu verwenden. Falls $F_1 = Q$ ist, erhalten wir

$$\{Q, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{Q, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{Q, P\}_{p,q} = -\frac{\partial F_2}{\partial P}, \quad (18)$$

weil $\{Q, Q\} = 0$ und $\{Q, P\} = -1$ sind. Analog gilt

$$\{P, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \{P, Q\}_{p,q} + \frac{\partial F_2}{\partial P} \{P, P\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q}. \quad (19)$$

Wir benutzen die Ergebnisse in Gl. (18,19) in Gl. (17) und erhalten

$$\{F_1, F_2\}_{p,q} = \frac{\partial F_2}{\partial Q} \frac{\partial F_1}{\partial P} - \frac{\partial F_2}{\partial P} \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \{F_1, F_2\}_{P,Q}. \quad (20)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Poisson-Klammern invariant unter kanonischen Transformationen sind.

Der harmonische Oszillator und kanonische Transformationen: Kanonische Transformationen geben uns die Möglichkeit, verschiedene Variablen zu wählen, um mechanische Systemen zu beschreiben. Als Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator. Die Lagrangefunktion lautet bekannterweise

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (21)$$

Die Hamiltonfunktion ist dann

$$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (22)$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \quad (23)$$

Wir führen nun neue Variablen ein. Sie lauten

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad a^\dagger = \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}, \quad (24)$$

Wir können dann die Poisson-Klammer der Variablen a, a^\dagger berechnen. Wir erhalten

$$\{a, a^\dagger\} = \left\{ \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \frac{m\omega x - ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} (-i\{x, p\} + i\{p, x\}) = i. \quad (25)$$

Wenn wir

$$Q = a, \quad ia^\dagger = P \quad (26)$$

als unsere neue "Koordinate" und "Impuls" wählen, erhalten wir

$$\{P, Q\} = 1. \quad (27)$$

Die Transformation $(x, p) \rightarrow (Q, P)$ ist dann kanonisch.

Um die neue Hamiltonfunktion zu konstruieren, brauchen wir die erzeugende Funktion $F(x, Q, t)$. Diese Funktion hat folgende Eigenschaften

$$p = \left. \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial x} \right|_Q, \quad P = - \left. \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial Q} \right|_x. \quad (28)$$

Wir werden diese Gleichungen als Differentialgleichungen betrachten, die wir lösen können, um die Funktion $F(x, Q, t)$ zu finden. Es ist vorteilhaft, die

Gleichung für p zu integrieren, weil wir aus der vorherigen Diskussion wissen, wie wir p durch x und Q ausdrücken können. Wir schreiben

$$p = im\omega x - ie^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}Q = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_Q, \quad (29)$$

integrieren diese Gleichung und erhalten

$$F = \frac{im\omega x^2}{2} - ie^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}Qx + F_1(Q, t), \quad (30)$$

wobei $F_1(Q, t)$ eine beliebige Funktion von Q und t ist. Um diese Funktion zu bestimmen, berechnen wir $P = -\partial F/\partial Q$. Wir erhalten

$$P = ie^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}x - \frac{\partial F_1}{\partial Q}. \quad (31)$$

Weil $P = ia^\dagger$ ist, können wir P durch x und Q ausdrücken. Wir erhalten

$$P = i\sqrt{2m\omega}xe^{-i\omega t} - iQe^{-2i\omega t}. \quad (32)$$

Wir vergleichen Gln. (31,32) und erkennen, dass

$$\frac{\partial F_1}{\partial Q} = iQe^{-2i\omega t}. \quad (33)$$

Es folgt

$$F_1(Q) = \frac{iQ^2}{2}e^{-2i\omega t}. \quad (34)$$

Die erzeugende Funktion lautet

$$F(x, Q, t) = \frac{im\omega x^2}{2} - ie^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}Qx + \frac{iQ^2}{2}e^{-2i\omega t}. \quad (35)$$

Wir können mit Hilfe dieser Funktion die neue Hamiltonfunktion berechnen. Wir benutzen Gl. (6) und schreiben

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H - \omega e^{-i\omega t}\sqrt{2m\omega}Qx + \omega Q^2 e^{-2i\omega t}. \quad (36)$$

Wir wollen die neue Hamiltonfunktion K durch Q und P ausdrücken. Wir benutzen

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{(m\omega x + ip)(m\omega x - ip)}{2m} = \omega aa^\dagger = -i\omega PQ \quad (37)$$

und

$$\omega Q^2 e^{-2i\omega t} - \omega e^{i\omega t} \sqrt{2m\omega} Q x = \omega Q \left(Q e^{-2i\omega t} - e^{i\omega t} \sqrt{2m\omega} x \right) = i\omega Q P. \quad (38)$$

Wir addieren die zwei Beiträge und erhalten

$$K = 0. \quad (39)$$

Die Bewegungsgleichungen sind dann

$$\frac{dQ}{dt} = \{K, Q\} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = \{K, P\} = 0. \quad (40)$$

Die Lösungen sind trivial; sowohl Q als auch P sind Konstanten, die wir als Q_0 und P_0 bezeichnen.

