Theoretische Physik - Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.
Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

1 Einführung in die klassische Mechanik

1.1 Dimensionsanalyse

Größen: Zeit [T], Länge [L], Masse [M]
Erraten bzw. Erfassen von physikalischen Zusammenhängen

1.2 Newtonsche Gesetze

1. Ohne äußere Kräfte behält ein Körper seinen Bewegungszustand bei, d.h.
$$\vec{v} = const.$$
2. Die Änderung der Bewegung ist proportional zur einwirkenden Kraft:
$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$
3. Actio und Reactio: Jede Kraft hat eine gleich große, aber entgegengesetzt wirkende Gegenkraft:
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

1.3 Energieerhaltung

Die Gesamtenergie in einem geschlossenen System bleibt konstant als Konsequenz der Newtonschen Bew.gleichungen und der Homogenität der Zeit.

1.4 Konservatives Kraftfeld

Die Arbeit hängt nicht vom Weg ab:

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \text{ , d.h. } rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = 0 \text{ und dann gilt: Kraft } \vec{F} = -\nabla U$$

$$\text{Potential: } U(\vec{r}) = -\int_0^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{F}(\vec{r}\,') = -\int_0^1 dt \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{mit } \vec{r}(t) = (xt, yt, zt)^T$$

1.5 Arbeit im Kraftfeld

Geeignete Parametrisierung des Weges $\vec{r}(t)$ mit $t \in [t_0, t_1]$ wählen

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

1.6 Lagrange-Formalismus (für Klausur nicht relevant)

Beruht auf Prinzip der minimalen Wirkung (Hamiltonsches Prinzip)
skalare (Lagrange-)Funktion $L(x, \dot{x}, t)$ zu gegebenem Problem legt den klassischen Pfad zwischen vorgegebenen Punkten $x_i := x(t_i)$ und $x_f := x(t_f)$ eindeutig fest, dadurch, dass die Wirkung $S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}, t)$ minimiert wird. Dies geschieht, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Allgemeines Vorgehen:

1. Zu gegebenem Problem ein Integral S finden, dass minimiert werden soll: $S = \int_a^b dt \cdot L(x, \dot{x}, t)$
2. L in die Euler-Lagrange-Gleichungen einsetzen und damit $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ bestimmen.

1.7 Weitere Prinzipien

Galileisches Relativitätsprinzip (Forminvarianz) In Inertialsystemen sind alle Naturgesetze gleich.

Newtonsches Prinzip (Determiniertheit) Anfangsposition und Geschwindigkeit legen ein mechanisches System vollständig fest (DGL 2.Ordnung)

1.8 Differentialgleichungen (DGL)

Lineare homogene DGL n-ter Ordnung mit konst. Koeff. a_i

$$X^{(n)} + a_{n-1}X^{(n-1)} + ... + a_0 X = 0$$

Lösung mit Ansatz: $X(t) = X_0 \cdot e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ergibt charakteristisches Polynom:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$\Rightarrow$ Lineare DGL n-ter Ordnung hat genau n Lösungen!
Sofern n-fache Nullstelle λ_i vorhanden, gesondert berücksichtigen:

$$X_{\lambda_i} = (b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \ldots + b_0) \cdot e^{\lambda_i t}$$

Lineare inhomogene DGL n-ter Ordnung mit äußerer Störung $f(t)$

$$X^{(n)} + a_{n-1}X^{(n-1)} + ... + a_0 X = f(t)$$

wird gelöst durch die Summe der allg. homogenen Lsg. $X_h(t)$ und einer partikulären Lsg. $X_p(t)$ der inhomogenen DGL:
Ansatz: $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$
X_p erhält man i.A. durch Raten (Lösung ähnelt oft der Funktion)
Hier noch ein paar Ansätze für häufiger auftretende Inhomogenitäten:

