

# Vorlesung Mechanik B

SOMMERSEMESTER 2024

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

PROF. DR. M. M. MÜHLEITNER



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Vorläufige Inhaltsangabe . . . . .	1
1.2	Literatur . . . . .	1
1.3	Mechanik . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Lagrangeformalismus</b>	<b>3</b>
2.1	Lagrangegleichungen 1. Art . . . . .	3
2.2	Lagrangegleichungen 2. Art . . . . .	7
2.2.1	Verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	8
2.2.2	Die Lagrangefunktion . . . . .	9
2.3	Erhaltungsgrößen . . . . .	11
2.3.1	Energieerhaltung (“Homogenität der Zeit”) . . . . .	11
2.3.2	Zyklische Koordinaten . . . . .	12
2.3.3	Nichtkonservative Kräfte . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Variationsprinzipien in der Mechanik</b>	<b>17</b>
3.1	Die Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	17
3.2	Variationsprobleme mit Nebenbedingung . . . . .	19
3.2.1	Lagrange-Multiplikatoren . . . . .	20
3.2.2	Isoperimetrische Nebenbedingung . . . . .	22
3.3	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	24
3.3.1	Lagrangegleichungen 1. Art . . . . .	25
3.3.2	Bemerkungen . . . . .	26
3.3.3	Unbestimmtheit der Lagrangefunktion . . . . .	26
3.4	Symmetrien, Erhaltungsgrößen, Noethertheorem . . . . .	27
3.4.1	Erweitertes Noethertheorem . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Starrer Körper</b>	<b>33</b>
4.1	Eulersche Winkel . . . . .	37
4.1.1	Ergänzung zu den Euler-Drehungen . . . . .	40
4.2	Der Trägheitstensor . . . . .	41
4.3	Der Drehimpuls . . . . .	43
4.4	Transformation auf Hauptachsen . . . . .	45
4.5	Tensoren . . . . .	47
4.5.1	Orthogonale Transformation . . . . .	47
4.5.2	Definitionen . . . . .	49
4.6	Eulersche Gleichungen . . . . .	52

4.6.1	Herleitung der Gleichungen . . . . .	52
4.7	Schwerer Kreisel . . . . .	59
4.7.1	Schwerer symmetrischer Kreisel . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Hamiltonformalismus</b>	<b>65</b>
5.1	Kanonische Gleichungen . . . . .	65
5.2	Poissonklammer . . . . .	67
5.3	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	68
5.4	Kanonische Transformation . . . . .	69
5.5	Hamilton-Jacobi Gleichung . . . . .	72
5.6	Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung . . . . .	73
<b>A</b>	<b>Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen</b>	<b>77</b>
A.1	Gruppen . . . . .	77

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

Dieser Vorlesungsaufschrieb orientiert sich sehr stark an: T. Fließbach, *Mechanik*, Spektrum Verlag.

Disclaimer: Dieses Vorlesungsskript erhebt keinesfalls den Anspruch auf Fehlerfreiheit.

Das Skript ist nur für den KIT-internen Vorlesungsbegleitenden Gebrauch vorgesehen. Weiterverbreitung, Verarbeitung und anderweitige Nutzung der Materialien ist aus Persönlichkeits- und Urheberrechten untersagt.

### 1.1 Vorläufige Inhaltsangabe

- Lagrangeformalismus
- Variationsprinzipien in der Mechanik
- Beschleunigte und rotierende Bezugssysteme
- Starrer Körper
- Hamilton Formalismus

### 1.2 Literatur

- T. Fließbach, *Mechanik*, Spektrum Verlag.
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1&2, Klassische Mechanik*, Springer Verlag.
- H. Goldstein, C.P. Poole Jr., J.L Safko, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH.
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, I, Mechanik*, Verlag Harri Deutsch.
- J. Honerkamp und H. Römer, *Grundlagen der klassischen Theoretischen Physik*, Springer.
- F. Scheck, *Mechanik*, Springer.

- R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics Vol. 1*.

Mathematische Ergänzung

- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch.
- R. Shankar, *Basic Training in Mathematics (A Fitness Program for Science Students)*, Plenum Press, New York.

## 1.3 Mechanik

Die (klassische) Mechanik beschäftigt sich mit der Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten, denen die Bewegung materieller Körper unterliegt. Diese erfolgt unter dem Einfluß von Kräften, die in der Mechanik als bekannt vorausgesetzt werden. Es handelt sich also um die Lehre der Bewegung von Körpern und der dabei auf sie wirkenden Kräfte.

Die Mechanik lässt sich unterteilen in die Themengebiete *Kinematik* und *Dynamik*. Die Kinematik (vom altgriechischen *kinema*, d.h. Bewegung) behandelt die Beschreibung der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum. Hierfür werden die Größen Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eingeführt. Die Ursachen der Bewegung, die Kräfte, werden hierbei außer Acht gelassen. Die Dynamik (vom griechischen *dynamis*, d.h. Kraft) hingegen befasst sich mit der Wirkung von Kräften, also der Beschreibung der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Weiter kann die Mechanik unterteilt werden in spezielle Teilgebiete: die *Mechanik starrer Körper*, in der es um Massenpunkte und nicht deformierbare Körper geht, die *Kontinuumsmechanik*, die sich mit kontinuierlich ausgedehnten, deformierbaren Körpern befasst, und schließlich die *Statistische Mechanik*, die Teilgebiet der Thermodynamik ist.

Das mechanistische Weltbild des 19. Jahrhunderts beruht auf der Idee, dass die gesamte Wirklichkeit durch strikte Naturgesetze bestimmt wird. Physikalische Vorgänge sind dann verstanden, wenn sie mechanisch erklärt werden können. Man geht davon aus, daß alle Zustände zu allen Zeitpunkten errechenbar sind, wenn man die Naturgesetze und Zustände zu einem bestimmten Zeitpunkt exakt kennt. Wir wissen heute, daß dies auf viele Phänomene nicht anwendbar ist. So haben moderne physikalische Theorien zwar ihren Ursprung in der klassischen Mechanik. Diese hat aber nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Die Phänomene der Quantenwelt sehr kleiner Teilchen etwa müssen durch die Quantenmechanik beschrieben werden (siehe Vorlesungen Quantenmechanik I+II/Theorie D+E). Und bei Teilchengeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit muß die klassische Mechanik durch die relativistische Mechanik (siehe Vorlesungen Mechanik A, Elektrodynamik und Quantenmechanik II) ersetzt werden.

Im ersten Teil der Vorlesung (Mechanik A) wurde u.a. die Newtonsche Mechanik behandelt, die auf den Newtonschen Axiomen beruht. Diese Vorlesung (Mechanik B) führt nun den Lagrangeformalismus ein. Es werden Variationsprinzipien behandelt und der Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen diskutiert. Wir befassen uns mit der Bewegung des starren Körpers. Am Ende der Vorlesung wird die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik eingeführt, die zwar für Anwendungen weniger wichtig ist, aber bei der Einführung der Quantenmechanik benötigt wird.

# Kapitel 2

## Lagrangeformalismus

Joseph Louis Lagrange (siehe Fig. 2.1) hat, ausgehend vom Prinzip der kleinsten Wirkung, die klassische Newtonsche Mechanik in die Sprache der Variationsrechnung übersetzt. Es handelt sich um eine zu den Newtonschen Gesetzen äquivalente Formulierung der mechanischen Grundgesetze. Die Lagrangesche (und Hamiltonsche) Formulierung ermöglicht jedoch einen wesentlich tieferen Einblick in die dynamische und geometrische Struktur der Mechanik.

1788 eingeführt, ist der Lagrangeformalismus eine Formulierung der klassischen Mechanik, in der die Dynamik des Systems durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrangefunktion, beschrieben wird. Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich daraus die Bewegungsgleichungen bestimmen. Der Vorteil dieses Formalismus gegenüber der Newtonschen Mechanik ist, daß sich damit Probleme mit Zwangsbedingungen relativ einfach behandeln lassen – durch das explizite Ausrechnen der Zwangskräfte oder durch die geeignete Wahl generalisierter Koordinaten. Ein Beispiel für eine Zwangsbedingung ist die Bewegung von Körpern, die durch feste Verbindungsstangen zwischen diesen eingeschränkt ist.

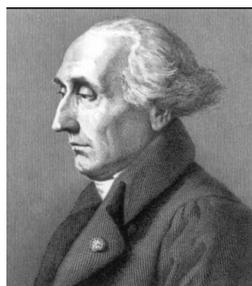


Abbildung 2.1: Joseph-Louis-Lagrange (\* 25. Januar 1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; † 10. April 1813 in Paris) war ein italienischer Mathematiker und Astronom. [Quelle:Wikipedia].

### 2.1 Lagrangegleichungen 1. Art

Wir betrachten Systeme, die aus  $N$  Massenpunkten mit Massen  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) bestehen. Falls sich diese in allen 3 Raumdimensionen frei von Einschränkungen bewegen können, so hat

das System  $3N$  Freiheitsgrade. Im folgenden betrachten wir Systeme, die Zwangsbedingungen unterworfen sind. Diese können beispielsweise dadurch gegeben sein, daß die Abstände der Massenpunkte konstant sind. Dies ist bei einem starren Körper der Fall. Oder aber die Bewegung der Massenpunkte ist auf eine Fläche im Raum eingeschränkt z.B. durch Gleiten auf einem horizontalen Tisch. Ein anderes Beispiel ist das mathematische Pendel.

*Holonome Zwangsbedingungen:* Wir betrachten ein System von  $N$  Teilchen, deren Koordinaten durch  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  gegeben sind. Falls sich für das System von  $N$  Teilchen die Zwangsbedingungen in der Form

$$A_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad , \quad \mu = 1, \dots, N_Z \quad (2.1)$$

schreiben lassen, so heißen diese *holonome Zwangsbedingungen*. Alle Zwangsbedingungen, die nicht von der Form (2.1) sind, heißen *nichtholonome* (Zwangsbedingungen in Form von Ungleichungen oder differentielle, nicht-integrable Zwangsbedingungen). Ein Beispiel für nichtholonome Zwangsbedingungen sind in einer Kugel vom Radius  $R$  eingeschlossene Gasmoleküle. Ihre Koordinaten unterliegen der Bedingung  $r_i \leq R$ .

Die Zwangsbedingungen lassen sich weiter bzgl. ihrer Zeitabhängigkeit unterscheiden. Sie heißen

*skleronom*, falls keine explizite Zeitabhängigkeit besteht, ansonsten *rheonom*.

Ein Beispiel für eine holonome und rheonome Zwangsbedingung ist gegeben, wenn sich ein Massenpunkt auf einer bewegten Raumkurve bewegt.

Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  ist, falls die  $N_Z$  Gleichungen  $A_\mu = 0$  unabhängig sind, gegeben durch

$$f = 3N - N_Z . \quad (2.2)$$

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele:

- ▷ Alle Massenpunkte  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) können sich nur in einer Ebene bewegen. Die Zwangsbedingung lautet dann ( $\vec{p}$  Stützvektor der Ebene,  $\vec{h}$  Normalenvektor der Ebene)

$$\vec{h} \cdot (\vec{r}_i - \vec{p}) = 0 \iff \vec{h} \cdot \vec{r}_i - k = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{h}, \vec{p}, k (\equiv \vec{h} \cdot \vec{p}) = \text{const.} \quad (2.3)$$

Damit ist  $N_Z = N$  und  $f = 2N$ . Bei (2.3) handelt es sich um eine holonome skleronome Zwangsbedingung.

- ▷ Falls sich die Ebene zusätzlich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, so ist die Zwangsbedingung durch

$$\vec{h} \cdot (\vec{r}_i - \vec{v}t) - k = 0 \quad (2.4)$$

gegeben. Hier ist ebenfalls  $N_Z = N$  und  $f = 2N$ . Durch (2.4) ist eine holonome rheonome Zwangsbedingung gegeben.

▷ Für paarweise konstante Abstände der  $m_i$  ( $i, j = 1, \dots, N$ ) haben wir

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = \text{const.} . \quad (2.5)$$

Die Freiheitsgrade, die dann noch übrig bleiben, sind durch die Bewegungsmöglichkeiten des starren Körpers gegeben. Diese sind die Translation des Schwerpunktes und die Rotation des Systems als Ganzes um drei orthogonale Achsen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also  $f = 6$ . Für 2 Massenpunkte,  $N = 2$ , ist  $f = 5$ . Gleichung (2.5) beschreibt eine holonome skleronome Zwangsbedingung.

Durch *Zwangskräfte*  $\vec{Z}_i$  kann der Einfluß der Zwangsbedingungen auf die Bewegung der Massenpunkte beschrieben werden. Solche Zwangskräfte sind z.B. Auflagekräfte, Lagerkräfte, Fadenkräfte usw. Diese Zwangskräfte wirken zusätzlich zu den eigentlichen Kräften  $\vec{F}_i$  auf die Massenpunkte. Die Newton'schen Bewegungsgleichungen lauten also

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i \quad , \quad i = 1, \dots, N . \quad (2.6)$$

Die Zwangskräfte hängen im allgemeinen selbst von der Bewegung ab und sind Funktionen von  $\vec{r}_i$  und  $\dot{\vec{r}}_i$ .

Im folgenden sehen wir, wie wir die Zwangsbedingungen in die Bewegungsgleichungen integrieren können. Betrachten wir den einfachen Fall der Bewegung eines einzigen Massenpunktes  $m$  unter der Zwangsbedingung

$$A(\vec{r}, t) = 0 . \quad (2.7)$$

Die Bewegung findet auf der durch  $A = 0$  definierten Fläche statt. Diese kann auch zeitabhängig sein. Die Zwangsbedingung schränkt seine Bewegung innerhalb der Fläche nicht ein, noch beeinflusst sie sie. Damit hat die Zwangskraft keine Komponente tangential zur Fläche und muss vielmehr senkrecht auf der Fläche stehen, d.h.

$$\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda(t) \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) . \quad (2.8)$$

Der Gradient  $\vec{\nabla} A$  zeigt in Richtung der Normalen der Fläche. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda(t)$  muss noch bestimmt werden. Er hängt wegen der Zeitabhängigkeit von  $A(\vec{r}, t)$  und der Abhängigkeit von der tatsächlichen Bewegung von der Zeit ab.

*Bemerkung:* Daß der Gradient  $\vec{\nabla} A$  senkrecht auf der durch  $A = 0$  definierten Fläche steht, sieht man folgendermaßen: Seien  $\vec{r}$  und  $\vec{r} + d\vec{r}$  zwei infinitesimal benachbarte Punkte auf dieser Fläche, also

$$A(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = 0 . \quad (2.9)$$

Entwicklung der zweiten Gleichung um  $\vec{r}$  liefert

$$A(\vec{r} + d\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} + \mathcal{O}((d\vec{r})^2) = 0 . \quad (2.10)$$

Hieraus folgt, daß  $\vec{\nabla} A \cdot d\vec{r} = 0$ . Da  $d\vec{r}$  ein beliebiger infinitesimaler Vektor parallel zur Tangentialfläche im Punkt  $\vec{r}$  ist, steht also  $\vec{\nabla} A$  senkrecht auf der Fläche.

Die Bewegung des Massenpunktes wird also durch folgendes Gleichungssystem beschrieben,

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \cdot \vec{\nabla} A(\vec{r}, t) \quad (2.11)$$

$$A(\vec{r}, t) = 0 . \quad (2.12)$$

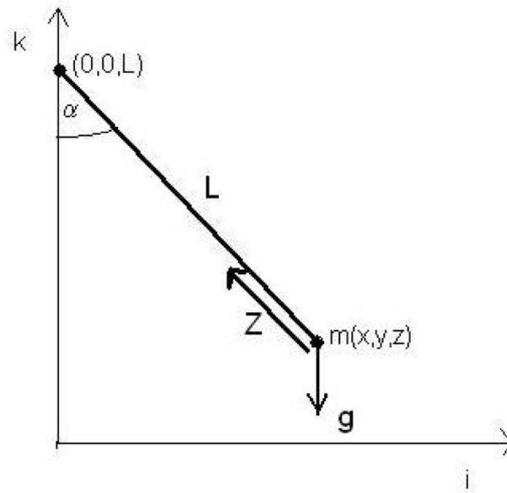


Abbildung 2.2: Das ebene Pendel. Auf die Masse  $m$  wirkt die Schwerkraft  $\vec{F}$  und die durch den Faden ausgeübte unbekannte Zwangskraft  $\vec{Z}$ .

*Ebenes Pendel:* Betrachten wir als Beispiel das ebene Pendel, siehe Fig. 2.2. Hier kann man sich nochmals klarmachen, daß die Zwangskraft von der tatsächlichen Bewegung abhängt. Denn sie muß die Komponente der Schwerkraft in Fadenrichtung kompensieren. Die Zwangsbedingung legt die Richtung der Zwangskraft fest. Das Pendel bewege sich in der  $x-z$ -Ebene (im Bild  $i-k$ -Ebene). Somit haben wir

$$A(\vec{r}, t) = x^2 + (L - z)^2 - L^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} A = 2 \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ (z - L) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Und die Bewegungsgleichungen mit Zwangsbedingung lauten also

$$m\ddot{x} = 2\lambda x \quad (2.15)$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda(z - L) \quad (2.16)$$

$$x^2 + z^2 - 2Lz = 0. \quad (2.17)$$

*Allgemeiner Fall:* Betrachten wir den allgemeinen Fall mehrerer (d.h.  $N$ ) Teilchen und mehrerer (d.h.  $N_Z$ ) Zwangsbedingungen. Die  $3N$  Bewegungsgleichungen und  $N_Z$  Zwangsbedingungen ergeben die *Lagrangegleichungen 1. Art*

Lagrangegleichungen 1. Art

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_{\mu}(t) \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

$$A_{\mu}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \mu = 1, \dots, N_Z. \quad (2.19)$$

Bemerkung: Hier bedeutet  $\partial/\partial \vec{r}_i \equiv \vec{\nabla}_i = (\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_i, \partial/\partial z_i)^T$ , also der Gradient, der auf das Teilchen  $i$  wirkt.

Damit wenigstens ein Freiheitsgrad vorhanden ist, ist die Zahl der Zwangsbedingungen begrenzt auf  $N_Z \leq 3N - 1$ .

*Energiebilanz:* Zur Untersuchung der Energiebilanz betrachten wir die Bewegungsgleichungen unter Voraussetzung konservativer Kräfte<sup>1</sup> und verwenden ferner

$$\ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (2.20)$$

$$\sum_{i=1}^N (-\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} V = \frac{dV}{dt} . \quad (2.21)$$

Aus den Zwangsbedingungen erhalten wir

$$\begin{aligned} A_\mu(\{\vec{r}_i, t\}) = 0 & \rightsquigarrow \frac{d}{dt} A_\mu = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu + \frac{\partial}{\partial t} A_\mu = 0 \\ & \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu = -\frac{\partial}{\partial t} A_\mu . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für die Energieänderung pro Zeit, die durch die Zwangsbedingungen verursacht wird, ergibt sich damit

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) \frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\{\vec{r}_i, t\}) \quad (2.23)$$

$$\text{mit } E = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + V(\{\vec{r}_i\}) . \quad (2.24)$$

Denn

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} & \stackrel{(3.19),(2.21)}{=} \sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i \right) \stackrel{(2.18)}{=} \sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i - m_i \dot{\vec{r}}_i \ddot{\vec{r}}_i + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu \right) \\ & \stackrel{(2.22)}{=} -\sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu \frac{\partial}{\partial t} A_\mu . \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.2 Lagrangegleichungen 2. Art

Die bisher eingeführten Zwangskräfte sind lediglich Hilfsgrößen und im allgemeinen nicht von physikalischer Bedeutung. Es ist daher geschickt, sie von Anfang an zu vermeiden. Tut man dies, indem man sie als ersten Schritt zur Lösung der Lagrangegleichungen 1. Art eliminiert, so führt dies möglicherweise auf komplizierte Formulierungen. Ein besseres Verfahren ist, von vornherein die Koordinaten so zu wählen, daß sie den durch die holonomen Zwangsbedingungen definierten Unterraum parametrisieren. Solche Koordinaten werden *verallgemeinerte Koordinaten* genannt. Beim ebenen Pendel verwendet man statt der kartesischen Koordinaten, welche die Zwangsbedingung  $x^2 + y^2 = L^2$  explizit berücksichtigen müssen,

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Im konservativen Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie erhalten. Die Kraft lässt sich von einem Potential  $V$  ableiten, d.h.  $\vec{F}_{kons} = -\vec{\nabla}V$ , und es gilt  $\vec{F}_{kons} \cdot \vec{r} = -dV(\vec{r})/dt \equiv -\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}V$ .

Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ . Konstanz der Pendellänge bedeutet eine konstante Koordinate  $r$ . Und die Bewegung des Pendels wird mit der Winkelkoordinate vollständig beschrieben. Im folgenden soll das Vorgehen zur Verwendung verallgemeinerter Koordinaten eingeführt werden.

### 2.2.1 Verallgemeinerte Koordinaten

Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten, die durch  $3N$  Koordinaten  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) beschrieben werden. Bei  $N_Z$  Zwangsbedingungen sind nur  $f = 3N - N_Z$  Koordinaten voneinander unabhängig. ( $f$  ist die Anzahl der verbleibenden Freiheitsgrade.) Jede Wahl dieser  $f$  unabhängigen Koordinaten wird als *generalisierte* oder *verallgemeinerte* Koordinaten bezeichnet,

$$q = \{q_1, \dots, q_f\}, \quad f = 3N - N_Z. \quad (2.26)$$

Diese Wahl ist nicht eindeutig. Die Wahl wird aber durch Symmetrie-Gesichtspunkte und Anstreben größtmöglicher Einfachheit nahegelegt.<sup>2</sup> Die Orte der Teilchen sind durch die Wahl der  $q_k$  ( $k = 1, \dots, f$ ) festgelegt,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f, t). \quad (2.27)$$

Die verallgemeinerten Koordinaten enthalten die Zwangsbedingungen implizit. Diese sind für beliebige  $q_k$  ( $k = 1, \dots, f$ ) also automatisch erfüllt. D.h.

$$A_\mu(\vec{r}_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \vec{r}_N(q_1, \dots, q_f, t)) = 0 \quad , \quad \mu = 1, \dots, N_Z. \quad (2.28)$$

*Beispiel:* Betrachten wir das ebene Pendel mit variabler Fadenlänge  $L(t)$ . Der einzige Freiheitsgrad ist der Winkel  $\varphi(t)$ .<sup>3</sup> Die kartesischen Koordinaten, ausgedrückt durch die verallgemeinerte Koordinate  $\varphi(t)$ , erfüllen die Zwangsbedingung automatisch, denn

$$x(t) = L(t) \sin \varphi(t) \quad (2.29)$$

$$y(t) = 0 \quad (2.30)$$

$$z(t) = L(t) - L(t) \cos \varphi(t) \quad (2.31)$$

und

$$x^2 + (L - z)^2 = L^2(t). \quad (2.32)$$

*Bemerkung:* Auch Impulse und Energien etc. können als generalisierte Koordinaten verwendet werden.

<sup>2</sup>Auch wenn keine Zwangsbedingungen vorliegen, ist die Benutzung generalisierter Koordinaten nützlich. Etwa beim Zentralkraftproblem, dessen Beschreibung durch  $(r, \theta, \varphi)$  einfacher ist also durch  $(x, y, z)$ .

<sup>3</sup>Der Winkel  $\varphi(t)$  ist der Winkel  $\alpha$  in Fig. 2.2.

## 2.2.2 Die Lagrangefunktion

Im folgenden soll die Lagrangefunktion hergeleitet werden. Dazu multiplizieren wir die Bewegungsgleichung (2.18) für  $m_i$  mit  $\partial\vec{r}_i/\partial q_\alpha$  und summieren über  $i$ ,<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i - \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad \Big| \cdot \sum_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, f \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aus  $A_\mu(\{q_\alpha\}, t) \equiv 0$  folgt, daß<sup>5</sup>

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (2.34)$$

Nun hängt aber  $A_\mu$  über die kartesischen Koordinaten  $\vec{r}_i(\{q_\alpha\}, t)$  von  $q_\alpha$  ab. Damit ist also

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (2.35)$$

Und somit ist mit Glg. (2.34) auch

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial A_\mu}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (2.36)$$

Damit fallen aus Glg. (2.33) die Zwangskräfte heraus und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, f. \quad (2.37)$$

Zur weiteren Umformung dieser  $f$  Gleichungen betrachten wir die totale Zeitableitung von  $\vec{r}_i$ ,

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i(\{q_\beta\}, t) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta. \quad (2.38)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (2.39)$$

Dies verwenden wir im 1. Term der Bewegungsgleichungen (2.37),

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (2.40)$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} T \right\} - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} T, \quad (2.41)$$

<sup>4</sup>Die Anführungszeichen in Glg. (2.33) sollen ausdrücken, dass erst multipliziert und dann summiert wird.