Um die Zeitabhängigkeit von x zu bestimmen, drücken wir x durch Q und P aus und erhalten

$$x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (Q_0 e^{-i\omega t} - iP_0 e^{i\omega t}). \quad (41)$$

Wir suchen eine reelle Lösung. Deswegen schreiben wir $Q_0 = A\sqrt{\frac{m\omega}{2}} e^{-i\phi_0}$ und $-iP_0 = A\sqrt{\frac{m\omega}{2}} e^{i\phi_0}$. Wir erhalten schließlich

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0). \quad (42)$$

Zeitevolution als kanonische Transformation: Interessanterweise können wir die *Zeitentwicklung eines mechanischen Systems als kanonische Transformation verstehen*. Um das zu erklären, betrachten wir die Wirkung S als eine Funktion von Anfangs- und End-Koordinaten eines Teilchens und der Zeit, die das Teilchen braucht, um die End-Koordinaten zu erreichen. Wir schreiben

$$S = S(q(t_2), q(t_1), t_2, t_1). \quad (43)$$

Wir haben schon gesehen, dass dS im Allgemeinen als

$$dS = p dq - H dt \quad (44)$$

geschrieben werden kann. Das heißt, wenn wir die Änderung der Wirkung betrachten, die durch die Veränderung von $q(t_2)$, $q(t_1)$ und $t_{1,2}$ auftritt, erhalten wir

$$dS = p(t_2) dq(t_2) - p(t_1) dq(t_1) - H(t_2) dt_2 + H(t_1) dt_1. \quad (45)$$

Wir schreiben dann $t_2 = \tau + t$, $t_1 = t$ und halten τ fest. Dann ist $dt_2 = dt$ und $dt_1 = dt$. Die Variation der Wirkung lautet dann

$$dS = p(t_2) dq(t_2) - p(t_1) dq(t_1) - (H(t_2) - H(t_1))dt. \quad (46)$$

Das heißt

$$p(t_2) = \frac{\partial S}{\partial q(t_2)}, \quad p(t_1) = -\frac{\partial S}{\partial q(t_1)}, \quad H(t_2) - H(t_1) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (47)$$

Daraus folgt, dass wir die Wirkung S als die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation betrachten können. Diese "Transformation" drückt die Koordinaten und Impulse zum Zeitpunkt $t + \tau$ durch die Koordinaten und Impulse zum Zeitpunkt t aus

$$p(t), q(t) \rightarrow p(t + \tau), q(t + \tau). \quad (48)$$

Dementsprechend kann man die Zeitevolution eines mechanisches System als eine Reihe von kanonischen Transformationen interpretieren.

Der Phasenraum: Wir betrachten ein mechanisches System mit n Freiheitsgraden. Wenn wir den Hamilton-Formalismus verwenden, beschreiben wir den Zustand des Systems zu jedem Zeitpunkt durch die Werte von n Koordinaten und n Impulsen. Wir können dann einen Vektor $(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ einführen, um den Zustand des Systems zu beschreiben. Dieser Vektor ist Element eines $2n$ -dimensionalen Raumes, den wir als *Phasenraum* bezeichnen. Die Zeitentwicklung des System erzeugt *eine Kurve im Phasenraum*.

Wir diskutieren einige Beispiele. Im Fall einer freien Bewegung eines Teilchens mit der Masse m gilt

$$q = \frac{p}{m}t + q_0. \quad (49)$$

Dies ist eine Gerade im Phasenraum.

Im Fall des harmonischen Oszillators gilt

$$q = A \cos(\omega t + \phi), \quad p = -\omega A m \sin(\omega t + \phi). \quad (50)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{q^2(t)}{A^2} + \frac{p^2(t)}{A^2 m^2 \omega^2} = 1. \quad (51)$$

Die entsprechende Kurve im Phasenraum ist eine Ellipse.

Im Phasenraum können wir auch Volumen berechnen. Zum Beispiel erhalten wir das Volumen in einem zweidimensionalen Phasenraum durch die

Berechnung des Integrals

$$V = \int_S dp dq, \quad (52)$$

wobei S das Integrationsgebiet definiert.

Was passiert mit dem Volumen, wenn wir eine kanonische Transformation $(p, q) \rightarrow (P, Q)$ machen? Dann erhalten wir

$$V = \int_S dp dq = \int_{S'} \frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} dP dQ. \quad (53)$$

Die Jacobi-Determinante der Transformation ist für kanonische Transformationen trivial

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(P, Q)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial P} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial Q} \end{vmatrix} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = \{p, q\}_{P, Q} = \{P, Q\} = 1. \quad (54)$$

Es folgt, dass Phasenraumvolumen invariant unter kanonischen Transformationen sind

$$V = \int_S dp dq = \int_{S'} dP dQ. \quad (55)$$

Satz von Liouville: Wir betrachten ein mechanisches System. Mögliche Zustände des Systems zur Zeit t_1 bilden ein Gebiet S_1 im Phasenraum. Das Volumen des Systems ist dann

$$V(t_1) = \int_{S_1} dp dq. \quad (56)$$

Der Satz von Liouville besagt nun, dass das Volumen des Systems invariant unter Zeitevolution bleibt

$$V(t_2) = V(t_1). \quad (57)$$

Diese Aussage folgt aus

- der Invarianz der Phasenraumvolumen unter kanonische Transformationen und
- der Möglichkeit, die Zeitevolution mechanischer Systeme als kanonische Transformation zu beschreiben.