Inhomogenität	**Ansatz für X_p**
$a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$	$b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \ldots + b_1 t + b_0$
$sin(\omega t)$ bzw. $cos(\omega t)$	$Asin(\omega t) + Bcos(\omega t)$
e^{at}	Ae^{at}
Summe von bekannten Inhomog.	Summe von Ansätzen
Produkt von bekannten Inhomog.	Produkt von Ansätzen

Bestimmung der part. Lsg. mit der Greenschen Funktion $G(t)$

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{d}{dt} + a_0\right) G(t) = \delta(t)$$

$$X_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \cdot G(t-t')f(t')$$

Spezialfall: Getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) X(t) = f(t)$$

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{w}e^{-\gamma t}sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

Spezialfall: Greenfkt. von Blatt 13 Aufgabe 4

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \lambda^2\right) X(t) = f(t)$$

$$G(t) = B \cdot e^{-b|t|} = B \cdot (\theta(-t)e^{bt} + \theta(t)e^{-bt}) \quad \text{mit } b = \pm\lambda \text{ und } B = \frac{\mp 1}{2\lambda}$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\text{DGL: } m\ddot{X} + \gamma\dot{X} + kX = 0$$

Schwach gedämpfter Fall (underdamped): $\gamma < 2\sqrt{km}$

$$X(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left(a \cdot cos(\omega t) + b \cdot sin(\omega t)\right) \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2}$$

Aperiodischer Grenzfall (critically damped): $\gamma = 2\sqrt{km}$

$$X(t) = (at + b) \cdot e^{-\frac{\gamma t}{2m}} = at \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t} + b \cdot e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t}$$

Kriechfall / Überdämpft (overdamped): $\gamma > 2\sqrt{km}$

$$X(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left(a \cdot e^{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \cdot t} + b \cdot e^{-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \cdot t}\right)$$

1.9 Keplersche Gesetze

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.
2. Die Linie Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.
3. Für alle Planeten im Sonnensystem gilt die Beziehung (mit gleicher Konstante)

$$\frac{T^2}{a^3} = const. \quad (T = \text{Periode}, a = \text{große Halbachse})$$

1.10 Planetenbewegungen

$$r(\theta) = \frac{k}{1 + \epsilon \cdot cos\theta} \quad \text{mit } k = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{und Exzentrizität } \epsilon \ltimes k \text{ bzw.:}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{E - E_0}{|E_0|}} \quad \text{mit } E_0 = \frac{-G^2 m^3 M^2}{2L^2}$$

$$E_{ges} = E_{kin} + V_{eff} = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

1.11 Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

Wollen: Reduktion eines Zweikörperproblems auf Bewegung nur eines Körpers
Anwendung wenn zwei Körper Kräfte aufeinander ausüben (3.Newton gilt)

$$\text{Schwerpunkt } \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und Gesamtmasse } M = m_1 + m_2$$

$$\text{Gesamtimpuls } \vec{P} = M\vec{R}$$

Ohne äußere Kräfte ($M\ddot{\vec{R}} = 0$) lässt sich das Problem auf ein Einkörperproblem reduzieren

$$\text{Relativkoordinate } \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{und reduzierte Masse } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{Bewegungsgleichung: } \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

$$\text{Systemenergie } E = \frac{m_1}{2}(\dot{\vec{r}}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{\vec{r}}_2)^2 = \frac{M}{2}(\dot{\vec{R}})^2 + \frac{\mu}{2}(\dot{\vec{r}})^2$$

2 Klassische Mechanik

2.1 Lagrangegleichungen 1. Art

$$m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\mu=1}^{N_Z} \lambda_\mu(t) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} A_\mu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) \quad ; i = 1, \ldots, N$$

$$A_\mu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad ; \mu = 1, \ldots, N_Z$$

System von N Massepunkten m_i mit Ortsvektor $\vec{r}_i$, ohne Einschränkungen: $f = 3N$ Freiheitsgrade
Für N_Z unabhängige ZB hat das System noch $f = 3N - N_Z$ Freiheitsgrade

Holonome Zwangsbedingungen sind ZB der Form:

$$A_\mu(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad ; \mu = 1, \ldots, N_Z$$

skleronom: $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} = 0$ d.h. keine explizite Zeitabhängigkeit

rheonom: $\frac{\partial A_\mu}{\partial t} \neq 0$ d.h. ZB sind explizit zeitabhängig

Nicht holonome Zwangsbedingungen lassen sich nicht in diese Form bringen (DGL, Ungl., ...)