<sup>5</sup>Im Folgenden verwenden wir die Notation  $q \equiv \{q_\alpha\} \equiv q_1, \dots, q_f$ .

wobei

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (2.42)$$

die kinetische Energie bezeichnet. In Glg. (2.40) wurde verwendet, daß

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (2.43)$$

da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \stackrel{(2.39)}{=} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{d \vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}. \quad (2.44)$$

Mit der potentiellen Energie  $V$  des Systems, ausgedrückt durch die verallgemeinerten Koordinaten  $q = \{q_\alpha\}$ ,

$$V(q, t) = V(\vec{r}_1(q, t), \dots, \vec{r}_N(q, t)), \quad (2.45)$$

erhalten wir für die Kraftterme

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i \left( -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} V(q, t). \quad (2.46)$$

Wir definieren als *verallgemeinerte Kräfte*  $Q_\alpha$

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, f. \quad (2.47)$$

Unter Verwendung von Gln. (2.37), (2.40), (2.41) and (2.46) lassen sich somit die Bewegungsgleichungen kompakt schreiben als

#### Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad \text{mit } \alpha = 1, \dots, f \quad \text{und} \quad (2.48)$$

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (2.49)$$

Hierbei bezeichnet  $L$  die Lagrangefunktion, die von den verallgemeinerten Koordinaten  $q$  und Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  sowie der Zeit  $t$  abhängt. Bei den Gln. (2.48) handelt es sich um die *Lagrangegleichungen 2. Art*. Sie sind die Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten und der wichtigste Ausgangspunkt zur Lösung von Problemen in der Mechanik. Die Lagrangefunktion charakterisiert ein System eindeutig.

Bemerkungen:

- In den Lagrangegleichungen 2. Art sind die Zwangsbedingungen eliminiert. Sie treten nicht mehr auf.

- Durch die Gleichungen (2.48) ist ein System von  $\alpha$  Differentialgleichungen 2. Ordnung gegeben. Zu dessen Lösung werden  $2\alpha$  Anfangsbedingungen benötigt.
- Die zentralen Begriffe sind hier Energie und Arbeit im Vergleich zu den zentralen Begriffen Impuls und Kraft der Newtonschen Mechanik.
- die Lagrangegleichungen sind invariant unter Punkttransformationen

$$(q_1, \dots, q_\alpha) \xleftrightarrow{\text{diffbar}} (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_\alpha), \quad (2.50)$$

mit

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_1(q_1, \dots, q_\alpha, t), \dots, \bar{q}_\alpha = \bar{q}_\alpha(q_1, \dots, q_\alpha, t). \quad (2.51)$$

Damit hat man bei der Wahl der generalisierten Koordinaten gewisse Freiheiten. Dies kann zur Vereinfachung der Lösung des Problems genutzt werden, indem man beispielsweise Symmetrien ausnutzt.

Um die Bewegungsgleichungen eines Systems mit Zwangsbedingungen aufzustellen, geht man also wie folgt vor:

- 1) Wahl einer geeigneten Parametrisierung des  $f$ -dimensionalen Unterraums des  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraums:  $q = \{q_1, \dots, q_f\}$ .
- 2) Bestimmung von  $T$  und  $V$ . Bestimmung von  $L$ .
- 3) Aufstellen der Lagrangegleichungen.

## 2.3 Erhaltungsgrößen

Erhaltungssätze bestimmen das qualitative Verhalten eines Systems und sind für die Lösung der Bewegungsgleichungen von großem Nutzen. Im Lagrangeformalismus sind Erhaltungsgrößen dadurch gegeben, daß die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$  von einem oder mehreren ihrer Argumente nicht abhängt.

### 2.3.1 Energieerhaltung (“Homogenität der Zeit”)

Die Lagrangefunktion soll nicht explizit von der Zeit abhängen,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2.52)$$

Die totale Ableitung der Lagrangefunktion nach der Zeit ist damit unter Verwendung der Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}L = \sum_{\alpha=1}^f \left\{ \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right\} = \sum_{\alpha} \left\{ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right\} \quad (2.53)$$

Daraus ergibt sich der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}H = 0, \quad (2.54)$$

wobei die Erhaltungsgröße  $H$  definiert ist als

$$H = \left( \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} \right) - L. \quad (2.55)$$

Bei  $H$  handelt es sich um die *Hamiltonfunktion*.

Hängen die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit ab, so ist die kinetische Energie quadratisch in den  $\dot{q}_{\alpha}$ ,

$$T = \sum_{\alpha', \beta} m_{\alpha' \beta} \dot{q}_{\alpha'} \dot{q}_{\beta}, \quad (2.56)$$

wobei es sich bei den Koeffizienten  $m_{\alpha' \beta}$  um den verallgemeinerten Massentensor handelt. Hängt ferner  $V$  nicht von den Geschwindigkeiten  $\dot{q}_{\alpha}$  ab, so ist

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha', \beta} 2m_{\alpha' \beta} \dot{q}_{\alpha'} \dot{q}_{\beta} = 2T \quad (2.57)$$

und damit

$$H = 2T - L = T + V = E. \quad (2.58)$$

Damit ist die Hamiltonfunktion gleich der Energie des Systems.

### 2.3.2 Zyklische Koordinaten

Falls  $L$  unabhängig von einer verallgemeinerten Koordinate  $q_{\beta}$  ist, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} = 0, \quad (2.59)$$

dann nennt man  $q_{\beta}$  eine *zyklische Koordinate*. Aus den Bewegungsgleichungen folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\beta}} = 0. \quad (2.60)$$

Damit ist

$$p_{\beta} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\beta}} = \text{zeitlich konstant}. \quad (2.61)$$

Bei  $p_{\beta}$  handelt es sich um den *verallgemeinerten Impuls*. Zyklische Koordinaten führen automatisch zu einem Erhaltungssatz. Um Problemstellungen zu erleichtern, sollten also möglichst viele generalisierte Koordinaten zyklisch sein. Zeitlich konstante Koordinaten nennt man auch Konstanten der Bewegung.

Beispiele:

1) Freies Teilchen: Die Lagrangefunktion lautet

$$L = \frac{m}{2} \dot{r}^2 \quad (2.62)$$

und ist unabhängig von  $\vec{r}$ . Damit ist der zugehörige verallgemeinerte Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} = \text{const.} . \quad (2.63)$$

Es liegt Impulserhaltung vor. Dies entspricht der Translationsinvarianz des Systems.

2) Massenpunkt auf einem Kreis in der  $x$ - $y$ -Ebene. Die geeignete verallgemeinerte Koordinate ist gegeben durch  $q = \varphi$ , wobei  $\varphi$  der Winkel ist. Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 , \quad \text{wobei } r \text{ der Radius des Kreises ist.} \quad (2.64)$$

Sie hängt nicht von der verallgemeinerten Koordinate  $q = \varphi$  ab. Der zugehörige verallgemeinerte Impuls ist

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const.} . \quad (2.65)$$

Es liegt Drehimpulserhaltung vor. Damit verbunden ist die Isotropie des Raums.

### 2.3.3 Nichtkonservative Kräfte

Falls sich Kräfte nicht als Gradient eines Potentials schreiben lassen, müssen die Lagrangegleichungen 2. Art erweitert werden. Hierfür geht man von den jeweiligen Krafttermen aus und leitet geeignete Zusatzterme ab. Wir betrachten im folgenden elektromagnetische Kräfte und Reibungskräfte.

#### Elektromagnetische Kräfte

Liegen ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  und ein Magnetfeld  $\vec{B}$  vor, so üben sie auf eine Ladung  $Q$  die Lorentzkraft aus. Diese ist gegeben durch

$$\vec{F} = Q \cdot \left( \vec{E}(\vec{r}, t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) . \quad (2.66)$$

Der mit der magnetischen Flussdichte verbundene Anteil der Kraft hängt von der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{r}}$  ab und ist damit nicht konservativ. Die Formulierung für konservative Systeme soll nun erweitert werden, indem im Potential  $V$  auch von  $\dot{\vec{r}}$  abhängige Terme zugelassen werden. Wendet man unverändert die Lagrange-Gleichung an, wobei  $(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3)$  (kartesische Koordinaten) ist, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} . \quad (2.67)$$

Es ergibt sich also folgender Zusatzterm zur Kraft ( $nk$  = nicht-konservativ),

$$\vec{F}_{nk} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}} . \quad (2.68)$$

Wir benötigen also eine Funktion  $V_{nk}$ , aus der nach Differentiation nach  $\dot{\vec{r}}$  und Zeitableitung die Lorentzkraft folgt. Es gibt eine solche Funktion. Diese lässt sich aber nur durch das Vektorpotential  $\vec{A}$  des Magnetfeldes ausdrücken (zunächst ohne Zwangsbedingungen) und lautet

$$V_{nk} = -Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) . \quad (2.69)$$

Die elektromagnetischen Potentiale  $\Phi(\vec{r}, t)$  und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  sind hierbei über die Gleichungen

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (2.70)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.71)$$

definiert. Das gesamte Potential setzt sich aus dem konservativen ( $V_k = Q\Phi$ ) und dem nicht-konservativen Anteil zusammen und ist damit gegeben durch

$$V(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = Q \cdot \Phi(\vec{r}, t) - Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) . \quad (2.72)$$

Dies setzen wir in die Lagrangegleichung ein und erhalten also folgenden Ausdruck für die Kraft (wir betrachten nur ein Teilchen mit Ladung  $Q$ ) ( $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ )

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}V + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{r}}} \\ &= -Q\vec{\nabla}\Phi + Q \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \vec{\nabla} A_j(\vec{r}, t) - Q \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{(2.70)}{=} Q\vec{E} + Q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - Q \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + Q \sum_{j=1}^3 \left( \dot{x}_j \vec{\nabla} A_j(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \dot{x}_j \right) \\ &\stackrel{(2.71)}{=} Q\vec{E} + Q\dot{\vec{r}} \times \vec{B} . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Der letzte Term lässt sich folgendermaßen umformen (denn  $[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_j b_k$  mit dem total antisymmetrischen Tensor  $\epsilon_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ )

$$\sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left( \vec{\nabla} A_j - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \right) = \dot{\vec{r}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) . \quad (2.74)$$

Damit ist  $\vec{F}$  also die Lorentzkraft. Die Lagrangefunktion hat somit die Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi(\vec{r}, t) + Q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) . \quad (2.75)$$

Falls Zwangsbedingungen vorhanden sind, muß man

$$\vec{r} = \vec{r}(\{q_\alpha\}) \quad (2.76)$$

setzen.

## Reibungskräfte

Um mechanische Systeme aus makroskopischen Körpern realistisch zu beschreiben, müssen Reibungs- oder Dämpfungseffekte berücksichtigt werden. Die diesen entsprechenden Kräfte treten nur auf, wenn sich die Teilchen bewegen, also eine nichtverschwindende Geschwindigkeit haben. Für kleine Geschwindigkeiten kann man oft einen linearen Zusammenhang ansetzen (*diss*=dissipativ),

$$\vec{F}_{diss,i} = -\gamma_i \dot{\vec{r}}_i , \quad (2.77)$$

wobei der Index  $'i'$  das  $i$ -te Teilchen bezeichnet. Solche Kräfte führen in der Lagrangegleichung für die  $\alpha$ -te Koordinate dann zu Zusatztermen

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{diss,i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} . \quad (2.78)$$

Diese können durch einen Zusatz zu  $L$ , der von  $\dot{\vec{r}}$  abhängt, berücksichtigt werden. Alternativ definiert man eine weitere skalare Funktion  $\mathcal{F}$  durch

$$\mathcal{F}(\dot{\vec{r}}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \gamma_i \dot{r}_i^2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \gamma_i \dot{r}_i^2(q, \dot{q}, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{r}_i} = \gamma_i \dot{r}_i = -\vec{F}_{diss,i} . \quad (2.79)$$

Damit gilt für die verallgemeinerte Dissipationskraft

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \vec{F}_{diss,i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ &\stackrel{(2.39)}{=} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Und die modifizierten Lagrangegleichungen lauten dann

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 . \quad (2.81)$$

Die Funktion  $\mathcal{F}$  heißt *Rayleigh'sche Dissipationsfunktion*. Sie ist gleich der halben vom System durch Reibung abgegebenen Leistung.



# Kapitel 3

## Variationsprinzipien in der Mechanik

**Disclaimer:** Es kann noch zu möglichen Änderungen/Korrekturen des Kapitels im Laufe der Vorlesung kommen.

Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit der Lösung von Problemen, bei denen der Extremwert (Minimum oder Maximum) einer Größe gefunden werden soll, die als Integral über einen Funktionalausdruck darzustellen ist.

Funktional: Bei der Variationsrechnung betrachtet man Funktionale. Während eine Funktion  $y = y(x)$  jedem  $x$ -Wert eine Zahl (den  $y$ -Wert) zuordnet, wird bei einem Funktional jeder Funktion eine Zahl (der Wert des Funktionals) zugeordnet. Funktionale sind also Funktionen von Funktionen.

Beispiel: Es ist

$$J = J[y] = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (3.1)$$

das Funktional, das die Wegstrecke entlang der Kurve  $y = y(x)$  zwischen den beiden Punkten  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$  angibt. Es wird also durch das Funktional jeder Verbindungskurve  $y(x)$  zwischen den beiden Punkte eine Zahl, die Weglänge, zugeordnet.

Bemerkung: Oben wurde das Wegelement  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  geschrieben als:

$$ds = \sqrt{1 + dy^2/dx^2} dx = \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad \text{mit } y' \equiv dy/dx. \quad (3.2)$$

Beispiel: Gesucht ist die Brachystochrone, die schnellste Verbindung zweier Punkte durch eine Bahn, auf der ein Massenpunkt unter dem Einfluß der Gravitationskraft reibungsfrei gleitet, Fig. 3.1. Aus der Energieerhaltung folgt  $mv^2/2 = mg(y_1 - y)$ . Damit haben wir

$$J[y] = T = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_1 - y(x))}}. \quad (3.3)$$

### 3.1 Die Euler-Lagrange-Gleichung

Problemstellung: Gesucht ist die Funktion  $y(x)$ , deren Randwerte

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (3.4)$$

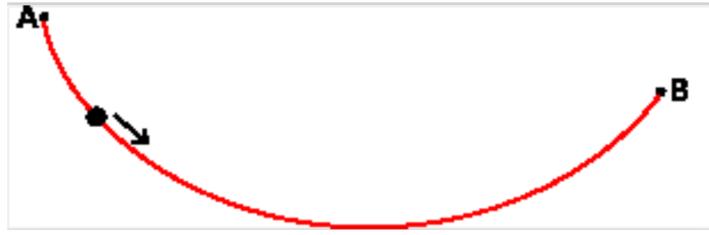


Abbildung 3.1: Brachystochrone

als gegeben vorausgesetzt werden, welche das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) \quad (3.5)$$

minimiert.

Sei  $y_0(x)$  die gesuchte Funktion. Für jede infinitesimal davon abweichende Funktion  $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) = y_0(x) + \epsilon \eta(x)$ , mit  $\epsilon$  infinitesimal und  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , muss dann gelten

$$J[y_0 + \epsilon \eta(x)] > J[y_0] \quad , \quad \forall \eta(x) . \quad (3.6)$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y_0 + \epsilon \eta(x)]|_{\epsilon=0} = 0 , \quad (3.7)$$

ganz analog zur Bedingung des Extremums einer Funktion  $f(x)$ :  $f'(x) = 0$  bei  $x = x_0$ . Aus der Bedingung  $dJ/d\epsilon$  ergibt sich eine Differentialgleichung (DGL) für  $\eta(x)$ :

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y_0(x) + \epsilon \eta(x)]|_{\epsilon=0} \stackrel{(3.5)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] \stackrel{!}{=} 0 . \quad (3.8)$$

Daraus ergibt sich nach partieller Integration des 2. Terms<sup>1</sup>

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) = \underbrace{\left[ \frac{dF}{dy'} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (3.9)$$

schließlich

$$\frac{d}{d\epsilon} J[y_0(x) + \epsilon \eta(x)]|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) \stackrel{!}{=} 0 . \quad (3.10)$$

Da das Integral für beliebiges  $\eta(x)$  verschwinden soll, muss der Ausdruck in der Klammer null sein. Damit finden wir die Euler-Lagrange-Gleichung

Euler-Lagrange-Gleichung:  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \quad (3.11)$

<sup>1</sup>Zu Erinnerung:  $\int f'g = fg - \int fg'$ .

Dies ist eine DGL zweiter Ordnung für die gesuchte Funktion  $y(x)$ . Die Lösungen  $y(x)$  dieser DGL sind *stationäre* Punkte von  $J[y]$ . Im Fall mehrerer Lösungen muss die zum Minimum gehörige Lösung gefunden werden.

Man nennt  $\delta y(x) = \epsilon \eta(x)$  Variation von  $y(x)$ . Das Funktional  $J$  ist für das gesuchte  $y(x)$  stationär, d.h. die Variation  $\delta J$  von  $J$  verschwindet. In Kurznotation ist die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int dx (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \delta y = 0. \quad (3.12)$$

Da dies für beliebige  $\delta y$  gilt, folgt daraus die

$$\text{Funktionalableitung: } \frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.13)$$

und damit die Euler-Lagrange-Gleichung.

Beispiel: Es soll die kürzeste Verbindung zwischen zwei vorgegebenen Punkten gefunden werden. Dies ist die Funktion  $y(x)$ , für die (3.1) minimal wird. Mit

$$F = \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (3.14)$$

ergibt sich die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0, \quad (3.15)$$

welche nach Integration

$$y' = \text{const.}, \quad y = ax + b \quad (3.16)$$

liefert. Die Konstanten  $a, b$  sind durch die Randpunkte festgelegt. Die Gerade ist also die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Für mehrere Funktionen  $y_i(x)$  ergibt sich die DGL 2. Grades

$$\text{Euler-Lagrange-Gleichung: } \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) = 0 \quad (3.17)$$

## 3.2 Variationsprobleme mit Nebenbedingung

Es soll nun ein Variationsproblem untersucht werden, bei dem die Funktion  $y(x)$  einer Nebenbedingung unterliegt.

Problemstellung: Wir betrachten eine Kette, die an zwei Punkten aufgehängt ist und der Schwerkraft unterliegt, siehe Fig. 3.2. Die homogene Massendichte, d.h. die Masse pro Länge, sei  $\rho$ , also

$$\rho = \frac{dm}{ds}, \quad (3.18)$$

wobei  $dm$  Massenelemente und  $ds$  das Wegelement bezeichnet. Die Frage ist, welche Kurve in der Gleichgewichtslage eingenommen wird. Die Gleichgewichtslage wird eingenommen,

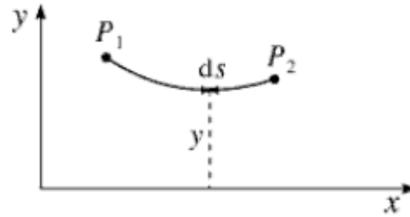


Abbildung 3.2: Eine Kette der Länge  $L$  im Schwerfeld der Erde, aufgehängt an 2 Punkten.

wenn die potenzielle Energie minimal wird. Die Lage der Kette soll durch die Funktion  $y(x)$  beschrieben werden. Die Gleichgewichtsbedingung lautet damit

$$J = V_{pot} = \int_1^2 dm g y = \rho g \int_1^2 y ds = \rho g \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2} = \text{minimal} . \quad (3.19)$$

Hierbei bezeichnet  $g$  die Erdbeschleunigung. Es liegt ein Variationsproblem vor, bei dem die Endpunkte nicht variiert werden, d.h.

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{und} \quad y(x_2) = y_2 . \quad (3.20)$$

Die Nebenbedingung ist die vorgegebene Länge der Kette,

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = L = \text{const.} . \quad (3.21)$$

Nebenbedingungen der Form  $K[y] = C$  nennt man *isoperimetrisch*.

Wie kann nun also solch ein Problem gelöst werden?

### 3.2.1 Lagrange-Multiplikatoren

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß Nebenbedingungen mit Hilfe der *Methode der Lagrangemultiplikatoren* in ein verallgemeinertes Extremalprinzip aufgenommen werden können.

Gesucht ist das Extremum einer Funktion mehrerer Variablen unter einer Nebenbedingung. Das Problem ist in Fig. 3.3 skizziert. Das heißt, wir suchen

$$f(x, y) = \text{minimal, wobei} \quad g(x, y) = 0 . \quad (3.22)$$

Es wird angenommen, dass die Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  sich auflösen lässt nach  $y = y_g(x)$ . Letztere sind also die Werte von  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  entlang der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$ . Damit gilt also

$$g(x, y_g(x)) = 0 . \quad (3.23)$$

Somit kann das Minimum von  $f$  auf der Kurve  $y_g(x)$  als Minimum von  $H(x) = f(x, y_g(x))$  bestimmt werden, d.h.

$$\frac{d}{dx} f(x, y_g) = f_x(x, y_g) + f_y(x, y_g) y'_g(x) = 0 . \quad (3.24)$$

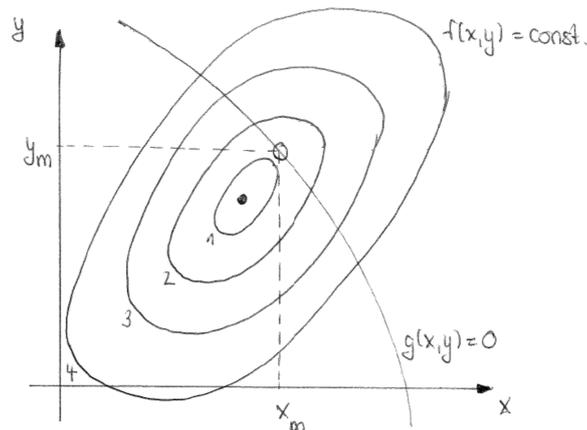


Abbildung 3.3: Die Höhenlinien  $f(x, y) = \text{const.}$  (hier  $f = 1, 2, 3, 4$ ) einer gegebenen Funktion  $f(x, y)$ . Das Minimum ist durch den vollen Kreis bezeichnet. Gesucht sind die Werte  $x_m, y_m$  des Minimums von  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$ . Es ist durch einen offenen Kreis markiert.

Daraus kann der Wert  $x_m$  bestimmt werden. Der  $y$ -Wert kann dann aus  $y_m = y_g(x_m)$  bestimmt werden.

Wird die Methode der *Lagrange-Multiplikatoren* angewendet, so kann die explizite Auflösung von  $g(x, y) = 0$  nach  $y = y_g(x)$  zur Bestimmung des Minimums vermieden werden. Statt Glg. (3.24) werden die folgenden drei Gleichungen für drei Unbekannte  $x, y, \lambda$  betrachtet,

$$f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0. \quad (3.25)$$

Dies ist aber äquivalent zu Glg. (3.24). Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass  $g(x, y) = 0$  nach  $y = y_g(x)$  aufgelöst ist. Allerdings muss dieser Schritt nicht explizit durchgeführt werden. Damit kann diese Bedingung auch folgendermaßen ausgedrückt werden,

$$g(x, y) = y - y_g(x) = 0. \quad (3.26)$$

Denn  $g(x, y) = 0$  ist ja äquivalent zu  $y = y_g(x)$ . Dies wird nun in die ersten beiden Bedingungen der Glg. (3.25) eingesetzt und damit  $\lambda$  eliminiert:

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x, y_g) + \lambda y'_g(x) = 0 \\ f_y(x, y_g) - \lambda = 0 \end{array} \right\} \rightarrow f_x(x, y_g) + f_y(x, y_g) y'_g(x) = 0. \quad (3.27)$$

Somit ist jede Lösung von Glg. (3.25) auch Lösung von Glg. (3.24). Man kann zeigen, dass dies auch umgekehrt gilt. Die Methode Glg. (3.25) zur Bestimmung des Minimums  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  kann auch folgendermaßen formuliert werden,

$$f^*(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = \text{minimal} \quad \text{und} \quad g(x, y) = 0. \quad (3.28)$$

Das heißt, dass man, ohne die Nebenbedingung zu beachten, das Minimum von  $f^*$  bestimmt. Diese so bestimmte Lösung  $y = y(x, \lambda)$  enthält immer noch einen Parameter  $\lambda$ . Dieser

Parameter  $\lambda$  wird nun so angepasst, dass die Nebenbedingung erfüllt wird.

Der Vorteil der drei Gleichungen (3.25) ist, dass die Nebenbedingung nicht nach  $y$  aufgelöst werden muss, was letztendlich nur für sehr spezielle Funktionen möglich ist.

Wir betrachten nun die Verallgemeinerung auf das Problem

$$f^*(x_1, \dots, x_N) = \text{minimal}, \quad \text{wobei} \quad g_\alpha(x_1, \dots, x_N) = 0. \quad (3.29)$$

Hier ist  $\alpha = 1, \dots, R$ . Man erhält dann die  $N + R$  Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f(x_1, \dots, x_N) - \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha g_\alpha(x_1, \dots, x_N) \right) &= 0 \quad (i = 1, \dots, N) \\ g_\alpha(x_1, \dots, x_N) &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, R). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Diese liefern die  $N + R$  Unbekannten  $x_i$  und  $\lambda_\alpha$ .