11 Physik des starren Körpers

Die Kinematik des starren Körpers: Unter einem "starren" Körper versteht man ein mechanisches System vieler Teilchen, deren Abstände festgelegt sind und sich nicht ändern können. Um starre Körper beschreiben zu können, ist es nützlich, zwei Koordinatensysteme einzuführen: ein Laborsystem (L -System) mit fixierten Achsen und ein weiteres Koordinatensystem, das mit dem Körper starr verbunden ist (K -System). Der Ursprung des K -Systems ist dann fest mit einem Punkt O des Körpers assoziiert.

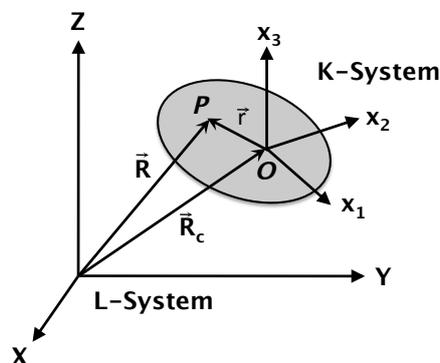


Abbildung 7: Koordinatensysteme zur Beschreibung eines starren Körpers.

Wir werden die Koordinaten im L -System mit großen und im K -System mit kleinen Buchstaben bezeichnen. Dementsprechend hat ein Punkt des starren Körpers den Ortsvektor \vec{R} in L -System und den Ortsvektor \vec{r} im K -System. Der Ortsvektor des Punkts O sei \vec{R}_c . Dann gilt

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{r}. \quad (1)$$

Beachten Sie, dass wir gerade gesagt haben, dass die beiden Vektoren in unterschiedlichen Bezugssystemen definiert sind und wir sie jetzt addieren wollen. Dazu ist es selbstverständlich wichtig, dass beide Vektoren zunächst in einem gemeinsamen Bezugssystem ausgedrückt werden. Das bedeutet beispielsweise, dass sich der Vektor \vec{r} , der sich im K -System nicht ändert, zunächst in das L -System transformiert werden muss, wo dieser zeitlich nicht konstant ist. Weil die Abstände zwischen den Punkten des starren Körper fix sind, ist der Betrag von \vec{r} in allen Bezugssystemen fix. Das heißt, dass wenn sich \vec{r} gemäß $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ ändert, müssen \vec{r} und $d\vec{r}$ orthogonal zueinander sein

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (2)$$

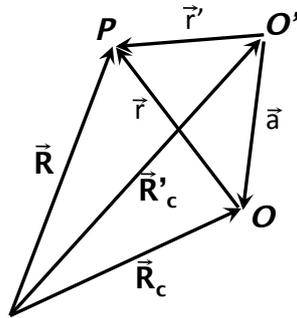


Abbildung 8: Die Verschiebung des Ursprungs.

Die mögliche Bewegung ist dann eine Drehung und wir schreiben

$$d\vec{r} = d\vec{\phi} \times \vec{r}, \quad (3)$$

wobei $d\vec{\phi} = d\phi \vec{n}$ und $d\phi$ der Drehwinkel sowie \vec{n} die Drehachse sind. Wir berechnen dann die Geschwindigkeit eines Punkts des Körpers und erhalten

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \vec{V}_c + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}. \quad (4)$$

Die Größe $\vec{\Omega}$ beschreibt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers im K -System, die Größe \vec{V}_c die Geschwindigkeit des Punkts O im L -System.

Es ist natürlich möglich, verschiedene Systeme mit dem starren Körper zu assoziieren. Falls wir ein System K' wählen, dessen Ursprung relativ zum K -System um den Vektor \vec{a} verschoben ist,

$$\vec{R}_c = \vec{R}'_c + \vec{a}, \quad (5)$$

finden wir die Geschwindigkeiten

$$\vec{V} = \vec{V}'_c + \vec{\Omega} \times \vec{a} + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (6)$$

sodass

$$\vec{V}_c = \vec{V}'_c + \vec{\Omega} \times \vec{a}. \quad (7)$$

Die kinetische Energie des starren Körpers und der Trägheitstensor:

Um Mechanik zu machen, brauchen wir die kinetische und die potentielle Energie des starren Körpers. Wir werden die kinetische Energie des Körpers berechnen, indem wir den Körper als eine Menge von Partikeln betrachten. Die kinetische Energie ist dann die Summe der kinetischen Energien der Teilchen.

Wir schreiben die Geschwindigkeiten im L -System und wählen den Schwerpunkt des Körpers als den Ursprung des K -Systems. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0 \quad \text{sodass} \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_i = M \vec{R}_c, \quad \text{wobei} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \quad (8)$$

Die kinetische Energie des Körpers ist dann

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{V}_i^2}{2}, \quad (9)$$

wobei die Geschwindigkeit \vec{V}_i des Punkts i

$$\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}_i \quad (10)$$

lautet. Wir berechnen dann \vec{V}_i^2

$$\vec{V}_i^2 = \vec{V}_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] + [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2 \quad (11)$$

und schreiben entsprechend die kinetische Energie des Körpers als die Summe dreier Terme

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (12)$$

wobei

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{V}_c^2}{2} = \frac{M \vec{V}_c^2}{2}, \\ T_2 &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i] = \vec{V}_c \cdot [\vec{\Omega} \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i] = 0, \\ T_3 &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Beachten Sie, dass T_2 Null ist, weil der Ursprung des K -Systems im Schwerpunkt des Körpers liegt.