Zwangskräfte $\vec{Z}(\vec{r}, t) = \lambda_\mu \cdot \nabla A(\vec{r}, t)$

2.2 Verallgemeinerte Koordinaten

Geschickte Wahl der Koordinaten, die Zwangsbedingungen automatisch berücksichtigen bzw. erfüllen

$$q = \{q_1, \ldots, q_f\} \quad ; f = 3N - N_Z = \text{ Anzahl Freiheitsgrade}$$

2.3 Lagrangegleichungen 2. Art

keine explizite Bestimmung von ZB und Zwangskräften nötig, da verallgemeinerte Koordinaten verwendet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad ; \alpha = 1, \ldots, f$$

mit Lagrangefunktion $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$

2.4 Erhaltungsgrößen

Energieerhaltung (Homogenität der Zeit) falls $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Verallgemeinerter Impuls Falls $\frac{\partial L}{\partial q_\beta} = 0$, also L unabhängig von q_β ist, so nennt man q_β eine zyklische Koordinate und definiert den zugehörigen verallgemeinerten Impuls:

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} = const.$$

2.5 Erweiterte Lagrangegleichungen 2. Art

Für nicht konservative Kräfte müssen die Lagrangegleichungen erweitert werden

2.5.1 Elektromagnetische Kräfte

In einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und einer magn. Flussdichte $\vec{B}$ wirkt auf eine Ladung Q die Lorentzkraft:

$$\vec{F} = Q(\vec{E}(\vec{r},t) + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t))$$

$$\text{mit} \quad \vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)$$

Für die Lagrangefunktion ergibt sich folgende Erweiterung, die das Gesamtpotential berücksichtigt:

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2} \cdot \dot{\vec{r}}^2 - Q \cdot \Phi + Q \cdot \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$

Falls ZB vorhanden sind, so drückt man $\vec{r}$ durch die verallg. Koord. aus: $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \ldots, q_f)$

2.5.2 Reibungskräfte

Für kleine Geschwindigkeiten gilt: $\vec{F}_{diss,i} = -\gamma_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$
Hieraus ergeben sich mit der Rayleigh'schen Dissipationsfunktion $\mathfrak{F}$ modifizierte Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

$$\mathfrak{F}(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \cdot \gamma_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^2(q,\dot{q},t)$$

2.6 Euler-Lagrange-Gleichung

Man möchte das Funktional $\mathfrak{J}[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y,y',x)$ mit den Randwerten $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ minimieren. Dies leistet die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}$$

2.7 Extremwerte unter Nebenbedingungen - Lagrange-Multiplikatoren

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \text{ minimal unter Nebenbedingungen } g_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = 0 \quad ; \alpha = 1, \ldots, R$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn folgende $N + R$ Gleichungen erfüllt sind (liefern ein Gleichungssystem, mit welchem die $N + R$ Unbekannten x_i, λ_α bestimmt werden können)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(x_1, \ldots, x_N) - \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \cdot g_\alpha(x_1, \ldots, x_N)) = 0 \quad ; i = 1, \ldots, N$$

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_N) = 0 \quad ; \alpha = 1, \ldots, R$$

Die λ_α werden Lagrange-Multiplikatoren genannt

2.8 Euler-Lagrange-Gleichung mit Nebenbedingungen

$$\text{Isoperimetrische Nebenbedingungen } K_i[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \cdot G_i(y,y',x) = C_i \quad ; i = 1, \ldots, R$$

$$\text{Benutze für Euler-Lagrange: } F^*(y,y',x) = F(y,y',x) - \sum_{i=1}^{R} \lambda_i \cdot G_i(y,y',x)$$