### 3.2.2 Isoperimetrische Nebenbedingung

Das Kettenlinienproblem Glgen. (3.19-3.21) ist in allgemeiner Form dadurch gegeben, dass eine Funktion  $y(x)$  gesucht wird, für die

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x) = \text{minimal} \quad (3.31)$$

wird unter der Nebenbedingung, dass ein anderes Funktional  $K$  gleich einer vorgegebenen Konstante (dort die Länge der Kette) ist. Also

$$K = K[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx G(y, y', x) = C. \quad (3.32)$$

Es werden hierbei die Randwerte festgehalten,

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{und} \quad y(x_2) = y_2. \quad (3.33)$$

Die gesuchte Funktion sei durch  $y_0(x)$  gegeben. Damit erfüllt  $y_0 + \epsilon\eta$  für eine beliebige Abweichung  $\delta y = \epsilon\eta(x)$  die Bedingung  $K[y_0 + \epsilon\eta] = C$  für  $\epsilon = 0$ . Es gilt nun aber im Allgemeinen  $K[y_0 + \epsilon\eta] = C + \mathcal{O}(\epsilon)$ , so dass  $\epsilon = 0$ . Die Nebenbedingung ermöglicht also eine solche Variation nicht. Es werden daher zwei linear unabhängige Funktionen  $\eta_1(x)$  und  $\eta_2(x)$  betrachtet, wobei  $\eta_1$  und  $\eta_2$  am Rand verschwinden. Die Nebenbedingung für  $y_0 + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2$  lautet also

$$K(\epsilon_1, \epsilon_2) = K[y_0 + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2] = C. \quad (3.34)$$

Diese Bedingung ist eine Kurve in der  $\epsilon_1 - \epsilon_2$  Ebene, siehe Fig. 3.4. Wenn  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  auf der Kurve  $K(\epsilon_1, \epsilon_2) = C$  liegen, genau dann ist eine Variation  $y_0 + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2$  mit der Nebenbedingung verträglich. Es muss somit für die gesuchte Funktion  $y_0$  gelten

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) = J[y_0 + \epsilon_1\eta_1 + \epsilon_2\eta_2] = \text{minimal}, \quad \text{wobei} \quad K(\epsilon_1, \epsilon_2) = C. \quad (3.35)$$

Und dieses Minimum muss bei  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  liegen. Nach Glg. (3.28) ist dies lösbar durch

$$J(\epsilon_1, \epsilon_2) - \lambda K(\epsilon_1, \epsilon_2) = \text{minimal} \quad \text{bei} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 0. \quad (3.36)$$

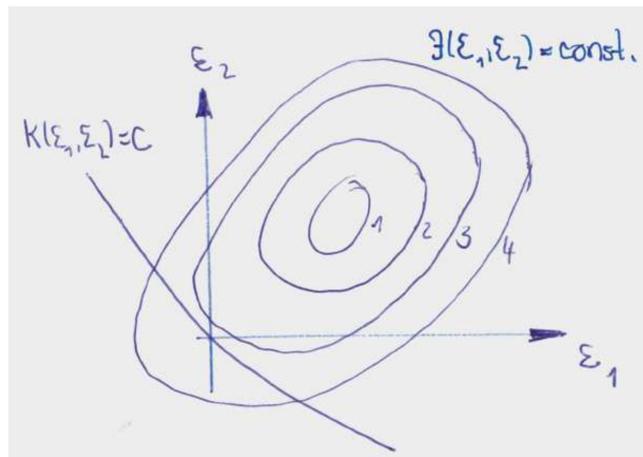


Abbildung 3.4: Das Funktional  $J[y]$  wird für  $y \rightarrow y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2$  zu einer Funktion  $J(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . In der Skizze sind die Höhenlinien  $J = 1, 2, 3, 4$  dieser Funktion gezeigt. Durch die Nebenbedingung  $K[y] = C$  wird die mögliche Variation auf die Kurve  $K(\epsilon_1, \epsilon_2) = K[y + \epsilon_1 \eta_1 + \epsilon_2 \eta_2] = C$  eingeschränkt. Für das gesuchte  $y_0$  muss das Minimum bei  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$  liegen.

Gemäß Glg. (3.28) müsste der Zusatzterm eigentlich  $-\lambda[K(\epsilon_1, \epsilon_2) - C]$  lauten. Die Konstante hat jedoch keinen Einfluss auf das Ergebnis und kann somit weggelassen werden. Damit muss also gelten

$$\left( \frac{\partial(J - \lambda K)}{\partial \epsilon_i} \right)_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0} = 0 \quad (i = 1, 2) . \tag{3.37}$$

Die  $J, K$  sind in  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  symmetrisch, so dass die beiden Bedingungen ( $i = 1, 2$ ) identisch sind. Wir haben also schlußendlich die Bedingung

$$J^*[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F^*(y, y', x) = \text{minimal} , \quad \text{wobei} \quad F^* = F - \lambda G . \tag{3.38}$$

Dies führt auf die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F^*(y, y', x)}{\partial y} , \tag{3.39}$$

beziehungsweise

$$\frac{d}{dx} (F_{y'} - \lambda G_{y'}) = F_y - \lambda G_y . \tag{3.40}$$

Die Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung enthält zwei Integrationskonstanten  $c_1, c_2$  und hängt zudem von  $\lambda$  ab, also  $y_0 = y(x, c_1, c_2, \lambda)$ . Die drei Parameter  $c_1, c_2, \lambda$  sind durch die Randbedingungen Glg. (3.33) und die Nebenbedingung Glg. (3.32) festgelegt.

Es sei noch die *Verallgemeinerung* angeben. So kann das Variationsproblem Glg. (3.31) durch mehrere Bedingungen gemäß Glg. (3.32) eingeschränkt werden. Das heißt

$$K_i[y] = \int_{x_1}^{x_2} G_i(y, y', x) dx = C_i \quad (i = 1, \dots, R) . \tag{3.41}$$

Unter Verwendung von Glg. (3.30) ergibt dies die Euler-Lagrange-Gleichung für

$$F^* = F(y, y', x) - \sum_{i=1}^R \lambda_i G_i(y, y', x) . \quad (3.42)$$

Deren Lösung hängt von zwei Integrationskonstanten und  $R$  Parametern  $\lambda_i$  ab. Sie sind aus den zwei Randbedingungen und den  $R$  Nebenbedingungen zu bestimmen.

### 3.3 Hamiltonsches Prinzip

Beim Hamiltonschen Prinzip handelt es sich um ein Variationsprinzip, dessen Euler-Lagrange-Gleichungen die Lagrangegleichungen der Mechanik sind. Es erlaubt, die Grundgesetze der Mechanik elegant zu formulieren und wird auch in anderen Gebieten der Physik angewandt.

Betrachten wir die Form der Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} , \quad (3.43)$$

so legt sie nahe, sie als Euler-Lagrange Gleichungen für das Stationaritätsprinzip

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = \text{stationär} \quad (3.44)$$

aufzufassen. Das *Wirkungsfunktional*  $S$ , kurz *Wirkung*, wird jeder Bahnkurve  $q(t)$  zugeordnet. Im Argument der Lagrangefunktion  $L$  steht  $q$  für  $(q_1, \dots, q_f)$  und  $\dot{q}$  für  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ . Die Randbedingungen sind dabei, dass die Variation der Endpunkte festgehalten wird, d.h.

$$q_\alpha(t_1) = q_{1\alpha} \quad , \quad q_\alpha(t_2) = q_{2\alpha} . \quad (3.45)$$

Man nennt

Hamiltonsches Prinzip:  $\delta S[q] = 0$

Das *Hamiltonsche Prinzip* ist eine Bedingung an die gesuchte Bahnkurve  $q(t)$  und äquivalent zu den Lagrangegleichungen 2. Art, also

$$\delta S[q] = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} . \quad (3.46)$$

Meist wird  $S$  minimal, so dass man vom *Prinzip der kleinsten Wirkung* spricht.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass die Bewegung so abläuft, dass die Bahnkurve die Wirkung stationär macht.

Der Bewegungsablauf eines mechanischen Systems wird also folgendermaßen bestimmt:

- Auffinden der Lagrangefunktion  $L$ , meist gegeben durch  $L = T - V$ , und damit der Wirkung  $S$ .

- Betrachte alle Wege  $q(t) = \{q_\alpha(t)\}$ , die von den Anfangspunkten  $q_{1\alpha}$  zur Zeit  $t_1$  zu den Endpunkten  $q_{2\alpha}$  zur Zeit  $t_2$  führen. Finde die Wege  $q_\alpha(t)$ , die das Minimum (oder Extremum) von  $S$  ergeben. Falls  $\bar{q}(t)$  der gesuchte Weg ist, so gilt

$$S[q(t)] \geq S[\bar{q}(t)] \quad (3.47)$$

für alle  $q(t)$ .

- Aus der Stationaritätsbedingung  $\delta S/\delta q = 0$  folgen die Lagrangegleichungen.

### 3.3.1 Lagrangegleichungen 1. Art

Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten, das durch  $N$  Vektoren  $\vec{r}_N$  beschrieben wird. Die inneren und äußeren Kräfte ergeben sich aus einem Potential  $V$ . Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) . \quad (3.48)$$

Ferner seien  $N_Z$  Zwangsbedingungen vorhanden,

$$A_\mu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad \mu = 1, \dots, N_Z . \quad (3.49)$$

Damit gelten die Lagrangegleichungen 1. Art (2.18), die sich schreiben lassen als

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial r_i} . \quad (3.50)$$

Wir betrachten andererseits das Variationsproblem ( $\vec{r} \equiv \{\vec{r}_i\}$ )

$$S = S[\vec{r}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \text{stationär} \quad , \quad \text{wobei } A_\mu(\vec{r}, t) = 0 . \quad (3.51)$$

Dies führt zu dem Variationsproblem

$$\delta S^*[\vec{r}, \lambda, t] = 0 , \quad (3.52)$$

mit

$$S^*[\vec{r}, \lambda, t] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) A_\mu(\vec{r}, t) \right] . \quad (3.53)$$

Im Vergleich zu Glg. (3.38) wurde aus Gründen der Konvention das Vorzeichen von  $\lambda$  geändert. Dies hat aber keinen Einfluss auf das Ergebnis. Die Euler-Lagrangegleichungen von

$$L^*(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) A_\mu(\vec{r}, t) \quad (3.54)$$

sind identisch mit Glg. (3.50). Damit gilt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L^*(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{Lagrangengleichungen 1. Art.} \quad (3.55)$$

Somit kann das Hamiltonsche Prinzip auch auf Systeme mit Zwangsbedingungen angewandt werden. Diese physikalischen Zwangsbedingungen sind dann die Nebenbedingungen des Variationsproblems.

### 3.3.2 Bemerkungen

Das Hamiltonsche Prinzip wird meist nicht explizit angeschrieben, aber mit den Lagrangegleichungen implizit verwendet. Bei allgemeinen Betrachtungen wie etwa Symmetrien oder beim Aufstellen neuer Theorien ist es der geeignete Ausgangspunkt. Das Prinzip der kleinsten Wirkung ist die allgemeinste und kompakteste Formulierung der Mechanik:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = 0. \quad (3.56)$$

Diese Formulierung ist völlig unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Weiterhin vorteilhaft ist, dass sich die Form der Lagrangefunktion durch Symmetriebedingungen stark einschränken lässt. Betrachten wir als Beispiel die Lagrangefunktion eines freien Teilchens. Für sie muss gelten

1. Aufgrund der Homogenität der Zeit kann  $L$  nicht explizit von  $t$  abhängen.
2. Aufgrund der Homogenität des Raumes kann  $L$  nicht explizit von  $\vec{r}$  abhängen.
3. Ferner muss  $L$  isotrop sein und kann damit nicht von einem Vektor abhängen, der eine bestimmte Raumrichtung auszeichnet.

Damit kann  $L$  nur von  $\dot{r}^2$  abhängen. Die einfachste Möglichkeit ist

$$L = \text{const.} \cdot \dot{r}^2. \quad (3.57)$$

Dies liefert mit  $\text{const.} = m/2$  die bekannte Form.

### 3.3.3 Unbestimmtheit der Lagrangefunktion

Es kann verschiedene Lagrangefunktionen geben, die zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Sie sind zueinander gleichwertig. Da  $\delta \int dt L = 0$  mit den Bewegungsgleichungen äquivalent ist, ist also eine vorgegebene Lagrangefunktion  $L$  gleichwertig zu  $L^* = \text{const.} \cdot L$  oder zu  $L^* = L + \text{const.}$ .

*Eichtransformationen* führen zu einer Klasse von gleichwertigen Lagrangefunktionen. Diese Transformationen sind dadurch gegeben, dass zu  $L$  die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $f(q, t)$  addiert. Die Funktion hängt nicht von  $\dot{q}$  ab. Wir haben also die Transformation

$$L(q, \dot{q}, t) \longrightarrow L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t). \quad (3.58)$$

Die Lagrangefunktionen  $L$  und  $L^*$  führen zu denselben Bewegungsgleichungen, wie nun gezeigt wird. Das Wirkungsintegral zu  $L^*$  lautet

$$S^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L^* = \int_{t_1}^{t_2} dt L + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt L + \underbrace{f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)}_{\text{const.}}. \quad (3.59)$$

Bei der Variation von  $S$  werden die Bahnen  $q(t)$  variiert, so dass

$$\delta S^* = \delta S + \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)_{t_2} \delta q_i(t_2) - \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)_{t_1} \delta q_i(t_1) = \delta S, \quad (3.60)$$

da die Variation an den Randwerten verschwindet. Damit ist also  $\delta S^* = \delta S$ , und somit sind die Bedingungen  $\delta S^* = 0$  und  $\delta S = 0$  identisch. Die Lagrangefunktionen  $L$  und  $L^*$  sind damit gleichwertig, da sie zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Wir betrachten zwei Beispiele.

(i) *Galileitransformation:*

Die Transformation ist durch  $\dot{\vec{r}} \rightarrow \dot{\vec{r}} + \vec{v}$  ( $\vec{v} = \text{const.}$ ) gegeben. Damit transformiert sich die Lagrangefunktion gemäß

$$L \rightarrow L + m\dot{\vec{r}}\vec{v} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 = L + \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2}\vec{v}^2 t). \quad (3.61)$$

Der Zusatzterm kann also als totale Zeitableitung geschrieben werden, so dass beide Lagrangefunktionen zu denselben Bewegungsgleichungen führen.

(ii) *Eichtransformation in der Elektrodynamik:*

Durch die Definitionen<sup>2</sup>

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.62)$$

sind die elektromagnetischen Potential  $\vec{A}$  und  $\Phi$  nur bis auf eine Eichtransformation festgelegt. So sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  unter der Transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t), \quad \Phi \rightarrow \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.63)$$

mit beliebigem  $\Lambda(\vec{r}, t)$  invariant. Unter dieser Transformation ändert sich  $L$  [ $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi + \frac{Q}{c}\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$ ] gemäß

$$L \rightarrow L + \frac{Q}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{Q}{c}\vec{\nabla}\Lambda \cdot \dot{\vec{r}} = L + \frac{Q}{c}\frac{d\Lambda(\vec{r}, t)}{dt}. \quad (3.64)$$

Der Zusatzterm ist also durch eine totale zeitliche Ableitung gegeben, und es folgt die Invarianz der Bewegungsgleichungen.

### 3.4 Symmetrien, Erhaltungsgrößen, Noethertheorem

Mithilfe des Prinzips der kleinsten Wirkung können allgemeine Zusammenhänge in der Mechanik abgeleitet werden. So gibt es einen Zusammenhang zwischen Symmetrien eines betrachteten Systems und daraus folgenden Erhaltungssätzen. (Beispiele: Translationsinvarianz  $\rightarrow$  Impulserhaltung, Isotropie des Raumes  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung). Dieser Zusammenhang soll im folgenden allgemein untersucht werden.

Wir betrachten das Verhalten der Wirkung  $S$  bzw. der Lagrangefunktion  $L(x, \dot{x}, t)$  unter Transformationen der Koordinaten und der Zeit, die von einem kontinuierlichen Parameter  $\epsilon$  abhängen,

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow x_i^* = x_i + \epsilon\psi_i(x, \dot{x}, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2) & (i = 1, \dots, N) \\ t &\rightarrow t^* = t + \epsilon\varphi(x, \dot{x}, t) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.65)$$

<sup>2</sup>Setzt man  $c = 1$ , wie häufig getan in z.B. der Hochenergiephysik, so erhält man die Glgen. (2.70) und (2.71).

Dabei sind  $\psi_i(x, \dot{x}, t)$  und  $\varphi(x, \dot{x}, t)$  beliebige Funktionen. Im folgenden werden die Terme  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  nicht mehr geschrieben. Sie beeinflussen das Ergebnis nicht. Beispiele für solche Transformationen sind

1. Zeittranslation ( $\varphi = 1, \psi_i = 0$ ):  $t^* = t + \epsilon, x_i^*(t^*) = x_i(t)$ .

Bemerkung: Zum Beispiel wird  $x(t) = \sin(t)$  zu  $x^*(t^*) = \sin(t^* - \epsilon)$ . Hierbei bedeutet der Stern in  $x^*$ , dass  $x^*(t^*)$  eine andere Funktion der neuen Variablen  $t^*$  ist. Und die Bedingung  $x^* = x$  bedeutet, dass die Bahnkurve selbst unter der Transformation unverändert ist.

2. Räumliche Translation ( $\varphi = 0, \psi_i = 1$ ):  $x_i^* = x_i + \epsilon, t^* = t$ .

3. Drehung ( $\vec{\psi} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \varphi = 0$ ):  $\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon \vec{\omega} \times \vec{r}, t^* = t$ .

4. Galileitransformation ( $\vec{\psi} = \vec{v}t, \varphi = 0$ ):  $\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{v}t, t^* = t$ .

Wir vergleichen die ursprüngliche Wirkung, das Funktional  $S[x(t)]$  für die Bahn  $x(t)$  und die Randwerte  $t_1, t_2$ , mit dem Funktional

$$S^* = S[x^*(t^*)] = \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \dot{x}^*, t^*) . \quad (3.66)$$

Bemerkung: In den Argumenten der Funktionen stehen  $x^*, \dot{x}^*$  immer stellvertretend für  $x_i^*, \dot{x}_i^*$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Dabei sind die Randbedingungen

$$x_i^*(t_{1,2}^*) = x_i(t_{1,2}) + \epsilon \psi_i(x(t_{1,2}), \dot{x}(t_{1,2}), t_{1,2}) . \quad (3.67)$$

Da das Funktional  $S$  die Bewegungsgleichungen bestimmt, gilt bei Invarianz unter der betrachteten Transformation

$$\text{Invarianz: } S^* = S . \quad (3.68)$$

Dies ist der mathematische Ausdruck für die Symmetrie des durch  $L$  beschriebenen Systems unter der betrachteten Transformation. Ist  $S^*$  invariant, so gilt also

$$\frac{\partial S^*}{\partial \epsilon} = 0 . \quad (3.69)$$

Aus der Invarianz kann ein Erhaltungssatz für eine Größe  $Q$  abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(x, \dot{x}, t) &= 0, \quad \text{wobei} \\ Q &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Beweis: Wir betrachten

$$\begin{aligned} S^* &= \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt^* L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L(x, \frac{dx}{dt}, t) + \epsilon \left[ \frac{d}{d\epsilon} \left( L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Der Index  $\epsilon = 0$  bedeutet, dass das Innere der eckigen Klammer an der Stelle  $\epsilon = 0$  zu nehmen ist. Damit Invarianz vorliegt, muss gelten

$$S^* = S \quad (3.72)$$

und also

$$\frac{d}{d\epsilon} \left( L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right)_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{Invarianzbedingung.} \quad (3.73)$$

Aus  $t^* = t + \epsilon\varphi$  folgt

$$\frac{dt^*}{dt} = 1 + \epsilon \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.74)$$

und aus  $x_i^* = x_i + \epsilon\psi_i$  folgt

$$\frac{dx_i^*}{dt^*} = \frac{dx_i^*}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \left( \frac{dx_i}{dt} + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} \right) \left( 1 - \epsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) = \dot{x}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.75)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\epsilon} \left[ L \left( x_i + \epsilon\psi_i, \dot{x}_i + \epsilon \frac{d\psi_i}{dt} - \epsilon \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt}, t + \epsilon\varphi \right) \left( 1 + \epsilon \frac{d\varphi}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \psi_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{d\psi_i}{dt} - \dot{x}_i \frac{d\varphi}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \varphi + L \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i \right) + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

wobei

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (3.77)$$

benutzt wurde. Wir verwenden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \right] \dot{x}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

und erhalten

$$\frac{d}{dt} Q(x, \dot{x}, t) = 0 \quad (3.79)$$

mit der Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi = \text{const.} \quad (3.80)$$

Es gilt also das **Noethertheorem**, das heißt folgender allgemeiner Zusammenhang:

Die Symmetrie eines Systems, welche durch die Invarianz der Wirkung unter einer einparametrischen Raum-Zeit-Transformationsschar gegeben ist (bestimmt durch die Funktionen  $\psi_i$  und  $\varphi$ ), ist verknüpft mit der Existenz einer Erhaltungsgröße  $Q$ .

$$Q = Q(x, \dot{x}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi = \text{const.} . \quad (3.81)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Symmetrie } S & \longrightarrow \text{ Erhaltungsgröße} \\ S^* = S & Q = Q(x, \dot{x}, t) = \text{const.} \end{array} \quad (3.82)$$

Es gibt also einen tiefliegenden Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Systems unter Symmetrietransformationen und der beobachtbaren Konsequenz der Existenz von Erhaltungsgrößen. Dieser ist von grundlegender Bedeutung für die gesamte Physik.

Bemerkung: Das Noether-Theorem wurde von der Mathematikerin Emmy Noether formuliert. Sie wirkte bei der Begründung der modernen Algebra mit. Sie wurde 1882 als Tochter des Mathematikprofessors Max Noether geboren. 1909 von Felix Klein und David Hilbert nach Göttingen berufen, erhielt sie erst 1919 die Erlaubnis sich zu habilitieren. 1933 wurde ihr durch die Nationalsozialisten die Lehrerlaubnis entzogen. Sie emigrierte in die USA. wo sie 1935 starb.

#### Anwendung des Noethertheorems

1. Aufschreiben der Funktionen  $\psi_i$  und  $\varphi$  der betrachteten Transformation.
2. Prüfung der Symmetrie gegenüber den betrachteten Transformationen unter Verwendung von Glg. (3.73).
3. Falls die Invarianzbedingung erfüllt ist, Bestimmung der Erhaltungsgröße  $Q$  aus  $L, \psi_i, \varphi$ .

#### Beispiele:

1. Homogenität der Zeit:  $L$  hängt nicht explizit von der Zeit ab:

$$\begin{array}{ll} x_i^* = x_i & \longrightarrow \psi_i = 0 \\ t^* = t + \epsilon & \longrightarrow \varphi = 1 . \end{array} \quad (3.83)$$

Damit haben wir

$$Q = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i . \quad (3.84)$$

Falls

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{x}_i^2 - V(x) \quad (3.85)$$

haben wir

$$Q = T - V - 2T = -(V + T) = -E . \quad (3.86)$$

Es folgt also **Energieerhaltung**.

2. Homogenität des Raumes:  $L$  ist unter zeitunabhängigen räumlichen Verschiebungen invariant. Zum Beispiel Verschiebung in  $x$ -Richtung. Also:

$$\vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \epsilon \hat{x} \longrightarrow \psi_{nx} = 1, \quad \psi_{ny} = \psi_{nz} = 0 \quad (3.87)$$

$$t^* = t \longrightarrow \varphi = 0. \quad (3.88)$$

Bei  $\hat{x}$  handelt es sich um den auf Länge 1 normierten Vektor in  $x$ -Richtung, also  $\hat{x} = (1, 0, 0)^T$ . Damit erhalten wir für die Erhaltungsgröße

$$Q = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = \sum_n p_{nx} = P_x = \text{const.}, \quad (3.89)$$

wobei

$$\vec{p}_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n} \quad (3.90)$$

der Impuls des  $n$ -ten Teilchens ist und  $\vec{P}$  der **Gesamtimpuls** des Systems. Es ist also der Gesamtimpuls in  $x$ -Richtung erhalten.

3. Isotropie des Raumes:  $L$  ist invariant unter Rotationen um eine Achse in beliebiger Richtung, welche durch einen Bezugspunkt geht, der hier als Ursprung gewählt wird. Wir betrachten als Beispiel Drehungen für einen Massenpunkt um eine auf 1 normierte Achse  $\hat{\omega}$ . Das heißt

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \epsilon(\hat{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.91)$$

Also

$$x_i^* = x_i + \epsilon \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_j x_k \longrightarrow \psi_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_j x_k, \quad \text{bzw.} \quad \vec{\psi} = \hat{\omega} \times \vec{r} \quad (3.92)$$

$$t^* = t \longrightarrow \varphi = 0. \quad (3.93)$$

Die Erhaltungsgröße ist also

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i = \sum_{i,j,k} p_i \epsilon_{ijk} \hat{\omega}_j x_k = \vec{p} \cdot (\hat{\omega} \times \vec{r}) = \hat{\omega} \cdot \vec{L}, \quad (3.94)$$

wobei  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  den Drehimpuls bezeichnet. Im letzten Schritt wurde die Identität  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  verwendet. Die erhaltene Ladung  $Q$  ist also die **Drehimpulskomponente** in Richtung der Drehachse.