Wir können T_3 weiter vereinfachen

$$T_3 = \sum_{i=1}^N \frac{m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]^2}{2} = \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{2} \sum_{i=1}^N m_i \epsilon_{\rho\alpha\alpha'} \epsilon_{\rho\beta\beta'} \vec{r}_{i,\alpha'} \vec{r}_{i,\beta'} \quad (14)$$

Für zwei Levi-Civita-Tensoren gilt

$$\epsilon_{\rho\alpha\alpha'} \epsilon_{\rho\beta\beta'} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\alpha'\beta'} - \delta_{\alpha\beta'} \delta_{\alpha'\beta}. \quad (15)$$

Wir setzen den Ausdruck Gl. (15) in Gl. (14) ein und erhalten

$$T_3 = \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2}, \quad (16)$$

wobei der Trägheitstensor des starren Körpers $I_{\alpha\beta}$ lautet

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\alpha\beta} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_{i,\alpha} \vec{r}_{i,\beta}). \quad (17)$$

Die kinetische Energie des starren Körpers

$$T = \frac{M\vec{V}_c^2}{2} + \frac{I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta}{2} \quad (18)$$

besteht aus zwei Beiträgen – der kinetischen Energie des Körpers als Ganzes und der Rotationsenergie um den Schwerpunkt des Körpers. Diese Rotationsenergie beschreiben wir mit Hilfe des Trägheitstensors $I_{\alpha\beta}$.

Ein Trägheitstensor hat folgende Eigenschaften:

1. Es folgt aus der Definition, dass der Trägheitstensor symmetrisch ist

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}. \quad (19)$$

2. Falls wir den Körper durch eine kontinuierliche Massendichte $\rho(\vec{r})$ charakterisieren, berechnen wir den Trägheitstensor als ein Integral

$$I_{\alpha\beta} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\vec{r}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta), \quad M = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}). \quad (20)$$

3. Ein symmetrischer Tensor (oder eine Matrix) kann diagonalisiert werden, falls das richtige K -System gewählt wird. Der Tensor $I_{\alpha\beta}$ sieht dann so aus

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Die Achsen eines solchen K -Systems nennen wir die "Hauptträgheitsachsen". Die Eigenwerte des Trägheitstensors $I_{1,2,3}$ bezeichnen wir als die Hauptträgheitsmomente.

4. Einen Körper mit unterschiedlichen I_1, I_2, I_3 nennt man "unsymmetrischer Kreisel". Ein Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten ist dann ein "symmetrischer Kreisel" und ein Körper mit gleichen $I_{1,2,3}$ ist ein Kugelkreisel.

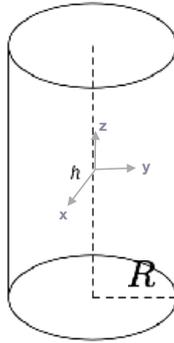


Abbildung 9: Der Zylinder.

5. Die gegebenen Formeln für den Trägheitstensor entsprechen der Situation, in der der Ursprung des K -Systems im Schwerpunkt des Körpers liegt. Wenn wir den Trägheitstensor in einem anderen, neuen System berechnen wollen, dann brauchen wir

$$I_{\alpha\beta}^{\text{neu}} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\rho}_i^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{\rho}_{i,\alpha} \vec{\rho}_{i,\beta}). \quad (22)$$

Falls der Ortsvektor des Schwerpunkts im neuen Koordinatensystem \vec{a} ist, gilt

$$\vec{\rho}_i = \vec{a} + \vec{r}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (23)$$

Wir benutzen diesen Ausdruck in Gl. (22) und erhalten

$$I_{\alpha\beta}^{\text{neu}} = I_{\alpha\beta} + M (\vec{a}^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta), \quad (24)$$

wobei wir benutzt haben, dass $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0$.

Als Beispiel berechnen wir den Trägheitstensor eines Zylinders mit homogener Massendichte. Ganz allgemein lohnt es sich, das K -System so zu wählen, dass wir die Symmetrie des Körpers berücksichtigen. Der Ursprung des K -Systems liegt im Schwerpunkt, die z -Achse des K -Systems ist entlang der Symmetrieachse des Zylinders und die x, y -Achsen sind beliebig gewählt. Die Massendichte bezeichnen wir mit μ , die Höhe des Zylinders mit h und der Radius des Zylinders ist R . Dann gilt

$$I_{\alpha\beta} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{x^2+y^2 < R^2} dx dy (\delta_{\alpha\beta} (x^2 + y^2 + z^2) - r_\alpha r_\beta). \quad (25)$$

Um die Integration zu vereinfachen, sollten wir Zylinderkoordinaten wählen. Wir schreiben

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z), \quad dx dy = \rho d\rho d\phi. \quad (26)$$

Es ist einfach zu sehen, dass alle nicht-diagonalen Beiträge zum Trägheitstensor Null sind. Z.B.

$$I_{xy} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi [-\rho^2 \cos \phi \sin \phi] = 0, \quad (27)$$

weil

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \sin \phi = 0. \quad (28)$$

Ähnlich

$$I_{xz} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi [-z\rho \cos \phi] = 0, \quad (29)$$

und so weiter.