2.9 Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Variationsprinzip: Grundgesetze der Mechanik elegant formulieren

$$\text{Wirkung } S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = \text{ stationär}$$

$$\text{mit Randbedingungen } q_\alpha(t_1) = q_{1\alpha} \text{ und } q_\alpha(t_2) = q_{2\alpha}$$

$$\text{Hamiltonsches Prinzip: } \delta S[q] = 0$$

- Lagrangefunktion L und damit Wirkung S bestimmen
- Alle Wege $q(t)$ betrachten, die die Randbedingungen erfüllen
- Wege finden, die das Minimum (allg. Extremum) von S ergeben.
- Aus der Stationaritätsbedingung $\frac{\partial S}{\partial q} = 0$ folgen die Lagrangegleichungen

2.10 Unbestimmtheit der Lagrange-Funktion

Verschiedene Lagrange-Funktionen können zu denselben Bewegungsgleichungen führen:

$$L^* = L + const.$$

$$L^* = const. \cdot L$$

$$L^*(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \qquad \text{(Eichtransformation)}$$

2.11 Noether-Theorem

Möchte durch Koordinatentransformation (Ausnutzen der Symmetrie eines Systems) Rückschlüsse auf Erhaltungsgrößen machen

$$x_i \to x_i^* = x_i + \epsilon \cdot \psi_i(x, \dot{x}, t) + O(\epsilon^2) \qquad ; i = 1, \ldots, N$$

$$t \to t^* = t + \epsilon \cdot \varphi(x, \dot{x}, t) + O(\epsilon^2)$$

$$\text{Invarianzbedingung: } \left[\frac{d}{d\epsilon} \left(L(x^*, \dot{x}^*, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} = 0$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ergibt sich hieraus eine Erhaltungsgröße:

$$Q(x, \dot{x}, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i + \left(L - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right) \varphi = const.$$

2.12 Erweitertes Noether-Theorem

$$\text{Invarianzbedingung: } \left[\frac{d}{d\epsilon} \left(L(x^*, \dot{x}^*, t^*) \frac{dt^*}{dt} \right) \right]_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} f(x, t)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \psi_i + \left(L - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \cdot \dot{x}_i \right) \cdot \varphi - f(x, t) = const.$$

2.13 Starre Körper

N Massepunkte m_n mit Ortsvektoren $\vec{r}_n$, $n = 1, \ldots, N$
Konstante Abstände zwischen den Teilchen: $|\vec{r}_n - \vec{r}_m| = r_{nm} = const.$
6 Freiheitsgrade: Translation (x,y,z) und Rotation um die 3 Achsen
Körper, bei denen 1 Punkt festgehalten wird, heißen Kreisel (nur 3 Freiheitsgrade: Rotation)

2.14 Winkelgeschwindigkeit

Körperfestes Koordinatensystem (KS) dreht sich bzgl. des Inertialsystems (IS) mit

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \text{ (hängt nicht von der Wahl des KS ab)}$$

$d\vec{\varphi}$ zeigt in Richtung der Drehachse und $|d\vec{\varphi}|$ gibt den gedrehten Winkel in der Zeit dt an

$$\vec{v}_{n,IS} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_n \quad \text{mit } \vec{r}_n = \vec{r}_{n,IS} - \vec{r}_0$$

2.15 Trägheitstensor

$$\Theta_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m_n(\vec{r}_n^{\,2}\delta_{ik} - x_{n,i}x_{n,k}) = \int_V d^3r\rho(\vec{r})(\vec{r}^{\,2}\delta_{ik} - x_i x_k)$$

$$\text{Drehimpuls } L = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

$$\text{Rotationsenergie } T_{rot} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\Theta_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{\,T} \cdot \Theta \cdot \vec{\omega}$$

Das Trägheitsmoment $\Theta_{\hat{n}\hat{n}}$ bzgl. einer Drehachse $\hat{n}$ ist gegeben durch:

$$\Theta_{\hat{n}\hat{n}} = \hat{n}^T \cdot \Theta \cdot \hat{n} = \sum_{ij}\Theta_{ij}\hat{n}_i\hat{n}_j$$