### 3.4.1 Erweitertes Noethertheorem

Die geforderte Invarianzbedingung  $S^* = S$  ist stärker als die eigentlich wesentliche Bedingung, nämlich dass die Bewegungsgleichungen invariant unter der betrachteten Transformation sind. Letzteres ist äquivalent zu

$$\delta S^* = \delta S. \quad (3.95)$$

Es ist aber  $\delta S$  nur bis auf totale Zeitableitungsterme definiert, so dass auch solche Transformationen als Invarianzprobleme erlaubt sind, die die Lagrangefunktion um eine totale Zeitableitung ändern. Damit lautet die Invarianzbedingung

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L(x^*, \frac{dx^*}{dt^*}, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} f(x, t). \quad (3.96)$$

Der Erhaltungsgröße ergibt sich zu

$$Q = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \psi_i + \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) \varphi - f(x, t) = \text{const.} . \quad (3.97)$$

Wir betrachten als Beispiel die Galileiinvarianz:

$$\vec{r}_n^* = \vec{r}_n + \epsilon t \hat{u} \quad , \quad \vec{\psi}_n = t \hat{u} \quad , \quad t^* = t . \quad (3.98)$$

Dabei bezeichnet  $\hat{u}$  den auf 1 normierten Geschwindigkeitsvektor. Wir betrachten die Lagrangefunktion für  $N$  Teilchen der Masse  $m_n$ . Ferner soll das Potential nur vom Abstand der Teilchen abhängen. Also

$$L = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \dot{\vec{r}}_n^2 - \sum_{\substack{n, m \\ n < m}} V_{nm}(|\vec{r}_n - \vec{r}_m|) . \quad (3.99)$$

Damit

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[ L^* \cdot \frac{dt^*}{dt} \right]_{\epsilon=0} = \sum_n m_n \dot{\vec{r}}_n \cdot \hat{u} = \frac{d}{dt} (M \vec{R} \cdot \hat{u}) = \frac{df}{dt} . \quad (3.100)$$

Es gilt also nicht  $S^* = S$ , sondern nur  $\delta S^* = \delta S$ . Wir haben hier den Schwerpunktsvektor

$$\vec{R} = \frac{\sum_n m_n \vec{r}_n}{M} \quad (3.101)$$

mit der Gesamtmasse  $M = \sum_n m_n$  eingeführt. Für die Erhaltungsgröße ergibt sich

$$Q = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_n} \vec{\psi}_n - f(x, t) = M(\dot{\vec{R}}t - \vec{R}) \cdot \hat{u} = \text{const.} . \quad (3.102)$$

Dies gilt für beliebige Richtungen  $\hat{u}$  der Geschwindigkeit, so dass

$$\dot{\vec{R}}t - \vec{R} = \text{const.} \quad \longrightarrow \quad \vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0 . \quad (3.103)$$

Dies folgt aber bei Translationsinvarianz bereits aus der Impulserhaltung, denn dann  $M \dot{\vec{R}} = \text{const.}$ .

# Kapitel 4

## Starrer Körper

Die Bewegung eines starren Körpers ist komplexer als die eines einzelnen Massenpunktes. Zunächst betrachten wir die Definition eines starren Körpers und die Anzahl seiner Freiheitsgrade.

*Definition:* Der starre Körper besteht aus einer beliebigen Anzahl  $N$  von Massenpunkten mit jeweils Masse  $m_n$ , die starr miteinander verbunden sind, die also einen festen Abstand zueinander besitzen:

- $N$  Massenpunkte  $m_n$  mit den Positionen  $\vec{r}_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ .
- Die Abstände sind konstant, also  $|\vec{r}_n - \vec{r}_m| = r_{nm} = \text{const.}$ ,  $n, m = 1, \dots, N$ .

Wir haben  $\frac{1}{2}N(N-1)$  Zwangsbedingungen, die jedoch nicht unabhängig sind. Wir betrachten als Beispiel  $N = 3$  Massenpunkte. Diese sind durch  $3N = 9$  kartesische Koordinaten beschrieben und unterliegen  $R = 3$  Zwangsbedingungen, nämlich den drei festen Abständen zueinander,  $r_{12}, r_{13}, r_{23}$ . Damit haben wir in diesem System  $f = 3N - R = 6$  Freiheitsgrade. Fügen wir einen Massenpunkt hinzu, so kann seine Lage durch 3 Abstände zu bereits vorhandenen Massenpunkten bestimmt werden. Damit erhalten wir 3 zusätzliche Koordinaten und 3 weitere Zwangsbedingungen. Insgesamt bleibt es also bei den  $f = 6$  Freiheitsgraden auch für  $N \geq 3$ ,

$$\text{Freiheitsgrade des starren Körpers: } f = 3N - R = 6 . \quad (4.1)$$

Dies sieht man auch folgendermaßen ein: Beschreibt man die Lage des starren Körpers zunächst durch die 3 Schwerpunktskoordinaten des starren Körpers, so verbleiben als Freiheitsgrade im Schwerpunktsystem ( $\vec{R} = 0$ ) die Drehungen um alle möglichen Achsen durch den Schwerpunkt. Von diesen gibt es in 3 Raumdimensionen 3 unabhängige, beispielsweise die Drehungen um drei kartesische Achsen. Diese können durch 3 Drehwinkel beschrieben werden. Insgesamt haben wir also 6 Freiheitsgrade. Diese können in drei Freiheitsgrade für die Translation und in drei Freiheitsgrade für die Rotation aufgeteilt werden. Die Bewegung des starren Körpers wird dann durch die Zeitabhängigkeit von 6 geeigneten Koordinaten beschrieben.

Man versteht unter

*Kinematik:* Die Beschreibung der Bewegung.

*Dynamik:* Die physikalischen Gesetze, die hinter der Bewegung stecken.

Hält man bei der Bewegung des starren Körpers einen Punkt fest, so verbleiben nur die 3 Drehfreiheitsgrade. Solche Systeme nennt man *Kreisel*.

**Winkelgeschwindigkeit** Wir führen zwei Koordinatensysteme ein. Ein im starren Körper *körperfestes* Koordinatensystem, bezeichnet mit KS. Ein weiteres, welches ein Inertialsystem ist, in dem also die Newton'schen Axiome gelten, bezeichnet mit IS. Man nennt IS ein *raumfestes* Koordinatensystem. Die Notation für die kartesischen Koordinaten und die zugehörigen orthonormierten Basisvektoren von IS und KS ist

$$\begin{array}{ll} \text{Raumfestes IS} & : x, y, z \quad \text{mit den Achsen } \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z \\ \text{Körperfestes KS} & : x_1, x_2, x_3 \quad \text{mit den Achsen } \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \end{array} . \quad (4.2)$$

Da das KS fest mit dem Körper verbunden ist, sind die Basisvektoren  $\hat{e}_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) im allgemeinen zeitabhängig, d.h. KS ist kein Inertialsystem. Beachte, dass das körperfeste KS nicht eindeutig festgelegt ist. Ein beliebiger Punkt im starren Körper und beliebige, relativ zum Körper ruhende Achsen können jeweils als Ursprung und als Koordinatenachsen von KS gewählt werden.

Der Ursprung 0 des körperfesten KS habe im IS den Ortsvektor  $\vec{r}_0$ . Seine Geschwindigkeit ist damit

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} . \quad (4.3)$$

Die Zeitableitung bezieht sich, sofern nichts anderes gesagt wird, auf das Inertialsystem. Das körperfeste KS drehe sich relativ zum Inertialsystem mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \quad (4.4)$$

Hierbei bezeichnet  $d\vec{\varphi}$  eine Drehung um den Winkel  $|d\vec{\varphi}|$  im Zeitelement  $dt$  zur Zeit  $t$  um eine Achse in Richtung von  $d\vec{\varphi}$ . Es sind sowohl die Richtung der Drehachse also auch der Betrag der Winkelgeschwindigkeit zeitabhängig.

Wir betrachten einen beliebigen Punkt  $P_n$  des starren Körpers. Sein Ortsvektor im IS sei  $\vec{r}_{n,IS}$ , siehe Abb. 4.1. Der Vektor vom Ursprung 0 von KS zu  $P_n$  ist

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n,IS} - \vec{r}_0 . \quad (4.5)$$

Die Geschwindigkeit des Punktes  $P_n$  in IS ist damit

$$\vec{v}_{n,IS} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{n,IS} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \vec{r}_n) = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}_n}{dt} . \quad (4.6)$$

Die Zeitableitung bezieht sich auf die Änderung von  $\vec{r}_n$  in Bezug auf IS. Diese kann durch die Änderung bezüglich KS ausgedrückt werden durch

$$\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \left( \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right)_{IS} = \left( \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right)_{KS} + \vec{\omega} \times \vec{r}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n . \quad (4.7)$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass der Punkt  $P_n$  in KS ruht (er ist ein Punkt des starren Körpers), und also

$$\left( \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right)_{KS} = 0 . \quad (4.8)$$

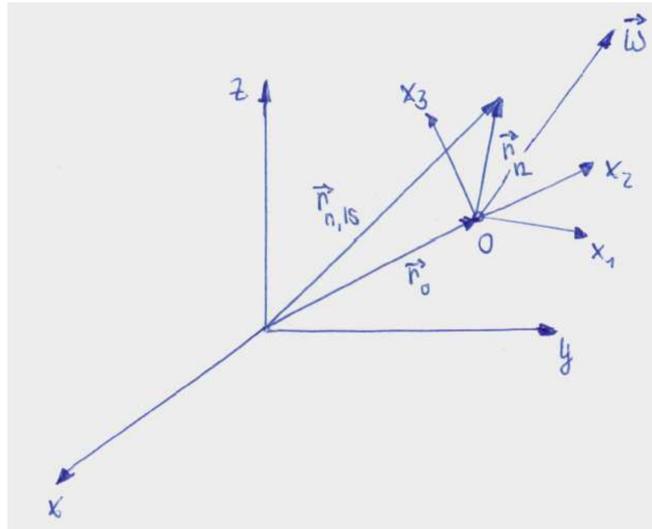


Abbildung 4.1: Lage des Punktes  $P_n$  in IS und KS.

Die Relation (4.7) gilt auch bei zeitabhängigem  $\vec{\omega}$ .

*Einschub* Herleitung des Terms  $\vec{\omega} \times \vec{r}_n$ : Wir betrachten ein KS, das gegenüber IS mit der Winkelgeschwindigkeit  $|d\vec{\varphi}|/dt$  rotiert. Sei  $\vec{G}$  ein Vektor, der bezüglich KS zeitunabhängig ist. Er hat in KS eine konstante Länge und bildet einen konstanten Winkel mit den Koordinatenachsen. Für die Änderung dieses Vektors aufgrund der Rotation von KS gilt (siehe Abb. 4.2)

$$|d\vec{G}_{rot}| = |\vec{G}||d\vec{\varphi}| \sin \theta \quad , \quad |d\vec{G}_{rot}| \perp \vec{\omega} \quad , \quad |d\vec{G}_{rot}| \perp \vec{G} . \quad (4.9)$$

Und damit gilt

$$d\vec{G}_{rot} = d\vec{\varphi} \times \vec{G} = (\vec{\omega} dt) \times \vec{G} \quad , \quad \text{q.e.d.} . \quad (4.10)$$

Aus (4.6) und (4.7) ergibt sich

$$\vec{v}_{n,IS} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n . \quad (4.11)$$

Es soll nun untersucht werden, ob diese Gleichung von der Wahl des Ursprungs von KS abhängt. Der neue Ursprung  $0'$  sei durch

$$\vec{r}_{0'} = \vec{r}_0 - \vec{a} \quad (4.12)$$

gegeben, siehe Fig. 4.3. Für diese Wahl des Ursprungs sei die Winkelgeschwindigkeit von KS durch  $\vec{\omega}'$  gegeben. Dann gilt nach einer analogen Ableitung wie oben

$$\vec{v}_{n,IS} = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_n . \quad (4.13)$$

Vergleich mit (4.11) liefert wegen  $\vec{r}'_n = \vec{r}_n + \vec{a}$

$$\vec{v}_{0'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'_n = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega}' \times (\vec{r}_n + \vec{a}) \stackrel{!}{=} \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n . \quad (4.14)$$

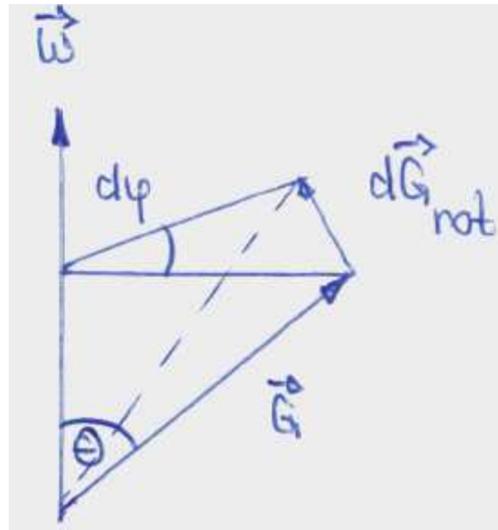


Abbildung 4.2: Ein rotierendes KS bewegt sich gegenüber IS mit einer Winkelgeschwindigkeit  $|d\vec{\varphi}|/dt$ . Es ist die Änderung eines Vektors bei einer infinitesimalen Drehung dargestellt.

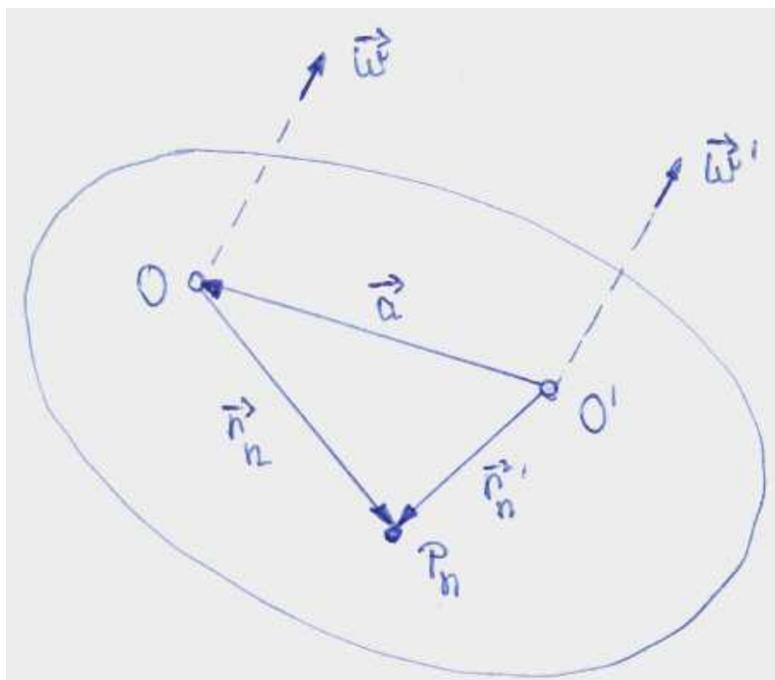


Abbildung 4.3: Wahl eines neuen Ursprungs  $0'$ , gegeben durch einen beliebigen Punkt des starren Körpers.

Diese Gleichung muss für alle  $\vec{r}_n$  gelten, woraus folgt, dass

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} \tag{4.15}$$

und

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{a} . \tag{4.16}$$

Damit haben wir gefunden, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  also *nicht* von der Wahl von KS abhängt. Die Größe  $\vec{\omega}$  charakterisiert den Rotationszustand des starren Körpers somit in eindeutiger Weise. Die Translationsgeschwindigkeit  $\vec{v}_0$  hängt hingegen von der Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems KS ab.

Im folgenden betrachten wir das hintereinander Ausführen zweier infinitesimaler Drehungen. Diese seien gegeben durch  $d\vec{\varphi}_a = \vec{\omega}_a dt$  und  $d\vec{\varphi}_b = \vec{\omega}_b dt$ . Wir wenden diese beiden Drehungen hintereinander auf einen beliebigen Vektor  $\vec{r}$  an und erhalten

$$d\vec{r}_a \equiv d\vec{\varphi}_a \times \vec{r} \quad , \quad d\vec{r}_b \equiv d\vec{\varphi}_b \times (\vec{r} + d\vec{r}_a) = d\vec{\varphi}_b \times \vec{r} . \tag{4.17}$$

Hier haben wir verwendet, dass die in den infinitesimalen Größen quadratischen Terme vernachlässigt werden können. Es gilt also

$$d\vec{r} = d\vec{r}_a + d\vec{r}_b = (d\vec{\varphi}_a + d\vec{\varphi}_b) \times \vec{r} = (\vec{\omega}_a + \vec{\omega}_b) \times \vec{r} dt . \tag{4.18}$$

Die Reihenfolge zweier infinitesimaler Drehungen kann also vertauscht werden. Die durch  $d\vec{\varphi}_a$  und  $d\vec{\varphi}_b$  definierten Drehungen ergeben nach hintereinander Ausführung  $d\vec{\varphi}_a + d\vec{\varphi}_b$ . Somit gilt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_b . \tag{4.19}$$

*Endliche Drehungen vertauschen aber im Allgemeinen nicht.* Drehungen können durch Matrizen dargestellt werden. Die Nichtvertauschbarkeit der endlichen Drehungen entspricht hier der Nichtvertauschbarkeit der Matrizenmultiplikation.

## 4.1 Eulersche Winkel

Die Tatsache, dass zwei nacheinander ausgeführte Drehungen nicht vertauschen, wenn sie nicht um die gleiche Achse stattfinden, macht die Definition verallgemeinerter Koordinaten für eine allgemeine Drehung nicht-trivial. Die am häufigsten verwendete Parametrisierung ist die durch den Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) gegebene.

Die Lage eines starren Körpers wird dann durch die verallgemeinerten Koordinaten bestimmt, die gegeben sind durch die drei kartesischen Koordinaten zur Festlegung des Vektors  $\vec{r}_0$  und durch die drei *Eulerschen Winkel*  $\phi, \psi, \theta$ . Letztere geben die Richtung der Achsen von KS relativ zu IS an. Es gilt weiterhin die Notation (4.2). Die Eulerwinkel werden folgendermaßen definiert, siehe Fig. 4.4: Die "Knotenlinie"  $K$  sei definiert als die Schnittgerade der  $x - y$ -Ebene mit der  $x_1 - x_2$ -Ebene. Somit haben wir die folgenden Winkel:

Der Einheitsvektor  $\hat{e}_K$  entlang der Knotenlinie bildet mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\phi$ .

Der Einheitsvektor  $\hat{e}_K$  entlang der Knotenlinie bildet mit der  $x_1$ -Achse den Winkel  $\psi$ .

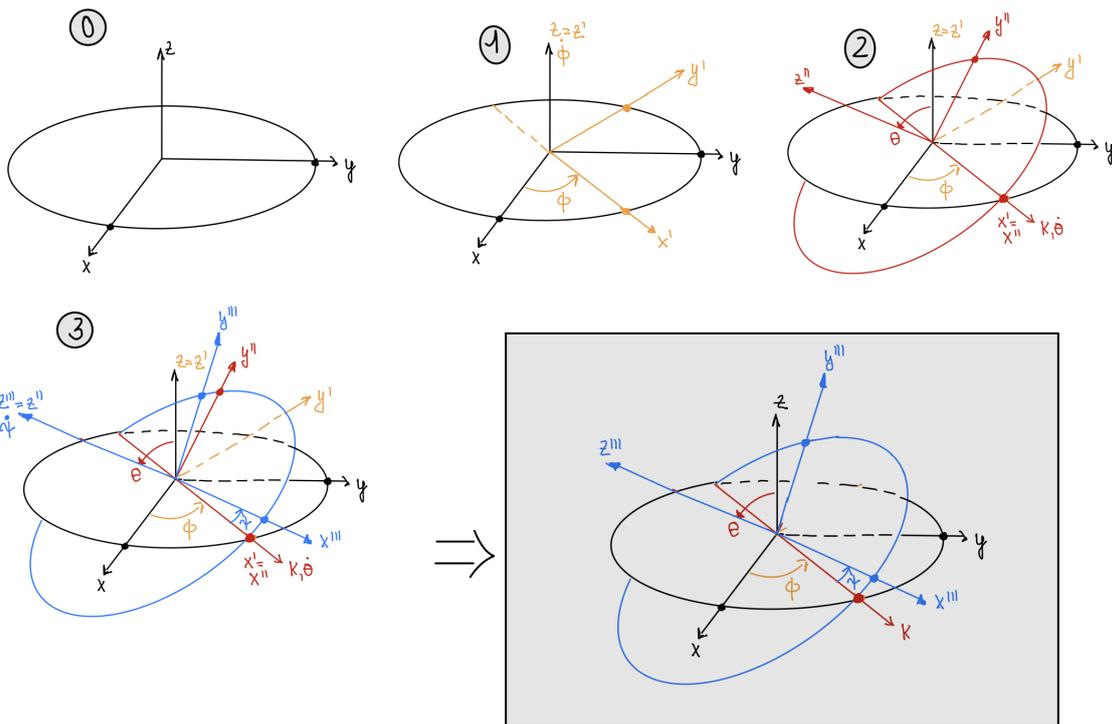
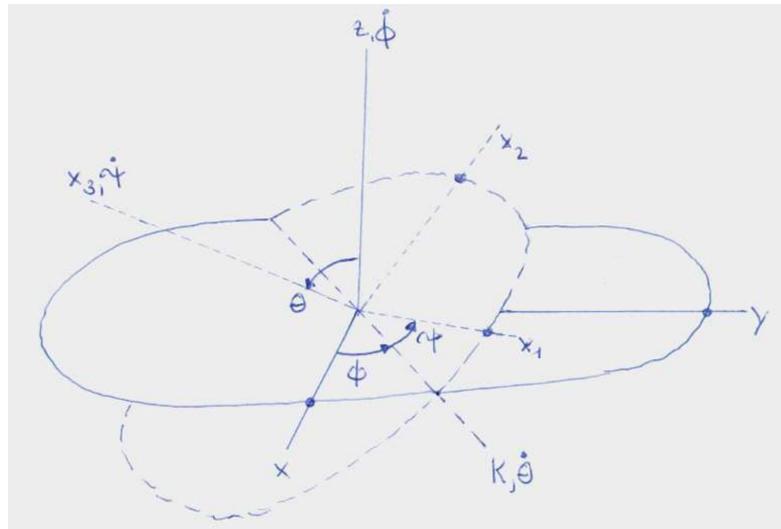


Abbildung 4.4: Festlegung der Lage von KS relativ zu IS durch die drei Eulerwinkel  $\phi, \psi, \theta$ . Die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ , gegeben durch die zeitliche Änderung jeweils eines Eulerwinkels, sind an der zugehörigen Drehachse angeschrieben. In der unteren Figur sind die einzelnen Drehungen dargestellt, die hintereinanderausgeführt zu der oberen Figur führen. Hier entsprechen  $(x''', y''', z''')$  den  $(x_1, x_2, x_3)$ .

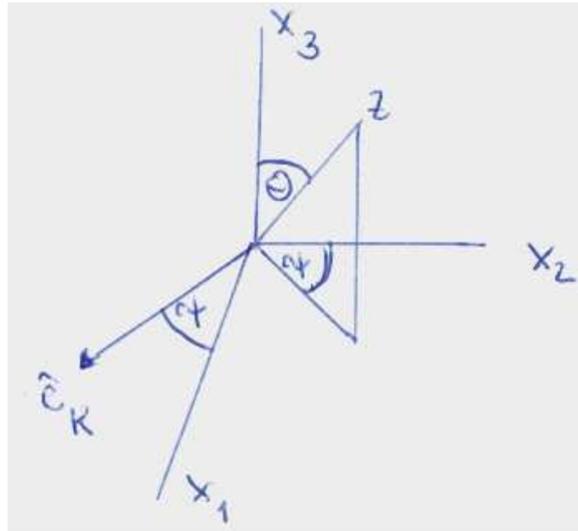


Abbildung 4.5: Projektion der  $z$ -Achse in die  $x_1 - x_2$ -Ebene.

Die dritte Variable ist der Winkel  $\theta$  zwischen der  $z$ -Achse und der  $x_3$ -Achse.

Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und den Eulerschen Winkeln hergestellt werden. Dazu betrachten wir das Entstehen der "schiefen" Lage des Körpers mit den Eulerwinkeln  $\psi, \theta, \phi$ . Diese kann man sich vorstellen als entstanden durch drei aufeinanderfolgende Drehungen:

$$\begin{aligned}
 \text{Drehung um die } z\text{-Achse:} & \quad d\psi = d\theta = 0, \quad \vec{\omega}_\phi = \dot{\phi} \hat{e}_z \\
 \text{Drehung um die Knotenlinie } K: & \quad d\phi = d\psi = 0, \quad \vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \hat{e}_K \\
 \text{Drehung um die } x_3\text{-Achse:} & \quad d\theta = d\phi = 0, \quad \vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} \hat{e}_3
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Richtungen von  $\hat{e}_K$  und  $\hat{e}_z$ <sup>1</sup> sind in KS gegeben durch

$$\vec{e}_K = \cos \psi \hat{e}_1 - \sin \psi \hat{e}_2 = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \tag{4.21}$$

$$\hat{e}_z = \sin \theta \sin \psi \hat{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3 . \tag{4.22}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus der Projektion der  $z$ -Achse in die  $x_1 - x_2$ -Ebene, siehe Fig. 4.5. Nun entsprechen beliebige *infinitesimale* Drehungen unabhängigen Änderungen  $d\phi, d\psi, d\theta$  der Eulerwinkel. Bei *infinitesimalen* Drehungen ist die Reihenfolge beliebig, und sie sind additiv, also

$$d\vec{\varphi} = \vec{\omega} dt = (\vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\phi) dt . \tag{4.23}$$

(Für Drehungen um endliche Winkel gilt ein komplizierter nichtlinearer Zusammenhang.) Und damit

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\phi = \dot{\theta} \hat{e}_K + \dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\phi} \hat{e}_z . \tag{4.24}$$

Die Winkelgeschwindigkeit kann entweder im System KS oder IS dargestellt werden:

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \vec{\omega} \hat{e}_1 + \vec{\omega} \hat{e}_2 + \vec{\omega} \hat{e}_3 & := (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \vec{\omega} \hat{e}_x + \vec{\omega} \hat{e}_y + \vec{\omega} \hat{e}_z & := (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \end{cases} \tag{4.25}$$

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Der Hut über einem Vektor bedeutet, dass dieser auf 1 normiert ist.