Wir müssen dann nur diagonale Beiträge berechnen. Wir fangen mit I_{zz} an. Dieser Beitrag lautet

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) \\ &= \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \rho^2 = \frac{2\pi\mu h R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}, \end{aligned} \quad (30)$$

wobei die Masse des Zylinders M durch

$$M = \mu\pi R^2 h \quad (31)$$

gegeben ist.

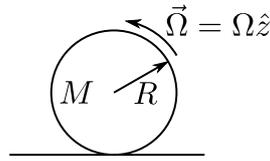


Abbildung 10: Die Bewegung eines Zylinders auf einer Ebene.

Wir berechnen dann I_{xx} . Es gilt

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) \\
 &= \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi (z^2 + \rho^2 \sin^2 \phi) = \mu \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R d\rho \rho 2\pi \left(z^2 + \frac{\rho^2}{2} \right) \\
 &= \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right).
 \end{aligned} \tag{32}$$

Offensichtlich gilt wegen der Zylindersymmetrie $I_{yy} = I_{xx}$.

Als Beispiel schreiben wir die kinetische Energie des Zylinders, der auf einer Ebene ohne Rutschen rollt, siehe Abb. 10. Die Drehgeschwindigkeit ist Ω . Die kinetische Energie ist durch die Summe der kinetischen Energie des Körpers als Ganzes und der kinetischen Energie der Drehung gegeben, siehe Gl. (18),

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{I_{zz}\Omega^2}{2}. \tag{33}$$

Weil der Zylinder ohne Rutschen rollt, ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts durch

$$V = \Omega R \tag{34}$$

gegeben. Wir benutzen $I_{zz} = MR^2/2$ und erhalten

$$T = \frac{3MR^2\Omega^2}{4}. \tag{35}$$

Der Drehimpuls des starren Körpers und die freie Bewegung: Wir werden jetzt den Drehimpuls des starren Körpers diskutieren. Der Drehimpuls ist wichtig, weil er für eine kräftefreie Bewegung eine Erhaltungsgröße ist. Der Gesamtdrehimpuls des Körpers ist die Summe der Drehimpulse der Massenpunkte. Wir berechnen den Drehimpuls im Ruhesystem des Schwerpunkts des

Körpers (sodass $\vec{V}_c = \vec{0}$). Es gilt

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]. \quad (36)$$

Dann

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]]. \quad (37)$$

Wir können das Vektorprodukt vereinfachen

$$[\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]] = \vec{\Omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i). \quad (38)$$

Dann erhalten wir

$$\vec{M}_\alpha = I_{\alpha\beta} \vec{\Omega}_\beta \quad (39)$$

oder, falls wir den Trägheitstensor als Matrix betrachten,

$$\vec{M} = \hat{I} \vec{\Omega}. \quad (40)$$

Wir wollen nun untersuchen, wie sich der freie starre Körper bewegt. In diesem Fall ist der Schwerpunkt des Körpers in Ruhe und der Drehimpuls ist erhalten. Im Falle eines Kugelkreisels ist die Matrix \hat{I} proportional zur Einheitsmatrix. Das bedeutet, dass

$$\vec{M} = I \vec{\Omega}, \quad \Rightarrow \vec{\Omega} = \frac{\vec{M}}{I}. \quad (41)$$

Der freie Kugelkreisel dreht sich also um die Achse \vec{M} mit der Winkelgeschwindigkeit Ω .

Im Falle eines symmetrischen Kreisels ist die Situation komplizierter. Wir können die Achsen des K -Systems so wählen, dass der Trägheitstensor diagonal ist. Dann gilt im K -System

$$\vec{M} = \hat{I} \vec{\Omega}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Weil der Vektor \vec{M} erhalten ist, können wir die Achsen so wählen, dass die Achse x_2 immer in der Ebene liegt, die aus der Symmetrieachse des Körpers und dem Vektor \vec{M} aufgespannt wird. Die Achse x_1 wollen wir dann senkrecht zu dieser Ebene wählen. Diese Konstruktion bedeutet, dass die Projektion des Drehimpulses auf die x_1 -Achse Null ist. Das bedeutet dann, dass $\Omega_1 = 0$ ist, und es folglich keine Drehung in der (x_3, x_2) -Ebene gibt. Wenn wir den Winkel

zwischen \vec{M} und der Symmetrieachse des Körpers als θ bezeichnen, ist dieser Winkel konstant. Wir schreiben dann

$$M_2 = M \sin \theta = I \Omega_2, \quad M_3 = M \cos \theta = I_3 \Omega_3, \quad (43)$$

sodass

$$\Omega_2 = \frac{M \sin \theta}{I}, \quad \Omega_3 = \frac{M \cos \theta}{I_3}. \quad (44)$$

Um die Art der Bewegung besser zu verstehen, schreiben wir

$$\vec{\Omega} = \Omega_M \vec{e}_M + \tilde{\Omega}_3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_M = \frac{\vec{M}}{M}, \quad (45)$$

wobei Ω_M die Geschwindigkeit der Drehung um die Achse des Drehimpulses \vec{M} beschreibt und $\tilde{\Omega}_3$ die Drehung um die Symmetrieachse des Körpers (ohne die Position des Körpers im Raum zu ändern). In diesem Sinne beschreibt $\tilde{\Omega}_3$ "interne" und Ω_M "externe" Drehungen.