Satz von Steiner

$$\Theta_a = \Theta_{cm} + M \cdot (\vec{a}^{\,2} \cdot \mathbb{1} - \vec{a} \cdot \vec{a}^T)$$

2.16 Hauptachsen und -trägheitsmomente

Hauptträgheitsmomente sind Eigenwerte der Matrix Θ
Hauptachsen sind die zu diesen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren
Körperfestes Bezugssystem mit Basis bestehend aus den Hauptachsen wird Hauptachsensystem genannt
Bei symmetrischen Körpern sind die Hauptachsen parallel zu den Symmetrieachsen
Nicht-Diagonal-Elemente des Trägheitstensors sind Deviationsmomente (treten auf, wenn Körper nicht um eine der Hauptachsen rotiert)

2.17 Hamilton-Formalismus

$$\text{Verallgemeinerte Impulse } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad ; i = 1, \ldots, f$$

$$\text{Hamiltonfunktion } H(q,p,t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \cdot \dot{q}_i - L \quad = \sum_{i=1}^{f} p_i \cdot \dot{q}_i(q,p,t) - L(q, \dot{q}(q,p,t), t)$$

Die Hamiltonfunktion entspricht der Gesamtenergie des Systems.
Aus der Hamiltonfunktion ergeben sich $2f$ Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; i = 1, \ldots, f$$

2.18 Poissonklammer

für beliebige physikalische Größen F, K:

$$\{F, K\} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial K}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial q_i}\right)$$

Allgemeine Eigenschaften:

- Antisymmetrie: $\{F, K\} = -\{K, F\}$ und $\{F, F\} = 0$

- Bilinearität: $\{c_1 F_1 + c_2 F_2, K\} = c_1\{F_1, K\} + c_2\{F_2, K\}$
- Produktregel: $\{F, K_1 \cdot K_2\} = \{F, K_1\} \cdot K_2 + K_1 \cdot \{F, K_2\}$
  und: $\frac{\partial}{\partial t}\{F, K\} = \{\frac{\partial F}{\partial t}, K\} + \{F, \frac{\partial K}{\partial t}\}$
- Jacobi-Identität: $\{F, \{K, J\}\} + \{K, \{J, F\}\} + \{J, \{F, K\}\} = 0$
- $\{F, const.\} = 0$

Und Spezielle Eigenschaften in Bezug auf den Hamilton-Formalismus:

- $\frac{\partial F}{\partial p_j} = -\{F, q_j\} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial q_j} = \{F, p_j\}$
- $\{q_i, q_j\} = 0 \quad , \quad \{p_i, p_j\} = 0 \quad , \quad \{p_i, q_j\} = -\delta_{ij}$
- $\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad , \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\}$
- Mit der Poissonklammer lässt sich die Zeitableitung einer beliebigen Größe F schreiben als:

  $$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

  Falls F nicht explizit zeitabhängig und die Poissonklammer verschwindet, dann ist $F = const.$
- Ist die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig, so ist sie (und damit die Energie) erhalten:

  $$\text{Spezialfall: } \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

2.19 Kanonische Transformationen

erhalten Form der kanonischen Gleichungen, d.h. für $(q, p) \to (Q, P)$ und $H(q, p) \to H'(Q, P)$ gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \; , \; \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \to \quad \dot{Q}_l = \frac{\partial H'}{\partial P_l} \; , \; \dot{P}_l = -\frac{\partial H'}{\partial Q_l} \qquad ; l, k = 1, \ldots, f$$

Wähle geschickte Erzeugende der Transformation $G(q, p, Q, P, t)$ (sollen nur von 2 der 4 Koordinaten abhängen, und nicht von (p, q) oder (Q, P)), sodass gilt:

$$L = L' + \frac{d}{dt}G$$

Für $G(q, Q, t)$ folgt beispielsweise:

$$p_i(q, Q, t) = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad ; \quad P_i(q, Q, t) = -\frac{\partial G}{\partial Q_i} \quad ; \quad H = H' - \frac{\partial G}{\partial t}$$