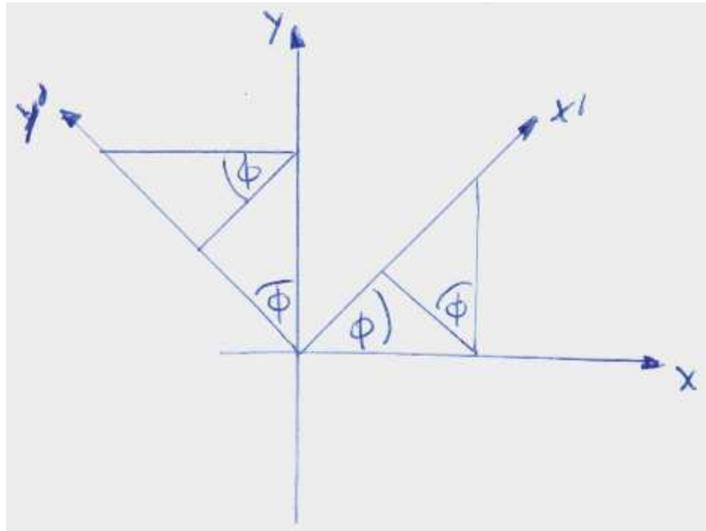


Abbildung 4.6: Drehung um die z-Achse.

Die Komponenten des Winkelgeschwindigkeitsvektors ergeben sich durch Projektion auf die jeweiligen Basisvektoren. Im System KS sind sie gegeben durch (verwende Gln. (4.21,4.22))

$$\omega_1 = \vec{\omega} \hat{e}_1 = (\dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_K + \dot{\phi} \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \quad (4.26)$$

$$\omega_2 = \vec{\omega} \hat{e}_2 = (\dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_K + \dot{\phi} \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad (4.27)$$

$$\omega_3 = \vec{\omega} \hat{e}_3 = (\dot{\psi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_K + \dot{\phi} \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta . \quad (4.28)$$

Somit ist die Winkelgeschwindigkeit durch die Eulerschen Winkel und ihre Zeitableitungen ausgedrückt. Die Ausdrücke werden später für die Lagrangeformulierung in den verallgemeinerten Koordinaten  $\psi, \theta, \phi$  verwendet werden.

#### 4.1.1 Ergänzung zu den Euler-Drehungen

Die Drehung eines Vektors kann durch eine Drehmatrix beschrieben werden,

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij} x_j \quad i = 1, 2, 3 . \quad (4.29)$$

Für die Drehung um die z-Achse um den Winkel  $\phi$  gilt z.B. (siehe Fig. 4.6)

$$x' = \cos \phi x + \sin \phi y \quad (4.30)$$

$$y' = -\sin \phi x + \cos \phi y \quad (4.31)$$

$$z' = z . \quad (4.32)$$

Und damit

$$D(\hat{z}, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.33)$$

Eine allgemeine Drehung um die Eulerwinkel  $\psi, \theta, \phi$  wird also beschrieben durch die Drehmatrix

$$D(\theta, \phi, \psi) = D(\hat{e}_3, \psi)D(\hat{e}_K, \theta)D(\hat{e}_z, \phi) . \quad (4.34)$$

Aufeinanderfolgende Drehungen werden durch das Matrixprodukt beschrieben.

## 4.2 Der Trägheitstensor

Im folgenden wird die kinetische Energie der Rotationsbewegung eines starren Körpers bestimmt. Diese ist eine quadratische Form in der Winkelgeschwindigkeit, deren Koeffizienten  $\Theta_{ik}$  den Trägheitstensor definieren.

Die kinetische Energie eines Systems von  $N$  Massenpunkten mit Masse  $m_n$  ist gegeben durch

$$T = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m_n \dot{\vec{r}}_{n,IS}^2 . \quad (4.35)$$

Mit Glg. (4.11) ergibt sich

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n v_{n,IS}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n [\vec{v}_0^2 + 2\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2] . \quad (4.36)$$

Hierbei ist  $\vec{r}_n$  der Vektor vom Ursprung 0 von KS zum Massenpunkt  $m_n$ . Wählt man den Ursprung geeignet, so verschwindet der in  $\vec{\omega}$  lineare Term. So ist

$$\sum_{n=1}^N m_n \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = (\vec{v}_0 \times \vec{\omega}) \cdot \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{v}_0 = 0 \\ 0 & \text{für } \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Im ersten Fall ruht der Ursprung von KS. Das ist insbesondere der Fall für einen Kreisel mit dem Unterstützungspunkt im Ursprung 0. Im zweiten Fall ist der Ursprung 0 gleich dem Schwerpunkt des starren Körpers, so dass der Schwerpunktsvektor  $(\sum_n m_n \vec{r}_n)/M$ , wobei  $M$  die Gesamtmasse des starren Körpers bezeichnet, verschwindet. Im folgenden gilt immer einer der beiden Fälle. Mit Glg. (4.37) ergibt sich die kinetische Energie Glg. (4.36)  $T$  zu einer Summe aus der kinetischen Energie der Translation  $T_{trans}$  und der Rotation  $T_{rot}$

$$T = \frac{M}{2} \vec{v}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 = T_{trans} + T_{rot} . \quad (4.38)$$

Wir werten die Rotationsenergie nun in KS aus. Wir haben

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ x_{n3} \end{pmatrix} . \quad (4.39)$$

Und mit

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}_n^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)^2 = \sum_{k=1}^3 \omega_k^2 \vec{r}_n^2 - \sum_{i,k=1}^3 (\omega_i x_{ni})(\omega_k x_{nk}) \quad (4.40)$$

folgt für die Rotationsenergie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \Theta_{ik} \omega_i \omega_k \quad (4.41)$$

mit dem Trägheitstensor

$$\text{Trägheitstensor: } \Theta_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n^2 \delta_{ik} - x_{ni} x_{nk}) \quad (4.42)$$

Der Trägheitstensor ist wie auch die  $\vec{r}_n$  (in KS!) zeitunabhängig. Das Wort Tensor bezieht sich auf sein Transformationsverhalten. Das Trägheitsmoment  $\Theta$  ist analog wie die Masse eine Eigenschaft des starren Körpers,

$$T_{trans} = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 . \quad (4.43)$$

Allerdings ist  $\Theta$  im Gegensatz zur Masse im Allgemeinen eine Tensorgröße.

Wir nehmen nun an, dass der Körper eine kontinuierliche Massenverteilung habe und führen die Massendichte  $\rho(\vec{r})$  ein. Sie ist gegeben durch

$$\rho(\vec{r}) = \text{Massendichte} = \frac{M}{V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\vec{r})}{\Delta V} , \quad (4.44)$$

wobei  $\Delta V$  ein kleines Volumen bei  $\vec{r}$  ist, in dem sich die Masse  $\Delta m$  befindet. Das Volumen ist groß genug gewählt, um viele Atome zu enthalten, aber klein genug, um möglicherweise makroskopische Inhomogenitäten nicht herauszumitteln. Ein Körper mit einer zeitunabhängigen kontinuierlichen Massendichte in KS kann als starrer Körper betrachtet werden. Wir betrachten hierfür das Volumen eines Körpers zerlegt in  $N$  Teilvolumina  $\Delta V_n$  bei  $\vec{r}_n$  und ersetzen die Masse eines jeden Teilvolumens,

$$m_n = \rho(\vec{r}_n) \Delta V_n , \quad (4.45)$$

durch seine Punktmasse  $m_n$  bei  $\vec{r}_n$ , so dass ein starrer Körper vorliegt. Der Fehler bei der Ersetzung durch die Punktmasse geht im Limes  $N \rightarrow \infty$  (und  $\Delta V_n \rightarrow 0$ ) gegen 0, da

$$\sum_{n=1}^N m_n \dots = \sum_{n=1}^N \rho(\vec{r}_n) \Delta V_n \dots \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int d^3 r \rho(\vec{r}) \dots . \quad (4.46)$$

Die Integration kann über den gesamten Raum ausgeführt werden, da außerhalb des starren Körpers  $\rho(\vec{r}) = 0$ . Damit erhalten wir

$$\Theta_{ik} = \int_V d^3 r \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) . \quad (4.47)$$

### 4.3 Der Drehimpuls

Für Drehbewegungen ist der Drehimpuls die relevante Größe. Abhängig von Bezugssystem und Bezugspunkt haben wir bezogen auf den Ursprung von IS

$$\vec{L}_{\text{IS}} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_{n,\text{IS}} \times \dot{\vec{r}}_{n,\text{IS}}) \quad (4.48)$$

und bezogen auf den Ursprung von KS

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) . \quad (4.49)$$

In beiden Fällen bezieht sich die Zeitableitung auf IS. Im Allgemeinen sind wir an Drehbewegungen des starren Körpers um seinen Schwerpunkt bzw. einen anderen festen Punkt interessiert und nicht an Drehungen des starren Körpers um eine Achse, die außerhalb liegt. Deshalb betrachten wir nur den Drehimpuls bezogen auf den Ursprung von KS. Da

$$\dot{\vec{r}}_n = \left( \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right)_{\text{IS}} = \omega \times \vec{r}_n , \quad (4.50)$$

erhalten wir

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) . \quad (4.51)$$

Mit

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} \quad (4.52)$$

ist

$$L_i = \sum_{n=1}^N m_n \sum_{j=1}^3 (r_n^2 \delta_{ij} - x_{ni} x_{nj}) \omega_j = \sum_{j=1}^3 \Theta_{ij} \omega_j , \quad (4.53)$$

ausgedrückt in den kartesischen Koordinaten von KS. Mit der Definition der Matrix

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

und den Spaltenvektoren

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} , \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

können wir den Drehimpuls schreiben als

$$\vec{L} = \Theta \vec{\omega} . \quad (4.56)$$

Mit der Definition der *Dyade*:

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} \hat{e}_i \circ \hat{e}_j \quad (4.57)$$

kann er darstellungsunabhängig unter Verwendung der Einheitsvektoren geschrieben werden als

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega} . \quad (4.58)$$

Für das *dyadische Produkt* oder Tensorprodukt gilt

$$(\hat{e}_i \circ \hat{e}_j) \cdot \vec{a} = \hat{e}_i (\hat{e}_j \cdot \vec{a}) \quad (4.59)$$

$$\vec{a} \cdot (\hat{e}_i \circ \hat{e}_j) = (\vec{a} \cdot \hat{e}_i) \hat{e}_j . \quad (4.60)$$

Die kinetische Energie können wir damit schreiben als

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) , \quad (4.61)$$

wobei  $\vec{\omega}^T$  den zu  $\vec{\omega}$  transponierten Vektor bezeichnet. Bei der Transposition werden Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht, und aus einem Spaltenvektor wird ein Zeilenvektor. Also

$$A_{ij}^T = A_{ji} \quad \text{und} \quad \vec{\omega}^T = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) . \quad (4.62)$$

Das *Trägheitsmoment*  $\Theta_{\hat{n}\hat{n}}$  bezüglich einer Drehachse  $\hat{n}$  erhält man, indem  $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$  skalar mit  $\hat{n}$  multipliziert wird,

$$\Theta_{\hat{n}\hat{n}} = \hat{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \hat{n}) = \hat{n}^T \Theta \hat{n} = \sum_{i,j=1}^3 \Theta_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j . \quad (4.63)$$

Also haben wir z.B. für die Drehachse in  $x$ -Richtung

$$\hat{n} = (1, 0, 0)^T \Rightarrow \Theta_{\hat{n}\hat{n}} = \Theta_{11} . \quad (4.64)$$

Die Diagonalelemente  $\Theta_{ij}$  bilden Trägheitsmomente bezüglich der Koordinatenachsen. Diese ergeben sich, wenn die Rotation um eine festgehaltene Achse betrachtet wird, also z.B.

$$\vec{\omega} = \omega_n \hat{n} . \quad (4.65)$$

Dann ist die  $\hat{n}$ -Komponente des Drehimpulses gegeben durch

$$L_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \vec{L} = \hat{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) = \hat{n} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \hat{n}) \omega_n = \Theta_{\hat{n}\hat{n}} \omega_n . \quad (4.66)$$

## 4.4 Transformation auf Hauptachsen

Der Trägheitstensor wurde bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem KS eingeführt. Damit ist  $\Theta_{ij} = \text{constant}$ . Allerdings hängen die Werte  $\Theta_{ij}$  von der Orientierung von KS ab. Die Eigenwerte der Matrix  $\Theta = (\Theta_{ij})$ , die man auch Hauptträgheitsmomente nennt, sind aber von der Orientierung unabhängig. Sie sind also Eigenschaften des starren Körpers wie z.B. auch seine Masse. Es soll im folgenden die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente gezeigt werden.

Hierfür betrachten wir zwei verschiedene körperfeste Systeme KS und KS'. Diese sind gegeneinander verdreht, haben aber denselben Ursprung. Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  in KS hat die Komponenten  $\omega_i$ , und in KS' hat  $\vec{\omega}'$  die Komponenten  $\omega'_i$ . Die Transformation zwischen den beiden Koordinaten ist durch

$$\omega'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \omega_j \quad , \quad \text{bzw. in Matrixschreibweise } \vec{\omega}' = \alpha \vec{\omega} \quad (4.67)$$

gegeben. Hier stellt  $\vec{\omega}$  den Spaltenvektor dar und  $\alpha = (\alpha_{ij})$  eine  $3 \times 3$  Matrix. Es handelt sich um eine orthogonale Transformation, also  $\alpha \alpha^T = \mathbf{1}$ , so dass die Rücktransformation lautet

$$\vec{\omega} = \alpha^T \vec{\omega}' \quad . \quad (4.68)$$

Diese Transformation wird nun in die kinetische Energie der Rotation eingesetzt. Also

$$2 T_{rot} = \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega} = (\alpha^T \vec{\omega}')^T \Theta (\alpha^T \vec{\omega}') = \vec{\omega}'^T (\alpha \Theta \alpha^T) \vec{\omega}' = \vec{\omega}'^T \Theta' \vec{\omega}' \quad . \quad (4.69)$$

Da, wie aus der Definition von  $\Theta$  zu ersehen ist, die Matrix  $\Theta$  reell und symmetrisch ist, also

$$\Theta_{ij} = \Theta_{ji} \quad , \quad (4.70)$$

kann  $\alpha$  so gewählt werden, dass die Trägheitsmatrix  $\Theta'$  in KS' diagonal ist.

$$\Theta' = (\Theta'_{ij}) = \alpha \Theta \alpha^T = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad . \quad (4.71)$$

(Wir werden später auf  $\alpha$  zurückkommen.) Das System KS', in dem  $\Theta'$  diagonal ist, wird *Hauptachsensystem* genannt. Die Diagonalelemente  $\Theta'_{ii}$ , bezeichnet mit  $\Theta_i$ , sind gemäß Glg. (4.63) die Trägheitsmomente bezüglich der Rotation um die Achsen von KS' und werden *Hauptträgheitsmomente* genannt. Sie sind die *Eigenwerte* der Matrix  $\Theta$ . Ferner sind sie positiv, denn

$$\Theta_1 = \Theta'_{11} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n'^2 - x_{n1}'^2) = \sum_{n=1}^N m_n (x_{n2}'^2 + x_{n3}'^2) \geq 0. \quad (4.72)$$

Entsprechend gelten die Relationen, die sich durch zyklische Vertauschung ergeben. Die Masse  $m_n$  trägt somit zu  $\Theta_1$  mit dem Gewicht ihres Abstandquadrats zur Achse 1 bei, siehe Abb. 4.7.

Im folgenden soll die orthogonale Transformationsmatrix  $\alpha$  bestimmt werden. Dabei gehen wir von einem in KS gegebenen Trägheitstensor  $\Theta = (\Theta_{ij})$  aus. Nun soll  $\alpha$  so bestimmt werden, dass

$$\Theta' = \alpha \Theta \alpha^T \quad (4.73)$$

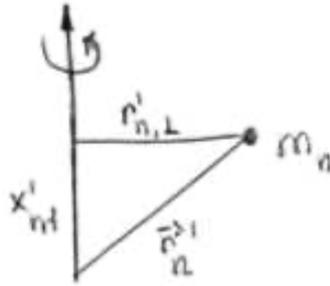


Abbildung 4.7: Skizze zum Hauptträgheitsmoment um die Achse 1.

diagonal ist, also

$$\Theta'_{ij} = \sum_{l,k} \alpha_{il} \Theta_{lk} \alpha_{kj}^T \stackrel{!}{=} \Theta_i \delta_{ij} = \Theta_j \delta_{ij} . \quad (4.74)$$

Da für orthogonale Matrizen  $\alpha^{-1} = \alpha^T$  gilt, haben wir

$$\alpha \alpha^T = \alpha^T \alpha = \mathbf{1} . \quad (4.75)$$

Es wird nun Glg. (4.74) von links mit  $\alpha^T$  multipliziert, und wir erhalten

$$\sum_{k=1}^3 \Theta_{ik} \alpha_{kj}^T = \alpha_{ij}^T \Theta_j . \quad (4.76)$$

Nun definieren wir die  $j$ -te Spalte von  $\alpha^T$  als Spaltenvektor  $\omega^{(j)}$ , also

$$\alpha^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \omega^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \alpha_{j3} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \omega^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^T \\ \alpha_{2j}^T \\ \alpha_{3j}^T \end{pmatrix} . \quad (4.77)$$

Damit erhalten wir für Glg. (4.76)

$$\Theta \omega^{(j)} = \Theta_j \omega^{(j)} \quad , \quad j = 1, 2, 3 . \quad (4.78)$$

Wir haben hier die *Eigenwertgleichung* der Matrix  $\Theta$ . Das System von linearen Gleichungen Glg. (4.78) besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn gilt

$$\det(\Theta - \Theta_j \mathbf{1}) = 0 . \quad (4.79)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{1}$  die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix. Die Determinante ergibt ein Polynom 3. Grades in  $\Theta_j$  mit den drei Nullstellen  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ . Es handelt sich hier um die *Eigenwerte* von  $\Theta$ . Diese sind aus physikalischen Gründen positiv, wie wir in Glg. (4.72) gesehen haben. Die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren sind die  $\omega^{(j)}$ . Diese sind für  $\Theta_i \neq \Theta_j$  orthogonal,

$$(\omega^{(i)})^T \omega^{(j)} = \delta_{ij} \quad , \quad \text{für} \quad \Theta_i \neq \Theta_j . \quad (4.80)$$

Dies folgt aus

$$\left. \begin{array}{l} (\omega^{(j)})^T \cdot \mid \Theta \omega^{(i)} = \Theta_i \omega^{(i)} \\ (\omega^{(i)})^T \cdot \mid \Theta \omega^{(j)} = \Theta_j \omega^{(j)} \end{array} \right\} \Rightarrow (\Theta_i - \Theta_j) (\omega^{(i)})^T \omega^{(j)} = 0 . \quad (4.81)$$

Falls  $\Theta_i = \Theta_j$  können  $\omega^{(i)}$  und  $\omega^{(j)}$  orthogonal gewählt werden. Nun löst mit  $\omega^{(j)}$  auch *const.*  $\omega^{(j)}$  die Eigenwertgleichung. Die Konstante kann so bestimmt werden, dass die Eigenvektoren normiert sind. Die so gewonnenen orthonormierten Vektoren  $\omega^{(j)}$  bilden die Spalten von  $\alpha^T$  (die Zeilen von  $\alpha$ ). Sie sind die Basisvektoren des Systems  $KS'$ , in dem  $\Theta$  diagonal ist.

Die Eigenwerte  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  sind unabhängig von der Orientierung des körperfesten Koordinatensystems. Dies ergibt sich aus der Invarianz des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \det(\Theta' - \Theta_i \mathbf{1}) &= \det(\alpha(\Theta - \Theta_i \mathbf{1})\alpha^T) = \det(\alpha) \det(\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) \det(\alpha^T) \\ &= \det(\alpha\alpha^T) \det(\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) = \det(\mathbf{1}) \det(\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) = \det(\Theta - \Theta_i \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

wobei wir

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad \text{und} \quad \det(\alpha\alpha^T) = 1 \quad (4.83)$$

verwendet haben. Legt man noch einen bestimmen Ursprung von  $KS$  fest (z.B. den Schwerpunkt des starren Körpers), so sind die Hauptträgheitsmomente festgelegt. Sie sind also *Eigenschaften* des starren Körpers.

Physikalisch bedeuten die Hauptachsen, dass bei einer Rotation um eine Hauptachse, d.h. für  $\vec{\omega} = \omega^{(k)}$ , der Drehimpuls  $\vec{L}$  parallel zu  $\vec{\omega}$  ist. Bei symmetrischen Körpern sind die Hauptachsen parallel zu den Symmetrieachsen.

Rotiert ein Körper nicht um eine seiner Hauptträgheitsachsen, so tritt ein Deviationsmoment auf. Es ist ein Maß für das Bestreben des rotierenden Körpers, seine Rotationsachse zu verändern. Die Deviationsmomente bilden die Nebendiagonalelemente des Trägheitstensors.

## 4.5 Tensoren

Im folgenden wollen wir Tensoren genauer betrachten. Tensoren im dreidimensionalen Raum sind durch ihr Verhalten unter orthogonalen Transformationen definiert.

### 4.5.1 Orthogonale Transformation

Sei  $KS$  ein Koordinatensystem im dreidimensionalen Raum. Wir bezeichnen mit  $x_i$  die Koordinaten und mit  $\hat{e}_i$  die Basisvektoren. Bei  $KS$  kann es sich in diesem Kapitel auch um Inertialsysteme handeln. Seien nun  $KS$  und  $KS'$  zwei relativ zueinander gedrehte Koordinatensysteme, siehe Abb. 4.8. Der Ortsvektor  $\vec{r}$  eines Massenpunktes  $P$  kann entweder durch die Basisvektoren  $\hat{e}_i$  von  $KS$  oder  $\hat{e}'_j$  von  $KS'$  dargestellt werden,

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 x'_j \hat{e}'_j . \quad (4.84)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $x_i$  bzw.  $x'_j$  sind die Komponenten des Vektors. Wir sehen hieran, dass die Darstellung eines Vektors  $\vec{r}$  durch seine Komponenten,  $\vec{r} := (x_1, x_2, x_3)$ , von der gewählten Basis, also von dem gewählten Koordinatensystem, abhängt. Die Basisvektoren von kartesischen Koordinatensystemen sind orthogonal, d.h. es gilt

$$\hat{e}_k \cdot \hat{e}_l = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} . \quad (4.85)$$

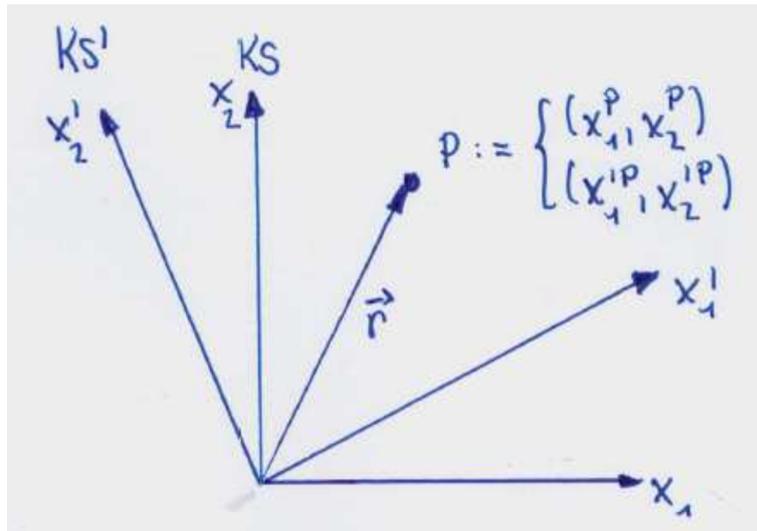


Abbildung 4.8: Zwei relativ zueinander gedrehte Koordinatensystem KS und KS', hier zwei-dimensional dargestellt.