Um Ω_M zu erhalten, multiplizieren wir Gl. (45) mit \vec{e}_2 . Es folgt

$$\Omega_2 = \Omega_M \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_M = \Omega_M \sin \theta. \quad (46)$$

Wir benutzen dann den Ausdruck für Ω_2 aus Gl. (44) und erhalten

$$\Omega_M = \frac{M}{I}. \quad (47)$$

Der Kreisel präzediert mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_M um die Richtung des Drehimpulses.

Euler-Gleichungen: Wir können die gleiche physikalische Frage auch anders untersuchen. Wie vorher betrachten wir einen freien Kreisel. Der Drehimpuls des Kreisels ist erhalten. Das heißt, dass

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0. \quad (48)$$

Wir können aber den Drehimpuls des Kreisels im K -System als $\vec{M} = M_i \vec{e}_i$ schreiben. Weil das K -System rotiert, sind die Komponenten M_i keine Konstanten. In der Tat, gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \vec{M} = \frac{d}{dt} [M_i \vec{e}_i] = \vec{e}_i \frac{dM_i}{dt} + M_i \frac{d\vec{e}_i}{dt}. \quad (49)$$

Die Zeitableitung des Vektors \vec{e}_i lautet

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = [\vec{\Omega} \times \vec{e}_i]. \quad (50)$$

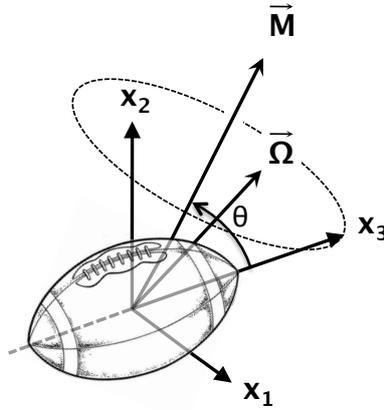


Abbildung 11: Ein symmetrischer Kreisel.

Wir benutzen den Ausdruck Gl. (50) in Gl. (49), multiplizieren Gl. (49) mit \vec{e}_i und erhalten

$$0 = \frac{dM_i}{dt} + M_j \vec{e}_i \cdot [\vec{\Omega} \times \vec{e}_j]. \quad (51)$$

Wir schreiben $\vec{\Omega} = \Omega_i \vec{e}_i$ und benutzen

$$\vec{e}_j \cdot [\vec{e}_i \times \vec{e}_k] = \epsilon_{jik}, \quad (52)$$

um aus Gl. (51) Folgendes zu erhalten

$$\frac{dM_i}{dt} + \epsilon_{ijl} \Omega_l M_j = 0. \quad (53)$$

Wir wählen dann das K -System so, dass der Trägheitstensor diagonal ist, sodass $M_i = I_i \Omega_i$, und erhalten aus Gl. (53)

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3, \quad \frac{d\Omega_3}{dt} = \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2. \quad (54)$$

Diese Gleichungen nennt man die *Euler-Gleichungen*.

Wir lösen jetzt diese Gleichungen für den Fall eines Kugelkreisels und eines symmetrischen Kreisels. Für Kugelkreisel gilt $I_1 = I_2 = I_3$, sodass $d\vec{\Omega}/dt = 0$. D.h. dass $\vec{\Omega}$ zeitunabhängig ist.

Im Fall eines symmetrischen Kreisels haben wir $I_1 = I_2 \neq I_3$. Dann gilt

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_1 \Omega_3, \quad \frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \quad (55)$$

Demzufolge ist Ω_3 zeitunabhängig und falls wir die Notation

$$\gamma = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3 \quad (56)$$

eingeführen, lauten die Gleichungen für $\Omega_{1,2}$

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \gamma \Omega_2, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = -\gamma \Omega_1. \quad (57)$$

Wir leiten dann die erste Gleichung nach der Zeit ab, benutzen die zweite Gleichung, um $d\Omega_2/dt$ zu eliminieren und erhalten

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \gamma^2 \Omega_1 = 0. \quad (58)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist dann

$$\Omega_1 = \Omega_0 \cos(\gamma t + \phi) \quad (59)$$

und

$$\Omega_2 = -\Omega_0 \sin(\gamma t + \phi). \quad (60)$$

Das bedeutet, dass

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \Omega_0^2 \quad (61)$$

zeitunabhängig ist. Weil Ω_3 auch zeitunabhängig ist, präzediert $\vec{\Omega}$ um die Symmetrieachse des Kreisels mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\gamma = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3. \quad (62)$$

Aus der Relation zwischen \vec{M} und $\vec{\Omega}$,

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_1 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3 \quad (63)$$

folgt, dass der Vektor \vec{M} auch um die Symmetrieachse des Kreisels präzediert. Das ist die *K*-System Beschreibung der Präzession der Symmetrieachse des Kreisels um den Vektor des Drehimpulses im *L*-System, die wir vorher schon diskutiert haben.