Ebenso gilt  $\hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_l = \delta_{kl}$ . Multiplikation von Glg. (4.84) mit  $\hat{e}'_k$  liefert

$$x'_k = \sum_{i=1}^3 (\hat{e}'_k \cdot \hat{e}_i) x_i = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} x_i. \quad (4.86)$$

Dabei sind  $\alpha_{ki} = \hat{e}'_k \cdot \hat{e}_i$  koordinatenunabhängige Koeffizienten. Sie hängen von der relativen Lage von KS und KS' ab. Die Berechnung des Skalarproduktes  $\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$  liefert mit Glg. (4.84)

$$\vec{r}^2 = \begin{cases} \sum_i x_i^2 \\ \sum_k x_k'^2 \end{cases} = \sum_m \sum_i (\sum_k \alpha_{km} \alpha_{ki}) x_m x_i \quad (4.87)$$

wobei wir in der zweiten Zeile  $x'_k = \sum_i \alpha_{ki} x_i$  eingesetzt haben. Da beide Zeilen für beliebige  $x_i$  übereinstimmen müssen, folgt

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{km} \alpha_{ki} = \delta_{mi} \quad (\text{orthogonale Transformation}) \quad (4.88)$$

Aus den 9 Koeffizienten  $\alpha_{ki}$  können die drei Zeilenvektoren  $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3})$  ( $k = 1, 2, 3$ ) gebildet werden, die zueinander orthogonal sind. Man nennt die Transformation Glg. (4.86), für die (4.88) gilt, daher *orthogonale Transformation*. Die zu Glg. (4.86) gehörige Rücktransformation ergibt sich durch Multiplikation mit  $\alpha_{km}$  und Summation über  $k$  unter Verwendung von Glg. (4.88). Also

$$x_m = \sum_{k=1}^3 \alpha_{km} x'_k. \quad (4.89)$$

Wir führen die Matrix  $\alpha$ , den Spaltenvektor  $\vec{x}$  und den dazu transponierten (Zeilenvektor)  $\vec{x}^T$  ein,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^T = (x_1, x_2, x_3). \quad (4.90)$$

Damit können wir die Hin- und Rücktransformation schreiben als

$$\vec{x}' = \alpha \vec{x} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \alpha^T \vec{x}' . \quad (4.91)$$

Die Invarianz des Skalarprodukts

$$\vec{x}'^T \vec{x}' = \vec{x}^T \alpha^T \alpha \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} \quad (4.92)$$

führt auf Glg. (4.88) in der Form

$$\alpha^T \alpha = \mathbb{1} , \quad \text{somit} \quad \alpha^{-1} = \alpha^T . \quad (4.93)$$

Wir betrachten als Beispiel eine Drehung um die  $z$ -Achse um den Winkel  $\varphi$ . Die Gleichungen

$$\hat{e}'_1 = \hat{e}_1 \cos \varphi + \hat{e}_2 \sin \varphi \quad (4.94)$$

$$\hat{e}'_2 = -\hat{e}_1 \sin \varphi + \hat{e}_2 \cos \varphi \quad (4.95)$$

$$\hat{e}'_3 = \vec{e}_3 \quad (4.96)$$

ergeben die  $\alpha_{ki}$ , die in Matrixform lauten

$$\alpha = (\alpha_{ki}) = (\hat{e}'_k \cdot \hat{e}_i) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.97)$$

Wir haben gesehen, dass die relative Lage zweier Koordinatensysteme durch 3 Winkel festgelegt ist. Somit hängt die Matrix  $\alpha$  von drei kontinuierlichen Parametern ab. Dies sieht man auch folgendermaßen ein. Die Gleichung (4.88) ergibt 9 Bedingungen ( $m, i = 1, 2, 3$ ). Davon sind aber wegen Gleichheit der Bedingungen für  $(m, i)$  und  $(i, m)$  nur 6 unabhängig, so dass wir mit 6 Gleichungen für die Bestimmung von 9 Größen verbleiben. Es bleiben also 3 Größen unbestimmt.

Zwei hintereinander ausgeführte Drehungen ergeben wiederum eine Drehung. Somit bilden sie eine Gruppe. Dies gilt auch für die Darstellung der Drehung durch die Matrizen  $\alpha$

## 4.5.2 Definitionen

Im folgenden werden Größen mit keinem, einem und mehreren Indizes betrachtet. Die Indizes sollen die Werte 1,2,3 annehmen und werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet.

*Skalar oder Tensor nullter Stufe:* Dies ist eine Größe ohne Index, die sich unter orthogonalen Transformationen nicht ändert. Ein Beispiel ist das Skalarprodukt des Ortsvektors,

$$\vec{r}^2 = \vec{r}^T \vec{r} = \sum_{k=1}^3 x_k^2 . \quad (4.98)$$

*Tensor 1. Stufe,  $V_k$ :* Dies ist eine Größe  $V_k$  mit einem Index, welche sich wie die Komponenten  $x_k$  eines Ortsvektors transformiert, also

$$V'_k = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} V_i . \quad (4.99)$$

Die Rücktransformation ergibt sich analog wie oben beschrieben zu

$$V_m = \sum_{k=1}^3 \alpha_{km} V'_k = \sum_{k=1}^3 (\alpha_{mk})^T V'_k. \quad (4.100)$$

*Tensor  $N$ -ter Stufe:* Dies ist eine  $N$ -fach indizierte Größe, die sich komponentenweise wie  $x_k$  transformiert. Also

$$T'_{k_1 k_2 \dots k_N} = \sum_{i_1=1}^3 \sum_{i_2=1}^3 \dots \sum_{i_N=1}^3 \alpha_{k_1 i_1} \alpha_{k_2 i_2} \cdot \dots \cdot \alpha_{k_N i_N} T_{i_1 i_2 \dots i_N}. \quad (4.101)$$

Die Umkehrtransformation ergibt sich analog zu Glg. (4.100).

Bei Tensoren 1. und 2. Stufe ist es möglich, die Transformationen in Matrixform zu schreiben. Also

$$V' = \alpha V, \quad V = \alpha^T V', \quad T' = \alpha T \alpha^T, \quad T = \alpha^T T' \alpha. \quad (4.102)$$

Hierbei ist  $V = (V_k)$  ein Spaltenvektor und  $T = (T_{kl})$  eine  $3 \times 3$  Matrix.

## Rechenregeln

Es gelten folgende Regeln für die Konstruktion weiterer Tensoren. Seien  $S$ ,  $T$  und  $C$  Tensoren, so gilt

1. Addition von Tensoren gleicher Stufe:

$$\beta S_{k_1 \dots k_N} + \gamma T_{k_1 \dots k_N} \quad \text{ist ein Tensor } N\text{-ter Stufe} \quad (4.103)$$

2. Multiplikation von Tensoren: Seien  $A$  eine  $m \times n$  matrix und  $B$  eine  $p \times r$  matrix. Dann ist das Produkt

$$C = A \circ B \quad (4.104)$$

definiert als

$$C = (a_{mn} B) = \begin{pmatrix} a_{11} B & \dots & a_{1n} B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} B & \dots & a_{mn} B \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

3. Skalare Multiplikation:

$$\sum_{j_1 \dots j_L} S_{k_1 \dots k_N j_1 \dots j_L} T_{j_1 \dots j_L k_{N+1} \dots k_{N+M}} = C_{k_1 \dots k_{N+M}} \quad (4.106)$$

4. Kontraktion von Tensorindizes:

$$\sum_{l=1}^3 S_{k_1 \dots l \dots l \dots k_N} \quad \text{ist ein Tensor } N - 2\text{-ter Stufe} \quad (4.107)$$

5. Tensorgleichungen: Eine Tensorgleichung ist forminvariant oder kovariant unter orthogonalen Transformationen, z.B.

$$S_k = \sum_{l=1}^3 U_{kl} T_l \xleftrightarrow{\text{orthogonale Transformation}} S'_k = \sum_{l=1}^3 U'_{kl} T'_l \quad (4.108)$$

Wir beweisen den letzten Punkt in Matrixschreibweise. Da  $S_k = \sum_{l=1}^3 U_{kl} T_l$  in allen KS gilt und  $S_k, T_k$  Vektoren sind, folgt aus (4.102)

$$S' = \alpha S = \alpha U T = \alpha U \alpha^T \alpha T = (\alpha U \alpha^T) T' . \quad (4.109)$$

Vergleich mit  $S'_k = \sum_{l=1}^3 U'_{kl} T'_l$  ergibt

$$U' = \alpha U \alpha^T \quad \text{bzw.} \quad U'_{im} = \sum_{kl} \alpha_{ik} \alpha_{ml} U_{kl} . \quad (4.110)$$

Damit ist also gezeigt, dass die beiden Gleichungen (4.108) auseinander vorgehen.

### Pseudotensoren

Ein Beispiel für einen Pseudotensor ist der Levi-Civita Tensor. Er ist definiert durch

$$\epsilon_{ikl} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, k, l) = (1, 2, 3) \text{ und zyklisch.} \\ -1 & \text{wenn } (i, k, l) = (2, 1, 3) \text{ und zyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.111)$$

Er transformiert sich gemäß

$$\epsilon'_{ikl} = \sum_{i'} \sum_{k'} \sum_{l'} \alpha_{ii'} \alpha_{kk'} \alpha_{ll'} \epsilon_{i'k'l'} . \quad (4.112)$$

Für  $i = k$  gilt:

$$\epsilon'_{iil} = \sum_{i', k', l'} \underbrace{\alpha_{ii'} \alpha_{ik'}}_{\delta_{i'k'}} \alpha_{ll'} \epsilon_{i'k'l'} = 0 . \quad (4.113)$$

Für  $(i, k, l) = (1, 2, 3)$  ist

$$\epsilon'_{123} = \sum_{i', k', l'} \alpha_{1i'} \alpha_{2k'} \alpha_{3l'} \epsilon_{i'k'l'} = \det \alpha . \quad (4.114)$$

Dies gilt ebenso für beliebige Permutationen von  $(1, 2, 3)$ . Damit ist

$$\epsilon'_{ikl} = \det \alpha \epsilon_{ikl} . \quad (4.115)$$

Definition: Eine Größe  $A_{i_1 \dots i_N}$ , die sich wie

$$A'_{i_1 \dots i_N} = \det \alpha \sum_{m_1=1}^3 \dots \sum_{m_N=1}^3 \alpha_{i_1 m_1} \dots \alpha_{i_N m_N} A_{m_1 \dots m_N} \quad (4.116)$$

transformiert, heißt *Pseudotensor*  $N$ -ter Stufe.

Bemerkung zu  $\det \alpha$ : Aus

$$\det \alpha = \det \alpha^T \quad \text{und} \quad \det(\alpha^T \alpha) = 1 = \det(\alpha^T) \det(\alpha) = (\det \alpha)^2 \quad (4.117)$$

folgt

$$\det \alpha = \pm 1 . \quad (4.118)$$

Bei  $\det \alpha = 1$  handelt es sich um eigentliche Drehungen. Bei  $\det \alpha = -1$  handelt es sich um Spiegelungen an Ebenen oder Inversion ( $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ).

Beispiele:

$$\text{Spiegelung an der } x - y\text{-Ebene: } \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

oder

$$\text{Inversion: } \alpha = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (4.120)$$

## 4.6 Eulersche Gleichungen

In diesem Kapitel werden die Bewegungsgleichungen für die Rotation des starren Körpers hergeleitet. Diese sogenannten Eulerschen Gleichungen sind Differentialgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System, deren Koeffizienten durch die Hauptträgheitsmomente gegeben sind.

### 4.6.1 Herleitung der Gleichungen

Für die Herleitung der Eulerschen Gleichungen gehen wir von der Bewegungsgleichung für Rotationen des starren Körpers aus, welche die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls ist,

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M} . \quad (4.121)$$

Hierbei ist  $\vec{M}$  das auf den Körper wirkende Drehmoment. Wir hatten für den Drehimpuls im körperfesten System gefunden

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^N m_n (\vec{r}_n \times \dot{\vec{r}}_n) = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega} . \quad (4.122)$$

Die Komponenten  $\Theta_{ij}$  sind auf das körperfeste System bezogen. Man kann den Trägheitstensor jedoch sowohl bezüglich des raumfesten als auch des körperfesten Systems ausdrücken,

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \begin{cases} \sum_{i,k=1}^3 \Theta'_{ik}(t) \hat{e}'_i \circ \hat{e}'_k & \text{raumfestes IS} \\ \sum_{i,k=1}^3 \Theta_{ik} \hat{e}_i(t) \circ \hat{e}_k(t) & \text{körperfestes KS} \end{cases} \quad (4.123)$$

Im Gegensatz zu den  $\Theta_{ik}$  im KS sind die  $\Theta'_{ik}(t) = \sum_n m_n (r_{n,IS}^2 \delta_{ik} - x_{ni,IS} x_{nj,IS})$  zeitabhängig, da sich die  $x_{ni,IS}(t)$  auf das raumfeste IS beziehen. Diese Zeitabhängigkeit wird durch die Bewegung des starren Körpers in IS bestimmt, d.h. durch die erst noch zu bestimmende Lösung.

Das Drehmoment ist auf das körperfeste System bezogen. Es ist durch die an den  $n$ -ten Massenpunkt angreifenden äußeren Kräfte  $\vec{F}_n^{(a)}$  gegeben,

$$\vec{M} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n \times \vec{F}_n^{(a)}. \quad (4.124)$$

Die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten tragen nicht zum Drehmoment bei. (Die inneren Kräfte führen beim starren Körper zu konstanten Abständen.)

Der Bezugspunkt für den Drehimpuls und das Drehmoment sei durch den Ursprung des körperfesten Systems gegeben. Dieser sei entweder der feste Unterstützungspunkt eines Kreisels oder der Schwerpunkt des starren Körpers. Im ersten Fall verbleiben nur die drei Freiheitsgrade der Rotation. Ihre Dynamik wird durch Glg. (4.121) beschrieben. Im anderen Fall haben wir zusätzlich die drei Freiheitsgrade der Translation. Ihre Dynamik wird durch

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{n=1}^N \vec{F}_n^{(a)} = \vec{F} \quad (4.125)$$

beschrieben, wobei  $\vec{R}$  der Schwerpunktsvektor im raumfesten Inertialsystem und  $M$  die Gesamtmasse des starren Körpers ist. Da die beiden Bewegungsgleichungen (4.121) und (4.125) voneinander entkoppeln, betrachten wir im folgenden nurmehr Glg. (4.121). Diese Bewegung wird meist Kreisbewegung genannt, obwohl es sich um nichtunterstützte Kreisel handelt.

Wir legen zweckmäßig das körperfeste KS parallel zu den Hauptachsen des Trägheitstensors, so dass dieser diagonal ist. Dann haben wir

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}. \quad (4.126)$$

Die  $\vec{\omega}$  und  $\vec{M}$  fassen wir zu den folgenden Spaltenvektoren in KS zusammen,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

Die Zeitunabhängigkeit der  $\Theta_{ik}$  im körperfesten KS, siehe Glg. (4.123), ist ein entscheidender Vorteil. Deshalb wird im Folgenden dieses KS benutzt. Mit

$$\left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{IS} = \left( \frac{d}{dt} (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) \right)_{IS} = \left( \frac{d}{dt} (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) \right)_{KS} + \vec{\omega} \times (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) = \vec{M} \quad (4.128)$$

sowie also ( $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$  ist konstant im KS)

$$\left( \frac{d}{dt} \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega} \right)_{KS} = \left( \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\omega} \right)_{KS} \quad (4.129)$$

erhalten wir für die drei Komponenten von  $\vec{\omega}$  im Hauptachsensystem KS das folgende System von drei gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung,

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad \text{Eulersche Gleichungen} \quad (4.130)$$

Wir können in die Eulerschen Gleichungen die Komponenten von  $\vec{\omega}$  einsetzen, die wir bereits früher ausgedrückt durch die Eulerschen Winkel hergeleitet hatten,

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \quad (4.131)$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \quad (4.132)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta . \quad (4.133)$$

Es ergeben sich dann drei Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Eulerschen Winkel  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  und  $\theta(t)$ , die die Bewegungsgleichungen für die Rotation des starren Körpers sind.

Der Nachteil der Eulerschen Gleichungen ist, dass das Drehmoment durch seine Komponenten im körperfesten KS dargestellt werden muss. Diese sind daher im Allgemeinen zeitabhängig, und die Zeitabhängigkeit hängt wiederum von der Bewegung des Körpers ab. Im Allgemeinen sind die Komponenten des Drehmoments im Inertialsystem IS gegeben. Für die Umrechnung von IS auf KS muss man die Bewegung des Körpers kennen, d.h. die Lösung des Problems. Wir betrachten daher zunächst die kräftefreie Rotation. Ein Beispiel, das diese Situation annähert, ist die Rotation eines Satelliten im Weltraum.

### Freie Rotation um eine Hauptachse

Betrachtet wird ein starrer Körper, auf den keine Drehmomente wirken,  $\vec{M} = 0$ . Ein Beispiel ist ein frei fallender Körper mit dem Schwerpunkt als Ursprung von KS. Eine kräftefreie Translationsbewegung ist gleichförmig und geradlinig, d.h.  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \text{const.}$  Deshalb liegt es nahe, zu *vermuten*, dass im Fall der Rotationsbewegung die Winkelgeschwindigkeit konstant ist. Für konstante  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) folgt für die Eulerschen Gleichungen aus  $\dot{\omega}_i = 0$  und mit  $\vec{M} = 0$ ,

$$\begin{aligned} (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (4.134)$$

Unter der Voraussetzung, dass alle Hauptträgheitsmomente verschieden sind, also

$$\Theta_i \neq \Theta_j \quad \text{für } i \neq j , \quad (4.135)$$

folgt, dass mindestens zwei Komponenten von  $\vec{\omega}$  gleich Null sind, d.h.

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const.} , \quad \omega_2 = \omega_3 = 0 \quad \text{oder} \quad (4.136)$$

$$\omega_2 = \omega_2^0 = \text{const.} , \quad \omega_1 = \omega_3 = 0 \quad \text{oder} \quad (4.137)$$

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.} , \quad \omega_1 = \omega_2 = 0 . \quad (4.138)$$

Für  $\vec{M} = 0$  gilt Drehimpulserhaltung, also  $\vec{L} = \text{const.}$ . Damit ist für die erste Lösung

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega} = \Theta_1 \omega_1 \hat{e}_1 = \text{const.} \quad , \quad \hat{e}_1 = \text{Richtung der ersten Hauptachse} . \quad (4.139)$$

Somit ist die Lage der körperfesten Achse  $\hat{e}_1$  im Raum konstant,

$$\hat{e}_1 = \text{const. in IS} . \quad (4.140)$$

Der Körper rotiert um die erste Hauptachse  $\hat{e}_1$ , die in IS raumfest ist, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$ .

*Stabilität der Lösung:*

Aus den Bewegungsgleichungen ergeben sich drei derartige Lösungen für die drei Hauptachsen. Davon sind aber nur zwei stabil. Dies soll im folgenden gezeigt werden, indem kleine Abweichungen von der gefundenen Lösung betrachtet werden. Wachsen diese Abweichungen im Lauf der Zeit katastrophal an, so ist die Lösung instabil. Wir betrachten also eine Bewegung, die geringfügig von (4.136) abweicht,

$$\omega_1 \approx \omega_1^0 \quad , \quad \omega_2 \ll \omega_1^0 \quad , \quad \omega_3 \ll \omega_1^0 . \quad (4.141)$$

In den Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.142)$$

werden die Terme, die in den kleinen Größen  $\omega_2, \omega_3$  quadratisch sind, vernachlässigt. Damit ergibt sich aus der ersten Gleichung

$$\dot{\omega}_1 = 0 \quad , \quad \omega_1 = \omega_1^0 = \text{const.} \quad (4.143)$$

Dies wird nun in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt. Die zweite Gleichung wird nach der Zeit differenziert und hieraus  $\dot{\omega}_3$  mit Hilfe der dritten Gleichung eliminiert. Also

$$\Theta_2 \ddot{\omega}_2 = -(\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1^0 \dot{\omega}_3 = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_3} (\omega_1^0)^2 \omega_2 . \quad (4.144)$$

Entsprechend verfahren wir mit der dritten Gleichung. Damit finden wir insgesamt

$$\ddot{\omega}_2 + H \omega_2 = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{\omega}_3 + H \omega_3 = 0 \quad (4.145)$$

mit

$$H = \frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2 \Theta_3} (\omega_1^0)^2 . \quad (4.146)$$

Das ist die Differentialgleichung (DGL) für einen ungedämpften Oszillator, also ein schwingendes System, falls  $H > 0$ . Mit dem Ansatz

$$\omega_2(t) = \omega_2^0 e^{kt} \quad (4.147)$$

folgt

$$k^2 \omega_2 + H \omega_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \pm \sqrt{-H} . \quad (4.148)$$

Entsprechendes ergibt sich für  $\omega_3$ . Es gibt nun zwei Möglichkeiten.

(i) Das Trägheitsmoment  $\Theta_1$  ist das kleinste oder größte von den drei Hauptträgheitsmomenten. Damit ist  $H > 0$  und somit

$$k = \pm i\sqrt{H}. \quad (4.149)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\omega_2(t) = a \cos(\sqrt{H}t + b) \quad (4.150)$$

$$\omega_3(t) = c \cos(\sqrt{H}t + d), \quad (4.151)$$

wobei  $a, b, c, d$  aus den Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstanten sind. Somit führen kleine Abweichungen ( $a \ll \omega_1^0, c \ll \omega_1^0$ ) zu kleinen Oszillationen um die Lösung  $\vec{\omega} = (\omega_1^0, 0, 0)^T$ .

(ii) Wenn das Trägheitsmoment  $\Theta_1$  das mittlere der drei Hauptträgheitsmomente ist, so ist  $H < 0$  und damit die Lösung

$$\omega_2(t) = ae^{-kt} + be^{+kt} \quad (4.152)$$

$$\omega_3(t) = ce^{-kt} + de^{+kt}, \quad (4.153)$$

mit

$$k = \sqrt{-H}. \quad (4.154)$$

Das bedeutet, dass kleine Abweichungen ( $b, d \ll \omega_1^0$ ) von der Lösung  $\vec{\omega} = (\omega_1^0, 0, 0)^T$  exponentiell anwachsen. Damit ist diese Lösung instabil. Das exponentielle Wachstum gilt aber nur anfangs, solange die Voraussetzung (4.141) der Rechnung noch gültig ist.

Wir haben also gefunden, dass die Rotation um die Achse des kleinsten oder des größten Trägheitsmomentes stabil ist in dem Sinn, dass kleine Abweichungen klein bleiben. Aus

$$\vec{L} = \Theta_1 \omega_1^0 \hat{e}_1 + \mathcal{O}(\omega_2, \omega_3) = \text{const.} \quad (4.155)$$

folgt  $\hat{e}_1 \approx \text{const.}$ . Wir haben also eine (näherungsweise) stabile Lage der körperfesten Drehachse  $\hat{e}_1$  im raumfesten System. Die freie Rotation um die Achse des mittleren Trägheitsmoments ist jedoch nicht stabil, da in jedem realen System kleine Störungen auftreten, die dann schnell anwachsen. Somit gibt es zwar spezielle Lösungen, die der naiven Erwartung  $\omega = \text{const.}$  entsprechen. Jedoch ist die allgemeine Lösung des kräftefreien Kreisels komplexer.

### Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Wir untersuchen nun die kräftefreie Rotation allgemein für den symmetrischen starren Körper oder Kreisel. Man spricht von einem *symmetrischen Kreisel*, wenn genau zwei Hauptträgheitsmomente gleich sind, also z.B.

$$\Theta_2 = \Theta_1, \quad \Theta_3 \neq \Theta_1. \quad (4.156)$$

Das gilt insbesondere für solche Körper, die rotationssymmetrisch bezüglich ihrer  $x_3$ -Achse sind. Man nennt die  $x_3$ -Achse die *Figurenachse*. Beispiele hierfür sind der Kreiskegel oder

das Parallelepiped (Quader mit quadratischer Grundfläche).

Als Ursprung des körperfesten Systems wird wieder der Schwerpunkt oder der feste Unterstützungspunkt des starren Körpers gewählt. Im ersten Fall sind die Schwerpunkt- und Drehbewegung entkoppelt, während es im zweiten Fall nur die Drehbewegung gibt. In jedem Fall kann man sich auf die Drehbewegung beschränken, weshalb man pauschal von Kreiseln spricht.

Auf den Kreisel wirke kein Drehmoment. Mit  $\Theta_2 = \Theta_1$  lauten damit die Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \Theta_2 \dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ \Theta_3 \dot{\omega}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{4.157}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich  $\omega_3 = \omega_3^0 = \text{const.}$  Einsetzen in die beiden ersten Gleichungen liefert

$$\dot{\omega}_1 - \Omega \omega_2 = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 = 0 \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{\Theta_1 - \Theta_3}{\Theta_1} \omega_3^0.\tag{4.158}$$

Differentiation der ersten Gleichung und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0.\tag{4.159}$$

Dies ist eine Oszillorgleichung. Die Lösung

$$\omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \psi_0)\tag{4.160}$$

legt auch

$$\omega_2(t) = \frac{\dot{\omega}_1}{\Omega}\tag{4.161}$$

fest. Wir finden also die Lösung

$$\omega_1(t) = a \sin(\Omega t + \psi_0) \quad , \quad \omega_2(t) = a \cos(\Omega t + \psi_0) \quad , \quad \omega_3 = \omega_3^0.\tag{4.162}$$

Für  $a \ll 0$  haben wir eine solche Lösung bereits in Glg. (4.150) gefunden.

Da die Amplituden der Oszillationen von  $\omega_1(t)$  und  $\omega_2(t)$  gleich ist, ist der Betrag der Winkelgeschwindigkeit zeitlich konstant

$$\vec{\omega}^2 = \omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 + \omega_3(t)^2 = (\omega_3^0)^2 + a^2 = \text{const.}\tag{4.163}$$

Gemäß Glg. (4.162) hat die Projektion von  $\vec{\omega}$  auf die  $x_1-x_2$ -Ebene die konstante Länge  $a$  und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . Die Projektion auf die  $x_3$ -Achse ist konstant ( $\omega_3^0$ ). Der Vektor  $\vec{\omega}$  bewegt sich damit in KS auf einem Kreiskegel, dem *Polkegel*, siehe Abb. 4.9. Der Öffnungswinkel des Polkegels ist durch

$$\gamma = \arctan \frac{a}{\omega_3^0} = \text{const.}\tag{4.164}$$

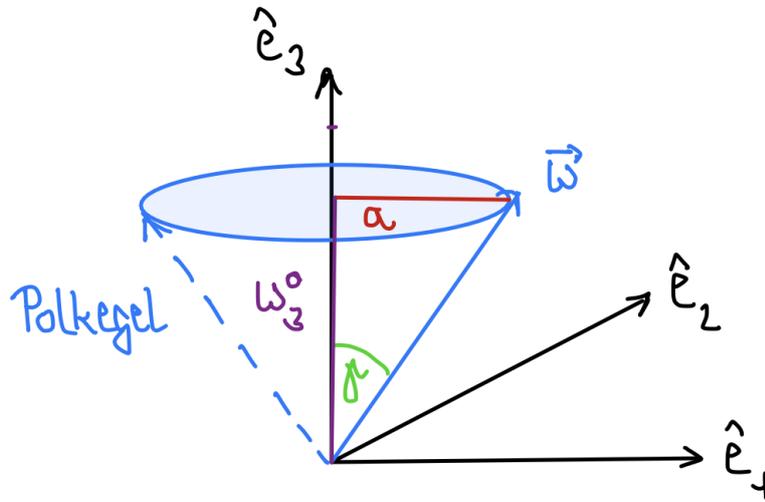


Abbildung 4.9: Die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  eines kräftefreien symmetrischen Kreisels bewegt sich im körperfesten System auf dem Polkegel.

gegeben.

Zur Bestimmung der Eulerwinkel  $\theta(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$  wird (4.162) in die Gleichungen (4.131)-(4.133) eingesetzt,

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = a \sin(\Omega t + \psi_0) \quad (4.165)$$

$$\omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi = a \cos(\Omega t + \psi_0) \quad (4.166)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \omega_3^0. \quad (4.167)$$

Um die Integration dieser Gleichungen zu vereinfachen, wird das Inertialsystem so gelegt, dass der Drehimpulsvektor in  $z$ -Richtung zeigt, also

$$\vec{L} = L \hat{e}_z = \text{const.} \quad (4.168)$$

Die Komponenten von  $\vec{L}$  im körperfesten System KS sind somit

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_1(t) \\ \hat{e}_z \cdot \hat{e}_2(t) \\ \hat{e}_z \cdot \hat{e}_3(t) \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \omega_1 \\ \Theta_2 \omega_2 \\ \Theta_3 \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (4.169)$$

Wir sehen also:

- (i)  $\vec{L}$  ist unabhängig von  $\phi$ .
- (ii) Die Winkel  $\theta$ ,  $\psi$  sind die sphärischen Winkel von  $\vec{L}$ , bis auf die Tatsache, dass die  $x$ - und  $y$ -Achse vertauscht sind.

Nun setzen wir Glg. (4.162) in Glg. (4.169) ein und erhalten für die einzelnen Komponenten

$$L \sin \theta(t) \sin \psi(t) = a \Theta_1 \sin(\Omega t + \psi_0) \quad (4.170)$$

$$L \sin \theta(t) \cos \psi(t) = a \Theta_1 \cos(\Omega t + \psi_0) \quad (4.171)$$

$$L \cos \theta(t) = \omega_3^0 \Theta_3. \quad (4.172)$$

Aus Glg. (4.172) folgt  $\theta = \theta_0 = const.$ . Damit muss in Glgen. (4.170) und (4.171)

$$\psi(t) = \Omega t + \psi_0 \tag{4.173}$$

gelten. In Glg. (4.170) wird  $\sin \psi$  gekürzt und die Glg. wird durch Glg. (4.172) geteilt. Damit erhalten wir

$$\tan \theta_0 = \frac{a}{\omega_3^0} \frac{\Theta_1}{\Theta_3} . \tag{4.174}$$

Mit  $\omega_1 = a \sin \psi$  und  $\theta = \theta_0$  wird aus Glg. (4.131) dann  $a = \dot{\phi} \sin \theta_0$  und damit

$$\phi = \frac{a}{\sin \theta_0} t + \phi_0 . \tag{4.175}$$

Damit haben wir also die allgemeine Lösung Glgen. (4.173)-(4.175) für die Eulerwinkel gefunden. Um die Bewegung des starren Körpers im Inertialsystem zu diskutieren, vergegenärtigen wir uns die Bedeutung diverser Größen:

$\theta$  : Winkel zwischen der Figurenaches  $\hat{e}_3$  und der  $z$ -Achse  $\hat{e}_z$ .

$\dot{\phi}$  : Drehung der Figurenachse um die  $z$ -Achse.

$\dot{\psi}$  : Drehung des Körpers (also KS) um die Figurenachse.

Da  $\theta = \theta_0$  bewegt sich die Figurenachse auf einem Kegel, dem *Präzessionskegel*, um die  $z$ -Achse. Dabei ist die jeweilige Drehachse durch die Richtung von  $\vec{\omega}$  gegeben. Aus den Glgen. (4.20) folgt

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\psi} \hat{e}_3 . \tag{4.176}$$

Somit liegt  $\vec{\omega}$  in der  $\hat{e}_3 - \hat{e}_z$ -Ebene. Diese wurde in der Abb. 4.10 als Bildebene gewählt. Da  $\theta_0 = \angle(\hat{e}_z, \hat{e}_3) = const.$  und  $\gamma = \angle(\vec{\omega}, \hat{e}_3) = const.$  muss auch der Winkel zwischen  $\vec{\omega}$  und  $\hat{e}_z$  konstant sein. Somit bewegt sich  $\vec{\omega}$  ebenfalls auf einem Kegel, der *Spurkegel* genannt wird. Man stelle sich die Bewegung als Abrollen des *Polkegels* auf dem Spurkegel vor. Der Polkegel kann dabei als starrer Körper aufgefasst werden. Man nennt diese Bewegung auch *reguläre Präzession*. Die Figurenachse  $\hat{e}_3$  des schweren Kreisels hingegen oszilliert zwischen zwei  $\theta$ -Werten (Nutationen).

## 4.7 Schwerer Kreisel

Das Problem der bisherigen Betrachtung lag in der Behandlung des Drehmoments. Wir waren ausgegangen von der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) = \vec{M} . \tag{4.177}$$

Da im körperfesten System die  $\Theta_{ik}$  konstant sind, wurde die Gleichung dort ausgewertet, was für  $\vec{M} \neq 0$  bedeutet, dass die Komponenten von  $\vec{M}$  in der zeitabhängigen Basis  $\hat{e}_i(t)$  benötigt werden. Die Beschreibung äußerer Kräfte ist i.A. einfacher in der Form einer skalaren Funktion, dem Potential, als in Form eines Kraft- oder Drehmomentvektors. Diese Art der

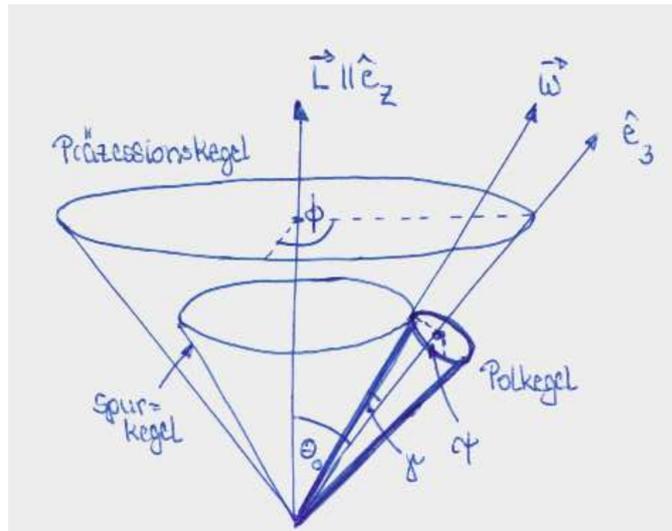


Abbildung 4.10: Reguläre Präzession des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Die raumfeste Drehimpulsrichtung, die Drehachse und die Figurenachse liegen alle in einer Ebene. Dabei läuft die Bewegung so ab, als ob der Polkegel auf dem Spurkegel abrollt. Somit läuft die Figurenachse auf dem Präzessionskegel um. Der dick gezeichnete Polkegel könnte den Kreiselskörper darstellen.

Beschreibung ist mit der Lagrangeformulierung möglich.

Als Ursprung des körperfesten KS wird entweder der Schwerpunkt oder der feste Unterstützungspunkt des starren Körpers gewählt. Im ersten Fall sind die Schwerpunkts- und Drehbewegung entkoppelt, im zweiten Fall hat man es nur mit einer Drehbewegung zu tun. In beiden Fällen kann man sich auf die Drehbewegung beschränken. Als verallgemeinerte Koordinaten werden die drei Eulerwinkel  $\phi, \psi, \theta$  gewählt. Das Potential  $V$  soll nur von diesen Koordinaten und der Zeit abhängen. Somit lautet die Lagrangefunktion

$$L(\phi, \theta, \psi; \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, t) = T_{\text{rot}} - V = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega}) - V(\phi, \theta, \psi, t). \quad (4.178)$$

Die kinetische Energie  $T_{\text{rot}}$  ist am einfachsten im körperfesten Hauptachsensystem,

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} [\Theta_1 \omega_1^2 + \Theta_2 \omega_2^2 + \Theta_3 \omega_3^2] \\ &= \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{\Theta_2}{2} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \end{aligned} \quad (4.179)$$

Die Zeitableitungen beziehen sich auf das raumfeste IS. Hieraus folgen die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi} \quad (4.180)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (4.181)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial L}{\partial \phi}. \quad (4.182)$$

Dies sind i.A. drei gekoppelte nichtlineare DGL 2. Ordnung.

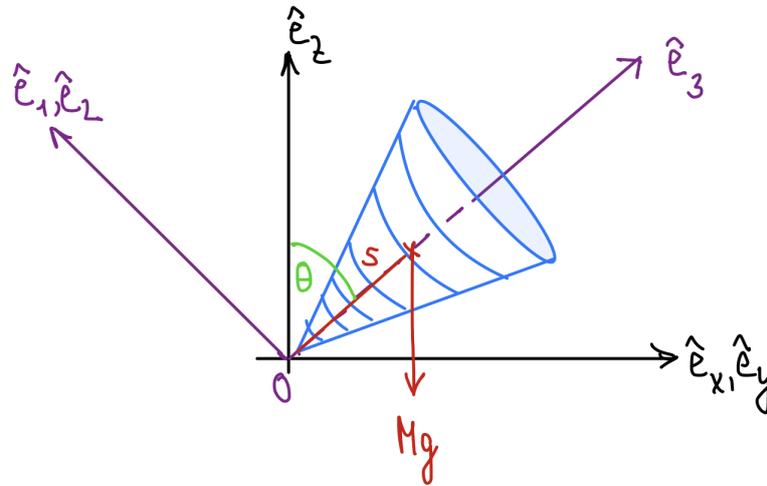


Abbildung 4.11: Ein symmetrischer Kreisel mit der Figurenachse  $\hat{e}_3$  und dem festen Unterstützungspunkt 0. Der Schwerpunkt ist im Abstand  $s$  von 0. Hier greift die Schwerkraft  $m\vec{g}$  an. (Das  $M$  in der Figur ist gleich  $m$ , also  $M \equiv m$ .)

### 4.7.1 Schwerer symmetrischer Kreisel

Die Bewegungsgleichungen werden nun für einen massiven symmetrischen Kreisel ausgewertet, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegt, siehe Abb. 4.11. Als Ursprung des körperfesten Systems KS wird der Unterstützungspunkt 0 gewählt. (Dieser Kreisel unterscheidet sich vom Kinderkreisel auf einer ebenen Fläche dadurch, dass der Aufpunkt festgehalten wird und die Reibung fehlt.) Der Trägheitstensor in KS sei diagonal und die Diagonalelemente gegeben durch

$$\Theta_1 = \Theta_2 \quad \text{und} \quad \Theta_3 . \tag{4.183}$$

Damit ist die Figurenachse durch die dritte Hauptachse  $\hat{e}_3$  gegeben. Die  $z$ -Koordinate des Schwerpunktes ist

$$z = s \cos \theta , \tag{4.184}$$

wobei  $\theta$  der Eulerwinkel zwischen  $\hat{e}_z$  und  $\hat{e}_3$  ist und  $s$  der Abstand des Schwerpunkts  $S$  vom Unterstützungspunkt 0. Die potentielle Energie des Kreisels ist

$$V = mgs \cos \theta , \tag{4.185}$$

mit der Masse  $m$  und der Erdbeschleunigung  $g$ . Damit lautet die Lagrangefunktion

$$L(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{\Theta_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\Theta_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - mgs \cos \theta . \tag{4.186}$$

Wie es für den symmetrischen Kreisel gelten muss, hängt die Lagrangefunktion nicht von Drehungen um die Figurenachse, also von dem Winkel  $\psi$  ab. Hingegen hängt sie sehr wohl von  $\dot{\psi}$  ab! Die Lagrangefunktion hat folgende Symmetrien,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 , \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 , \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 . \tag{4.187}$$

Anstelle der drei Lagrangegleichungen (DGLs 2. Ordnung) können also folgende drei Erhaltungssätze (DGLs 1. Ordnung) verwendet werden:

1. Homogenität der Zeit  $\rightarrow$  Energieerhaltung

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \\ &= \frac{\Theta_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{\Theta_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + mgs \cos \theta = \text{const.} . \end{aligned} \quad (4.188)$$

2. Invarianz gegen Rotationen um die  $z$ -Achse ( $\phi \rightarrow \phi + \epsilon$ )  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung bezüglich der  $z$ -Achse, also

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \Theta_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = \text{const.} . \quad (4.189)$$

3. Invarianz gegen Rotationen um die Figurenachse  $\hat{e}_3$  ( $\psi \rightarrow \psi + \epsilon$ )  $\rightarrow$  Drehimpulserhaltung bezüglich der  $\hat{e}_3$ -Achse, also

$$L_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{const.} . \quad (4.190)$$

Wir finden also, da  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt, Energieerhaltung; da  $L$  nicht von  $\phi$  (Drehwinkel um die  $\hat{e}_z$ -Achse) abhängt, ist  $M_z = 0$  und  $L_z$  erhalten; da  $L$  nicht von  $\psi$  (Drehwinkel um die  $x_3$ -Achse) abhängt, ist  $M_3 = 0$  und die Drehimpulskomponente  $L_3$  erhalten.

Wir verwenden (4.189) und (4.190), um in (4.188)  $\dot{\phi}$  und  $\dot{\psi}$  zu eliminieren,

$$E = \frac{\Theta_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\Theta_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2\Theta_3} + mgs \cos \theta = \text{const.} . \quad (4.191)$$

Dies ist eine DGL 1. Ordnung für  $\theta(t)$ . Mit der Definition der Energieverschiebung ( $L_3 = \text{const.}$ )

$$E' = E - \frac{L_3^2}{2\Theta_3} - mgs \quad (4.192)$$

erhalten wir den Energieausdruck für ein eindimensionales Problem,

$$E' = \frac{\Theta_1}{2} \dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta) . \quad (4.193)$$

Dies ist äquivalent zum Problem eines Teilchens der Masse  $\Theta_1$ , das sich entlang der Koordinate  $\theta$  im Potential  $V_{\text{eff}}(\theta)$  bewegt, mit dem effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2\Theta_1 \sin^2 \theta} - mgs(1 - \cos \theta) \quad (4.194)$$

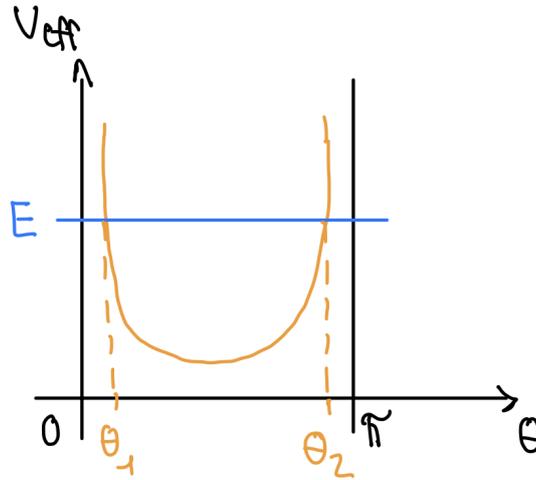


Abbildung 4.12: Schematischer Verlauf des effektiven Potentials  $V_{\text{eff}}$  für die  $\theta$ -Bewegung. Die kinetische Energie der Bewegung ist durch den Abstand zwischen  $V_{\text{eff}}(\theta)$  und der horizontalen Geraden bei  $E$  gegeben. Die  $\theta$ -Bewegung oszilliert zwischen den Umkehrpunkten  $\theta_1$  und  $\theta_2$ .

für  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Die Gleichung (4.193) kann nach  $d\theta/dt = f(\theta)$  aufgelöst und integriert werden ( $E' \equiv E$  im folgenden),

$$t = t_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \sqrt{\frac{\Theta_1/2}{E - V_{\text{eff}}(\theta')}} = \int \frac{du}{\sqrt{P_3(u)}}. \quad (4.195)$$

Daraus bestimmt man  $t = t(\theta)$  und damit  $\theta = \theta(t)$ . Die Substitution  $u = \cos \theta$  führt auf ein Polynom 3. Grades in  $u$ , wie im letzten Ausdruck angegeben. Es handelt sich um ein elliptisches Integral, das nicht elementar gelöst werden kann.

Die DGL (4.193) hat dieselbe Form wie die einer eindimensionalen Bewegung in einem Potential. Die Lösung kann graphisch diskutiert werden. Für  $\theta = 0, \pi$  strebt das effektive Potential  $V_{\text{eff}}(\theta) \rightarrow \infty$ . Es ist in Abb. 4.12 skizziert. Zwischen  $\theta = 0$  und  $\pi$  besitzt es ein Minimum, wobei der genaue Verlauf von den Parametern in  $V_{\text{eff}}$  abhängt. Aus der Bedingung  $E = V_{\text{eff}}$  ergeben sich zwei Umkehrpunkte,  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . Der Winkel zwischen der Figurenachse und der raumfesten  $z$ -Achse oszilliert also zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$ . Diese Bewegung der Figurenachse bezeichnet man als *Nutation*. Während der Oszillation der Figurenachse  $\hat{e}_3$  zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  vollführt sie eine Präzessionsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\phi} \hat{e}_z = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{\Theta_1 \sin^2 \theta} \hat{e}_z \quad (4.196)$$

um die raumfeste  $z$ -Achse  $\hat{e}_z$ . Die Bewegung der Figurenachse ist also durch die Oszillation zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  und die gleichzeitige Rotation mit  $\dot{\phi}$  festgelegt. Bei einem rotationssymmetrischen Kreisel fällt vor allem diese Bewegung der Figurenachse ins Auge, während die zusätzliche Rotation des Körpers mit  $\dot{\psi}$  um die Figurenachse selbst wegen der Symmetrie weniger offensichtlich ist.

Für einen gegebenen Kreisel mit den Parametern  $m, s, \Theta_1$  und  $\Theta_3$  sind die Geschwindigkeiten  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\phi}$ , welche die Bewegung der Figurenachse bestimmen, von den Integrationskonstanten  $E, L_z$  und  $L_3$  abhängig. Verschiedene Bewegungstypen sind in Abb. 4.13 dargestellt.

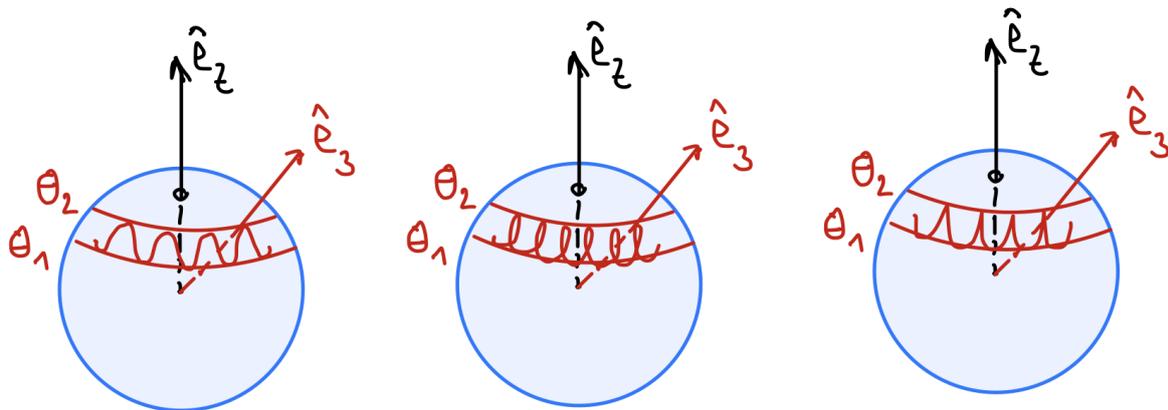


Abbildung 4.13: Darstellung der Präzession und Nutation eines schweren symmetrischen Kreisels. Die schematische Skizze zeigt die Bahn des Schnittpunktes der Figurenachse  $\hat{e}_3$  mit einer Kugeloberfläche. Links: Bahn für  $\dot{\phi} > 0$ . Mitte:  $\dot{\phi}$  ändert zwischen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  das Vorzeichen. Rechts:  $\dot{\phi}(\theta_2) = 0$ .

Gemäß Glg. (4.196) kann die Drehung der Figurenachse mit  $\dot{\phi}$  in Abhängigkeit von den Integrationskonstanten im Bereich  $\theta_1 < \theta < \theta_2$  ihr Vorzeichen ändern oder beibehalten.

Die Lösung enthält den Spezialfall  $\theta_1 = \theta_2$ . Für diesen verschwinden die Nutationen und die Figurenachse präzediert also auf einem Kegel mit dem Öffnungswinkel  $\theta_1$ . Eine reguläre Präzession ergibt sich auch im Grenzfall  $g \rightarrow 0$ . Denn im kräftefreien Fall muss sich ja wieder die in Abb. 4.10 dargestellte Lösung mit  $\theta = \theta_0$  und  $\dot{\phi} = const.$  ergeben. Der Grenzfall  $g \rightarrow 0$  ist näherungsweise realisierbar durch

$$T_{rot} \gg |V_{pot}| \quad \text{nahezu kräftefrei.} \quad (4.197)$$

Dies bedeutet für einen Kinderkreisel konkret: Versetzt man ihn in kräftige Rotation, so gilt zunächst (4.197), und die Figurenachse präzediert näherungsweise regelmäßig, also auf dem Kegel. Reibungsverluste, welche in der hier vorgestellten Rechnung nicht berücksichtigt sind, sorgen dafür, dass die Rotationsenergie allmählich kleiner wird. Damit werden dann die Nutationen stärker, und die Figurenachse schwankt im größer werdenden Bereich  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ .

# Kapitel 5

## Hamiltonformalismus

In der Hamilton'schen Formulierung der Mechanik werden die verallgemeinerten Impulse als Bewegungsgrößen gleichwertig zu den verallgemeinerten Koordinaten betont. Anders formuliert führt der Hamiltonformalismus die DGL 2. Ordnung für die Koordinaten in eine doppelt so große Anzahl von DGL 1. Ordnung für die Koordinaten und Impulse über. Damit ist er der geeignete Ausgangspunkt für die Anknüpfung an die Quantenmechanik, die durch eine DGL 1. Ordnung für den Zustandsvektor beschrieben wird.

Der Hamiltonformalismus bietet zwar für die praktische Lösung von Problemen keine Vorteile gegenüber dem Lagrangeformalismus. Wie oben schon gesagt ist er aber der Ausgangspunkt für die Untersuchung der Relationen zwischen der Mechanik und der Quantenmechanik. Er ist damit von besonderem theoretischen Interesse. So werden einige der verwendeten Begriffe in anderen Bereichen der Theoretischen Physik vorausgesetzt. In der Quantenmechanik geht man bei der Aufstellung des Hamiltonoperators von der *Hamiltonfunktion* aus. In der Statistik wird der Begriff des *Phasenraumvolumens* benötigt. Diese Begriffe und die kanonischen Bewegungsgleichungen werden im folgenden eingeführt.