12 Eulerwinkel

Eine nützliche Parametrisierung des K -Systems erhält man durch die sogenannten Eulerwinkel. Um diese Winkel einzuführen, brauchen wir ein paar Definitionen.

Die Achsen des L -Systems bezeichnen wir als x, y, z , die Achsen des K -Systems als x_1, x_2, x_3 . Die Nullpunkte der beiden Systeme fallen zusammen und seien am Punkt O . Das K -System ist relativ zum L -System gedreht (siehe Abb. 12).

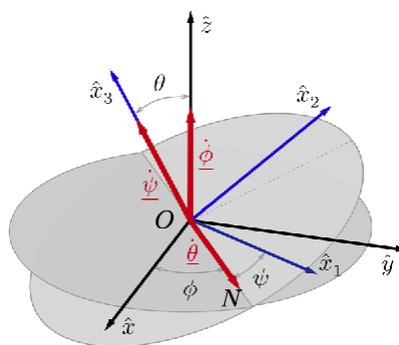


Abbildung 12: Konstruktion der Eulerwinkel.

Um diese Drehung zu beschreiben, nutzen wir die Erkenntnis, dass die (x_1, x_2) -Ebene die (x, y) -Ebene entlang einer "Knotenlinie" schneidet. Diese Linie bezeichnen wir als ON . Die Richtung dieser Linie ist durch den Vektor \vec{e}_N gegeben; der lautet

$$\vec{e}_N = [\vec{e}_z \times \vec{e}_3]. \quad (1)$$

Wir führen drei Winkel (*Eulerwinkel*) ein, um die Lage des K -Systems vollständig zu beschreiben:

- den Winkel ϕ zwischen \vec{e}_x und \vec{e}_N ;
- den Winkel ψ zwischen \vec{e}_N und \vec{e}_1 ;
- den Winkel θ zwischen \vec{e}_z und \vec{e}_3 .

Um das K -System in die richtige Lage zu rotieren, starten wir mit der Situation, dass die Achsen des K -Systems an denen des L -Systems ausgerichtet sind. Diese Situation entspricht $\phi = \psi = \theta = 0$. Dann fangen wir an, das K -System in einer bestimmten Reihenfolge um verschiedene Achsen zu rotieren, siehe auch Abb. 13.

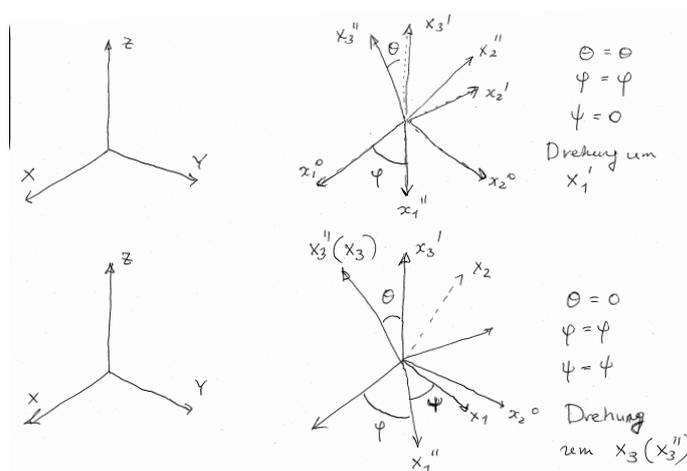
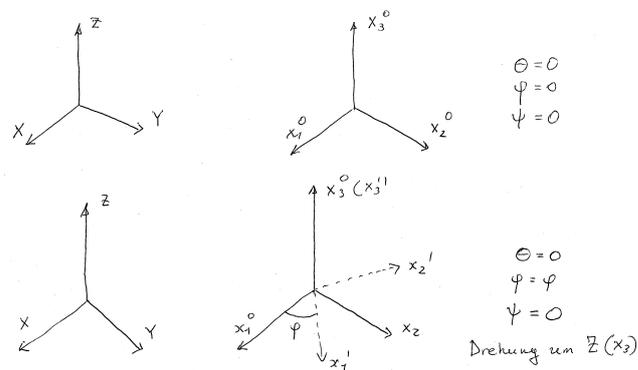


Abbildung 13: Die Reihenfolge der Drehungen.

Wir beginnen mit der Drehung des K -Systems um die z -Achse des L -Systems um den Winkel ϕ . Für einen Vektor \vec{r}_L im L -System sind dessen Komponenten im rotierten K -System durch

$$\vec{r}_K = \hat{R}_\phi \vec{r}_L, \quad (2)$$

gegeben, wobei

$$\hat{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Wir drehen als nächstes um die x_1 -Achse um den Winkel θ und dann um die x_3 -Achse um ψ . Dabei sind die Achsen der Drehungen jeweils die Achsen des K -Systems nach der ersten bzw. zweiten Drehung. Diese Drehungen beschreiben

wir mit den beiden Matrizen

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Das bedeutet, dass das Endergebnis der Drehung des K -Systems

$$\vec{r}_K = \hat{R}_\psi \hat{R}_\theta \hat{R}_\phi \vec{r}_L \quad (5)$$

lautet. Sind also die Komponenten des Vektors \vec{r} in L -System bekannt (\vec{r}_L), ergibt die linke Seite der Gleichung die Komponenten des Vektors \vec{r} in K -System (\vec{r}_K). Beachten Sie, dass wir in diesem Fall das Koordinatensystem rotieren und nicht den Vektor selbst.

Als Beispiel betrachten wir den Vektor \vec{e}_z . Im L -System ist dieser Vektor durch $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^T$ gegeben. Nach Gl. (5) sieht der Vektor \vec{e}_z im K -System so aus

$$(\vec{e}_z)_K = \sin \theta \sin \psi \vec{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3. \quad (6)$$

Die Winkelgeschwindigkeit beschreibt infinitesimale Drehungen um bestimmte Achsen. Weil unsere Winkel ϕ , θ und ψ die Drehungen um \vec{e}_z , \vec{e}_N und \vec{e}_3 entsprechen, schreiben wir

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_N + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (7)$$

Wir wollen nun den Vektor $\vec{\Omega}$ vollständig in das K -System umschreiben. Wir wissen schon, wie \vec{e}_z im K -System aussieht (siehe Gl. (6)) und \vec{e}_3 ist natürlich im K -System definiert. Den Vektor \vec{e}_N können wir im K -System rekonstruieren, indem wir erkennen, dass nach der ersten Drehung \vec{e}_N entlang der x_1 -Achse liegt. Die zweite Drehung lässt \vec{e}_N invariant (die Drehung ist gerade um \vec{e}_N) und die dritte ergibt

$$(\vec{e}_N)_K = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2. \quad (8)$$

Die Winkelgeschwindigkeit in K -System ist dann

$$\vec{\Omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \vec{e}_1 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \vec{e}_2 + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \vec{e}_3. \quad (9)$$

Wir können jetzt die Lagrangefunktion für die freie Bewegung des Kreisels schreiben. Wir wählen die Achsen des K -Systems als Hauptträgheitsachsen und schreiben die kinetische Energie als

$$T = \frac{I_1 \Omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \Omega_2^2}{2} + \frac{I_3 \Omega_3^2}{2}. \quad (10)$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit folgen aus Gl. (9). Im Falle eines symmetrischen Kreisels $I_2 = I_1 = I$, erhalten wir

$$L = T = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2. \quad (11)$$

Die Lagrangefunktion L ist von ψ und ϕ unabhängig; das heißt, dass die entsprechenden kanonischen Impulse erhalten sind. Wir finden

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta), \quad p_\phi = I \dot{\phi} \sin^2 \theta + p_\psi \cos \theta. \quad (12)$$

Für den freien Kiesel ist der Drehimpuls erhalten. Wir wählen die z -Achse des L -Systems entlang des Drehimpulses und erhalten folgende Gleichung im K -System

$$\vec{M} = M(\vec{e}_z)_K. \quad (13)$$

Andererseits können wir \vec{M} durch $\vec{\Omega}$ direkt im K -System schreiben

$$\vec{M} = I\Omega_1 \vec{e}_1 + I\Omega_2 \vec{e}_2 + I_3\Omega_3 \vec{e}_3. \quad (14)$$

Wir erhalten dann folgende Gleichung

$$M(\vec{e}_z)_K = I\Omega_1 \vec{e}_1 + I\Omega_2 \vec{e}_2 + I_3\Omega_3 \vec{e}_3. \quad (15)$$

Wir benutzen Gl. (6), um $(\vec{e}_z)_K$ durch $\vec{e}_{1,2,3}$ auszudrücken und erhalten drei Gleichungen aus Gl. (15)

$$\begin{aligned} M \sin \theta \sin \psi &= I (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi), \\ M \sin \theta \cos \psi &= I (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi), \\ M \cos \theta &= I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}). \end{aligned} \quad (16)$$

Es folgt aus Gl. (12), dass

$$(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \frac{p_\psi}{I_3} \quad (17)$$

und, wenn wir diese Gleichung in der letzten Gleichung in Gl. (16) benutzen, erhalten wir

$$\cos \theta = \frac{p_\psi}{M}. \quad (18)$$

Das bedeutet, dass der Winkel θ (der Winkel zwischen dem Drehimpuls und der Symmetrieachse des Kreisels) während der Bewegung konstant bleibt.

Dann erhalten wir aus der ersten Gleichung von Gl. (16)

$$\dot{\phi} = \frac{M}{I}. \quad (19)$$

Der Winkel ϕ beschreibt die Drehung um die z-Achse (die Richtung der Drehimpulses); $\dot{\phi}$ ist dann die Geschwindigkeit der Präzession der Symmetrieachse des Kreisels um die Richtung des Drehimpulses \vec{M} . Letztendlich, laut Gl. (7), beschreibt

$$\Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (20)$$

die Geschwindigkeit der Drehung des Körpers um die Symmetrieachse des Kreisels; Gl. (16) zufolge ist diese Winkelgeschwindigkeit konstant und durch

$$\Omega_3 = \frac{M \cos \theta}{I_3} \quad (21)$$

gegeben.