### 5.1 Kanonische Gleichungen

Gegeben sei die Lagrangefunktion  $L(q, \dot{q}, t)$ . Die verallgemeinerten Impulse  $p_i$  werden durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.1)$$

definiert. Diese können dazu verwendet werden, die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  zu eliminieren, denn aus

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{folgt durch Auflösen} \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(q, p, t). \quad (5.2)$$

Wie gehabt verwenden wir in den Argumenten die Abkürzungen

$$q = (q_1, \dots, q_f), \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f), \quad p = (p_1, \dots, p_f). \quad (5.3)$$

Betrachten wir das folgende Beispiel:

$$L = \frac{m}{2} \dot{q}^2, \quad p = m\dot{q}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (5.4)$$

Wir definieren die *Hamiltonfunktion*  $H$  als

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = \sum_i \dot{q}_i(q, p, t) p_i - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) . \quad (5.5)$$

Die Hamiltonfunktion hat die Bedeutung der Energie des Systems. Die Lagrangefunktion ist eine Funktion von  $q, \dot{q}, t$ . Die Hamiltonfunktion hingegen ist eine Funktion von  $q, p, t$ . Aus dem vollständigen Differential der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} dL(q, \dot{q}, t) &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt , \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{und die Lagrangegleichung} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (5.7)$$

benutzt wurde, folgt

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_i \dot{q}_i p_i - L\right) \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \dot{p}_i dq_i - p_i d\dot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Durch Vergleichen findet man die *kanonischen* oder *Hamilton'schen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, f \quad (5.9)$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (5.10)$$

Es handelt sich um ein System von  $2f$  DGL 1. Ordnung anstelle der  $f$  DGL 2. Ordnung im Lagrangeformalismus.

Beispiel: Teilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\vec{r})$  in 3 Dimensionen:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad , \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} \quad (5.11)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \rightsquigarrow \dot{\vec{p}} = -\nabla V(\vec{r}) \quad , \quad \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} . \quad (5.12)$$

## 5.2 Poissonklammer

In diesem Abschnitt wird die *Poissonklammer* definiert. Sie ergibt einen Ausdruck für die Zeitableitung einer beliebigen physikalischen Größe und damit eine alternative Form der Bewegungsgleichungen. In der Quantenmechanik hat die Poissonklammer die direkte Entsprechung im *Kommutator* von Operatoren.

Eine physikalischen Größe in einem System, das durch die Koordinaten  $q_i$  und die Impulse  $p_i$  beschrieben wird, kann nur von diesen Variablen und der Zeit abhängen. Wir betrachten also zwei solche Größen  $F(p, q, t)$  und  $K(p, q, t)$  der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse. Die *Poissonklammer* ist definiert durch

$$\{F, K\} \equiv \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial q_i} \right). \quad (5.13)$$

Sie wird durch geschweifte Klammern bezeichnet, die zwei Argumente einschließen,  $\{, \}$ . Zunächst werden einige Eigenschaften und spezielle Poissonklammern betrachtet. So folgt unmittelbar aus der Definition

$$(i) \quad \{F, K\} = -\{K, F\} \quad \text{und} \quad \{F, F\} = 0. \quad (5.14)$$

Da im Hamiltonformalismus die  $p_i, q_i$  und  $t$  unabhängige Variablen sind, gilt

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = 0. \quad (5.16)$$

Somit ergibt sich aus (5.13) für  $K = q_j$  oder  $K = p_j$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = -\{F, q_j\}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_j} = \{F, p_j\}. \quad (5.17)$$

Und mit  $F = q_i$  oder  $F = p_i$  ergibt sich weiter

$$(iii) \quad \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}. \quad (5.18)$$

Weitere Eigenschaften sind

$$(iv) \quad \{F, c\} = 0, \quad c = \text{const.} \quad (5.19)$$

$$(v) \quad \{F_1 + F_2, K\} = \{F_1, K\} + \{F_2, K\} \quad (5.20)$$

$$(vi) \quad \frac{\partial}{\partial t} \{F, K\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, K \right\} + \left\{ F, \frac{\partial K}{\partial t} \right\} \quad (5.21)$$

$$(vii) \quad \{F, \{K, J\}\} + \{K, \{J, F\}\} + \{J, \{F, K\}\} = 0 \quad \text{Jacobi-Identität.} \quad (5.22)$$

Es wird nun die Zeitabhängigkeit einer beliebigen physikalischen Größe  $F(q, p, t)$  berechnet. Also

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.23)$$

$$= \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (5.24)$$

wobei im letzten Schritt die kanonischen Gleichungen verwendet wurden. Damit erhalten wir

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.25)$$

Durch diese Gleichung wird die Zeitabhängigkeit einer beliebigen physikalischen Größe bestimmt. Man denke bei  $F$  z.B. an den Schwerpunktimпульs, den Drehimpuls oder die Energie des Systems. Mithilfe der Glg. (5.25) lässt sich die Frage nach Erhaltungsgrößen neu formulieren. Wenn eine physikalische Größe  $F$  nicht explizit von der Zeit abhängt, so ist sie gerade dann eine Erhaltungsgröße, wenn ihre Poissonklammer mit  $H$  verschwindet. Und für  $F = H$  ergibt sich

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} . \quad (5.26)$$

Falls  $\partial H/\partial t = 0$ , so ist  $H$  eine Erhaltungsgröße. Schließlich folgen aus Glg. (5.25) die kanonischen Gleichungen in der Form

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad , \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\} . \quad (5.27)$$

### 5.3 Hamiltonsches Prinzip

In diesem Abschnitt wird das Hamiltonsche Prinzip für die Hamiltonfunktion formuliert. Es besagt, dass die Wirkung  $S$  für die tatsächliche Bewegung stationär ist. Es gilt also

$$\delta S[q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L \stackrel{(5.5)}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = 0 . \quad (5.28)$$

Es gilt zunächst für  $S = S[q]$ , d.h. für die Variation der  $f$  Funktionen  $q_i(t)$  bei festgehaltenen Randwerten. Wir betrachten nun  $S$  als Funktional der  $2f$  unabhängigen Funktionen  $q(t)$  und  $p(t)$ , also  $S = S[q, p]$ . Die Randwerte werden festgehalten, d.h.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad , \quad \delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0 . \quad (5.29)$$

Damit haben wir für die Variation  $S[q, p]$

$$\delta S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^f \left[ \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left( \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] . \quad (5.30)$$

Wir haben hier  $p_i \delta \dot{q}_i$  durch partielle Integration umgeformt, denn

$$p_i \delta \dot{q}_i = (p_i \delta q_i) \Big|_{t_1}^{t_2} - \dot{p}_i \delta q_i = -\dot{p}_i \delta q_i , \quad (5.31)$$

wobei wir die Randbedingungen Glg. (5.29) verwendet haben. Aus (5.30) und den kanonischen Gleichungen folgt  $\delta S[q, p] = 0$ . Da andererseits  $\delta q_i$  und  $\delta p_i$  beliebig sind, folgen

umgekehrt die kanonischen Gleichungen aus  $\delta S[q, p] = 0$ . Somit können wir genauso wie im Lagrangeformalismus die Bewegungsgleichungen durch das Hamiltonsche Prinzip ersetzen:

$$\delta S = \delta S[q, p] = 0 \quad \text{Hamiltonsches Prinzip} \quad (5.32)$$

Gegenüber dem Hamiltonschen Prinzip, das wir bereits kennengelernt haben, ist es dadurch modifiziert, dass es nach anderen, doppelt so vielen, Größen variiert wird.

Da wir (5.29) haben, kann zum Integranden in (5.28) die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion  $F(q, p, t)$  addiert werden, ohne dass sich die Aussage ändert. So lässt also die Transformation

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H \rightarrow \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H + \frac{d}{dt} F(q, p, t) \quad (5.33)$$

die kanonischen Gleichungen invariant.

## 5.4 Kanonische Transformation

Im Lagrangeformalismus erfolgt der Übergang von den  $q_i$  zu neuen verallgemeinerten Koordinaten  $Q_k$  durch

$$Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_f) \quad , \quad k = 1, \dots, f \quad (5.34)$$

Beispielsweise können Kugelkoordinaten anstelle der kartesischen Koordinaten eingeführt werden oder Schwerpunkts- und Relativkoordinaten statt  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$ . Die Form der Lagrangegleichungen ist unter einer solchen Transformation invariant. Es muss nur  $q = q(Q, t)$  in  $L(q, \dot{q}, t)$  eingesetzt werden, um  $L(Q, \dot{Q}, t)$  zu erhalten. Die Koordinaten werden möglichst zweckmäßig gewählt.

Es stellt sich nun die Frage, ob auch im Hamiltonformalismus neue Koordinaten und Impulse eingeführt werden können, so dass sich die Form der kanonischen Gleichungen nicht ändert. Hierzu betrachten wir eine Transformation der  $2f$  Variablen  $p_i$  und  $q_i$  zu  $2f$  neuen Variablen  $P_k$  und  $Q_k$ ,

$$Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = Q_k(q, p, t) \quad (5.35)$$

$$P_k = P_k(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t) = P_k(q, p, t) \quad (5.36)$$

Bei der Transformation (5.35, 5.36) handelt es sich um eine wesentlich größere Klasse von Transformationen als bei (5.34). Die Transformation (5.35, 5.36) ist genau dann *kanonisch*, wenn die Form der kanonischen Gleichungen unter der Transformation erhalten bleibt. Das bedeutet, dass die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (5.37)$$

in den neuen Variablen dieselbe Form haben, also

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} \quad (5.38)$$

Der Zusammenhang zwischen  $H$  und  $H'$  ist hier zunächst noch offen gelassen. Wir haben bereits gesehen, dass die kanonischen Gleichungen äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip sind. Es muss also gelten

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H'(Q, P, t) \right) = 0. \quad (5.39)$$

Die Integranden müssen nicht unbedingt gleich sein, damit diese Bedingung erfüllt ist. So besagt (5.33), dass sie sich um eine totale Zeitableitung einer beliebigen (differenzierbaren) Funktion  $G(q, p, Q, P, t)$  unterscheiden dürfen, also

$$\sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^f P_i \dot{Q}_i - H' + \frac{d}{dt} G(q, p, Q, P, t). \quad (5.40)$$

Durch diese Beziehung ergibt sich ein Zusammenhang zwischen  $H$  und  $H'$  und zwischen den alten  $(q, p)$  und den neuen  $(Q, P)$  Koordinaten. Da es einen Zusammenhang zwischen  $(q, p)$  und  $(Q, P)$  gibt, ist es ausreichend Funktionen  $G$  zu betrachten, die nur von zwei der vier Größen  $q, p, Q, P$  abhängen. Da wir für  $G = G_1(q, p, t)$  und  $G = G_2(Q, P, t)$  nur Modifikationen der Art (5.33) erhalten, betrachten wir Funktionen der Form

$$G_3(q, Q, t), G_4(q, P, t), G_5(p, Q, t) \text{ oder } G_6(p, P, t). \quad (5.41)$$

Eine jede dieser Funktionen führt zu einer kanonischen Transformation, weshalb man sie auch *Erzeugende* der Transformation nennt.

Wir betrachten hier den einfachsten Fall  $G = G_3(q, Q, t)$ . Im folgenden wird der Index 3 weggelassen. Der Zusatzterm für  $G(q, Q, t)$  lautet

$$\frac{dG(q, Q, t)}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial G}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial G}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (5.42)$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten von  $\dot{q}_i$  und  $\dot{Q}_i$  sowie dem Vergleich der anderen Terme in (5.40) ergibt sich

$$p_k = \frac{\partial G(q, Q, t)}{\partial q_k} = p_k(q, Q, t) \quad (5.43)$$

$$P_k = -\frac{\partial G(q, Q, t)}{\partial Q_k} = P_k(q, Q, t) \quad (5.44)$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial G(q, Q, t)}{\partial t}. \quad (5.45)$$

Die  $2f$  Gleichungen (5.43) und (5.44) können nach  $q = q(Q, P, t)$  und  $p = p(Q, P, t)$  aufgelöst werden. Einsetzen dieser Funktionen auf der rechten Seite von (5.45) liefert die neue Hamiltonfunktion  $H'(Q, P, t)$ . So kann also aus einer gegebenen Hamiltonfunktion  $H(q, p, t)$  und einer beliebigen Funktion  $G(q, Q, t)$  eine neue Hamiltonfunktion  $H'(Q, P, t)$  gewonnen werden.

Eine kanonische Transformation wird also folgendermaßen durchgeführt:

1. Ausgangspunkt ist eine gegebene Hamiltonfunktion  $H(q, p, t)$ .

2. Es wird eine beliebige Funktion  $G(q, Q, t)$  gewählt.
3. Die Gleichungen (5.43) und (5.44) legen die Variablentransformation  $q = q(Q, P, t)$  und  $p = p(Q, P, t)$  fest.
4. Aus Gleichung (5.45) gewinnt man die neue Hamiltonfunktion  $H'(Q, P, t)$ .
5. Aus dieser folgen die neuen kanonischen Gleichungen (5.38).

Wählt man die Erzeugenden  $G(q, Q, t)$  geschickt, so können die neuen kanonischen Gleichungen einfacher als die alten sein.

### Harmonischer Oszillator

Wir betrachten als Beispiel die Lösung des harmonischen Oszillators durch eine kanonische Transformation. Die Hamiltonfunktion des Oszillators lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \quad (5.46)$$

Die Erzeugende

$$G(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q \quad (5.47)$$

liefert für (5.43) und (5.44)

$$p = \frac{\partial G}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \quad P = -\frac{\partial G}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}. \quad (5.48)$$

Diese Gleichungen werden nach den alten Variablen aufgelöst,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (5.49)$$

Die Hamiltonfunktion  $H'(Q, P, t)$  wird gemäß Glg. (5.45) berechnet, also

$$H'(Q, P, t) = H(q(Q, P), p(Q, P)) = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P. \quad (5.50)$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega. \quad (5.51)$$

Die neue Variable  $Q$  ist also zyklisch. Die kanonischen Gleichungen haben die Lösung

$$P = \text{const.} = \frac{H'}{\omega} = \frac{E}{\omega}, \quad Q(t) = \omega t + \beta. \quad (5.52)$$

Wird dies in (5.49) eingesetzt, so ergibt sich die bekannte Lösung des Oszillators in den ursprünglichen Variablen. Es sei hier angemerkt, dass die Vereinfachung der Hamiltonfunktion und der kanonischen Gleichungen im allgemeinen davon abhängt, ob man eine geeignete Erzeugende findet.

## 5.5 Hamilton-Jacobi Gleichung

In diesem Abschnitt wird diejenige kanonische Transformation bestimmt, für die die neue Hamiltonfunktion (5.45) verschwindet, also

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.53)$$

Die Erzeugende der Transformation ist hier mit  $G = W(q, Q, t)$  bezeichnet. Es wird sich zeigen, dass  $W$  für die tatsächliche Bahn gleich der Wirkung ist. Aus der Bedingung (5.53) ergibt sich eine partielle Differentialgleichung für  $W(q, Q, t)$ , die *Hamilton-Jacobi Gleichung*. Sie kann als Grundgleichung der Mechanik aufgefasst werden und ist ein wichtiger Ausgangspunkt für die Untersuchung der Relationen zwischen Mechanik, Optik und Quantenmechanik.

Gemäß Gln. (5.43) und (5.44) gilt für die gesuchte Transformation

$$p_k = \frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial q_k} = p_k(q, Q, t), \quad P_k = -\frac{\partial W(q, Q, t)}{\partial Q_k} = P_k(q, Q, t). \quad (5.54)$$

Mit  $H' = 0$  folgt aus den kanonischen Gleichungen  $\dot{Q}_i = 0$  und  $\dot{P}_i = 0$ , also

$$Q_i = a_i = \text{const.}, \quad P_i = b_i = \text{const.} \quad (5.55)$$

Einsetzen von  $p_i = \partial W / \partial q_i$  und  $Q_i = a$  in (5.53) liefert

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W(q, a, t)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W(q, a, t)}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial W(q, a, t)}{\partial t} = 0. \quad (5.56)$$

Ohne Berücksichtigung der konstanten Größen lautet diese Differentialgleichung

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial W(q, t)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W(q, t)}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial W(q, t)}{\partial t} = 0 \quad (5.57)$$

Man nennt diese Gleichung *Hamilton-Jacobi Gleichung*. Sie ist eine partielle DGL 1. Ordnung für die Funktion  $W(q_1, \dots, q_f, t)$ . Gesucht ist eine Lösung dieser Gleichung, welche (5.56) erfüllt, also eine Lösung  $W(q, t) = W(q, a, t)$ . Diese hängt neben den Variablen  $q$  und  $t$  von den  $f$  unabhängigen Konstanten  $a_1, \dots, a_f$  ab. Dabei handelt es sich um eine sehr spezielle Lösung, da die *allgemeine* Lösung über die Anfangsbedingung  $W(q, 0) = f(q)$  von einer beliebigen Funktion der Koordinaten abhängt, was einer Abhängigkeit von unendlich vielen Konstanten entspricht.

Unter einem *vollständigen Integral* versteht man eine Lösung mit genauso vielen Integrationskonstanten wie Variablen, also  $f + 1$  in unserem Fall (5.57). Da mit  $W$  auch  $W + a_{f+1}$  eine Lösung ist, ist die gesuchte Lösung ein vollständiges Integral. Denn die triviale additive Konstante  $a_{f+1}$  ändert nichts an der kanonischen Transformation und wird hier daher nicht explizit berücksichtigt. Eine vollständige Lösung lässt sich häufig durch einen Separationsansatz finden.

Im folgenden wird gezeigt, dass eine Lösung der speziellen Form  $W(a, q, t)$  zur allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichungen führt. So folgen aus (5.54) und (5.55)

$$p_i = \frac{\partial W(q, a, t)}{\partial q_i}, \quad b_i = -\frac{\partial W(q, a, t)}{\partial a_i}. \quad (5.58)$$

Durch Auflösen ergibt sich

$$q_i = q_i(a, b, t) \quad , \quad p_i = p_i(a, b, t) . \quad (5.59)$$

Die Gleichungen (5.58) sind  $2f$  algebraische Gleichungen für die  $2f$  Funktionen  $q_i(t)$  und  $p_i(t)$ , wobei die Lösungen  $q_i(t)$  und  $p_i(t)$  von  $2f$  Konstanten  $a_i$  und  $b_i$  abhängen. Sie sind also die allgemeine Lösung der kanonischen Gleichungen.

Der Lösungsweg ist somit der folgende

1. Mithilfe der Hamiltonfunktion  $H(q, p, t)$  wird die Hamilton-Jacobi Gleichung (5.57) aufgestellt.
2. Es wird eine Lösung  $W(a, q, t)$  dieser Gleichung mit  $f$  unabhängigen Konstanten  $a = (a_1, \dots, a_f)$  bestimmt, ohne die triviale Konstante.
3. Um eine solche Lösung zu gewinnen, wird standardmäßig ein Separationsansatz gemacht.
4. Die Lösung  $W(q, a, t)$  definiert das algebraische Gleichungssystem (5.58).
5. Die Auflösung von (5.58) ergibt die allgemeine Lösung  $q_i = q_i(a, b, t)$  und  $p_i = p_i(a, b, t)$ .

Somit führt die Hamilton-Jacobi Gleichung zu einer Lösung der Bewegungsgleichungen, weshalb sie als Grundgleichung der Bewegung mechanischer Systeme aufgefasst werden kann. Da sie aber eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktionen  $W(q_1, \dots, q_f, t)$  ist, ist die Hamilton-Jacobi Gleichung viel schwerer zu lösen als die ursprünglichen kanonischen Gleichungen, welche ein System von  $2f$  gewöhnlichen Differentialgleichungen sind. So dient die Hamilton-Jacobi Gleichung weniger der Lösung von mechanischen Problemen, sondern wird eher dazu verwendet, um die Beziehungen zwischen Mechanik, Optik und Quantenmechanik zu untersuchen.

Die Zeitableitung von  $W$  ergibt sich mithilfe der Glgen. (5.53)-(5.55),

$$\frac{dW(q, Q, t)}{dt} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial W}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = L . \quad (5.60)$$

Somit ist

$$W = \int dt L + const. . \quad (5.61)$$

Längs der Bahnkurve ist  $W$  somit bis auf eine Konstante gleich der Wirkung.

## 5.6 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung

Falls die Energie erhalten ist, also  $H = E = const.$ , so hat die Hamilton-Jacobi Gleichung die Form

$$H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S(q, t)}{\partial q_f}, t\right) = E \quad (5.62)$$

Dabei ist

$$W(q, t) = S(q) - Et . \quad (5.63)$$

Die *zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung* (5.62) ist eine partielle Differentialgleichung in den Variablen  $q$ , also für eine Funktion  $S(q)$ .

Gesucht ist nun eine Lösung  $W(q, a, t) = S - Et$ , die von  $f$  Integrationskonstanten abhängt. Wir können als erste Integrationskonstante  $a_1 = E$  wählen. Die gesuchte Lösung hat dann die Form

$$S = S(q, a) = S(q_1, \dots, q_f, E, a_2, \dots, a_f, t) \quad , \quad \text{mit } a_1 = E . \quad (5.64)$$

Ferner haben wir

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} , \quad b_1 = -\frac{\partial W}{\partial a_1} = -\frac{\partial S(q, a)}{\partial E} + t , \quad b_{i \neq 1} = -\frac{\partial S(q, a)}{\partial a_i} . \quad (5.65)$$

Auflösen dieser Gleichungen liefert

$$q_i = q_i(a, b, t) \quad , \quad p_i = p_i(a, b, t) . \quad (5.66)$$

Der Lösungsweg ist fast der derselbe wie bei der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi Gleichung. Im folgenden soll ein explizites Beispiel betrachtet werden.

Beispiel Es wird der freie Fall im Schwerfeld

$$\vec{g} = -g\hat{e}_z \quad (5.67)$$

betrachtet, wobei wir uns hier auf die Bewegung in der  $x - z$ -Ebene beschränken. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz . \quad (5.68)$$

Und somit lautet die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S(x, z)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S(x, z)}{\partial z} \right)^2 + mgz = E . \quad (5.69)$$

Gesucht ist nun eine Lösung der Form  $S(x, z, E, a_2)$ . Diese hängt neben  $E$  also noch von der Integrationskonstanten  $a_2$  ab. Wir machen einen Separationsansatz, um die Lösung zu finden, d.h.

$$S(x, z) = S_1(x) + S_2(z) . \quad (5.70)$$

Einsetzen in (5.69) liefert

$$\left( \frac{dS_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dS_2}{dz} \right)^2 + 2m^2gz = 2mE . \quad (5.71)$$

Wir sehen, dass die einzige  $x$ -Abhängigkeit in  $(dS_1/dx)^2$  steckt. Daher muss  $(dS_1/dx)^2 = \text{const.} = a_2$  sein. Somit ergibt sich

$$\frac{dS_1}{dx} = \sqrt{a_2} \quad \text{und} \quad \frac{dS_2}{dz} = \sqrt{2mE - a_2 - 2m^2gz} . \quad (5.72)$$

Daraus folgt bis auf Konstanten, die nicht wichtig sind,

$$S_1 = \sqrt{a_2}x, \quad S_2 = -\frac{1}{3m^2g}(2mE - a_2 - 2m^2gz)^{3/2}. \quad (5.73)$$

Das vollständige Integral von (5.69) lautet also

$$S = S(x, z, E, a_2) = \sqrt{a_2}x - \frac{1}{3m^2g}(2mE - a_2 - 2m^2gz)^{3/2}. \quad (5.74)$$

Und für (5.65) haben wir hier

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t - b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = -b_2. \quad (5.75)$$

Daraus ergeben sich dann  $x(t)$ ,  $z(t)$ ,  $p_x(t)$  und  $p_z(t)$ . Aus der dritten Gleichung folgt

$$-\frac{1}{mg}\sqrt{2mE - a_2 - 2m^2gz} = t - b_1. \quad (5.76)$$

Dies liefert also

$$z(t) = -\frac{g}{2}(t - b_1)^2 + \frac{2mE - a_2}{2m^2g} = -\frac{g}{2}t^2 + c_1t + c_2. \quad (5.77)$$

Das ist im  $z-t$ -Diagramm eine Parabel. Die Wurfparabel in der  $x-z$ -Ebene ergibt sich aus der letzten Gleichung in (5.75). Damit sind  $x(t)$  und  $z(t)$  bestimmt. Aus den beiden ersten Gleichungen in (5.75) können dann  $p_x$  und  $p_z$  bestimmt werden.



# Anhang A

## Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen

### A.1 Gruppen

Sei ein Paar  $(G, *)$  mit einer Menge  $G$  und einer inneren zweistelligen Verknüpfung/Gruppenmultiplikation.  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(a, b) \mapsto a * b$  heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind

1. Die Gruppe ist *abgeschlossen*. D.h. wenn  $g, h \in G \Rightarrow g * h \in G$ .
2. *Assoziativität*:  $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ .
3.  $\exists$  *Einselement*  $e$  mit der Eigenschaft  $g * e = e * g = g \quad \forall g \in G$ .
4. Zu jedem  $g$  gibt es ein *Inverses*  $g^{-1}$  mit  $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$ .

Abelsche Gruppe: Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn  $g * h = h * g$ .