Vorgehensweise

- Ausgangspunkt: Hamilton-Funktion $H(p, q, t)$
- Funktion $G(q, Q, t)$ wählen
- Variablentransformation wird durch obige Gleichungen für p_i und P_i festgelegt
- Die neue Hamilton-Funktion H' erhält man aus der letzten Gleichung
- Hieraus folgen die neuen kanonischen Gleichungen

2.20 Eulersche Gleichungen

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 = M_1$$
$$\Theta_2\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\omega_1\omega_3 = M_2$$
$$\Theta_3\dot{\omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1)\omega_1\omega_2 = M_3$$

Mit den eulerschen Winkeln: (ergeben sich 3 DGL 2. Ordnung)

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_2 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$$

3 Mathematische Hilfsmittel

3.1 Koordinatensysteme

Polarkoordinaten Darstellung der Koordinaten durch Radius R und Winkel ϕ

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \cdot cos\phi(t) \\ R(t) \cdot sin\phi(t) \end{pmatrix} = R(t) \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} cos\phi(t) \\ sin\phi(t) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -sin\phi(t) \\ cos\phi(t) \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten Darstellung der Koordinaten durch Radius R und zwei Winkel ϕ und θ

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R(t) \cdot sin\theta(t) \cdot cos\phi(t) \\ R(t) \cdot sin\theta(t) \cdot sin\phi(t) \\ R(t) \cdot cos\theta(t) \end{pmatrix} = R(t) \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} sin\theta(t)cos\phi(t) \\ sin\theta(t)sin\phi(t) \\ cos\theta \end{pmatrix}, \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -sin\phi(t) \\ cos\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta(t)cos\phi(t) \\ cos\theta(t)sin\phi(t) \\ -sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

3.2 Komplexe Zahlen

$$\text{Komplexe Zahl } z \in \mathbb{C} \text{ mit } z = x + iy \; ; \quad x, y \in \mathbb{R} \; ; \quad i = \sqrt{-1}$$

$$e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$$

3.3 Ableitungen

Partielle Ableitungen Ableitungen, bei denen alle Variablen als Konstanten betrachtet werden, bis auf die abzuleitende Größe

$$\text{z.B. } \frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}$$

Totale Ableitungen Hier werden alle Variablen nach einer Variable abgeleitet

$$\frac{dU(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

3.4 Substitution und partielle Integration

$$I = \int_a^b dx f(g(x)) \quad \text{Substituiere: } u = g(x) \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = g'(x) \;\Leftrightarrow\; dx = \frac{du}{g'(x)} = \frac{du}{g'(g^{-1}(u))}$$

$$\Rightarrow I = \int_{g(a)}^{g(b)} du \frac{f(u)}{g'(g^{-1}(u))}$$

$$\int_a^b dx f'(x) \cdot g(x) = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b dx f(x) \cdot g'(x)$$

3.5 Integralsatz von Stokes

Ein Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfelds kann in ein geschlossenes Kurvenintegral über die Randlinie der Fläche umgewandelt werden:

$$\int_A d\vec{s} \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

3.6 Taylor-Theorem

Verwendung: Approximation einer Funktion nahe der Entwicklungsstelle a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n + R_N(x)$$

$$\text{Restglied } R_N(x) = \frac{1}{N!} \cdot \int_a^x dt \cdot (x-t)^N \cdot f^{(N+1)}(t)$$

Taylor-Reihen bekannter Funktionen

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

3.7 Fourierreihen

Jede periodische Funktion $f(t)$ mit Periode $T > 0$ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) kann als Fourierreihe entwickelt werden.

Reelle Fourierreihen

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(\omega nt) + b_n sin(\omega nt))$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) cos(\omega nt) \quad \text{und } b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) sin(\omega nt)$$

Komplexe Fourierreihen

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega nt}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt f(t) e^{-i\omega nt}$$

3.8 Tensoren

Levi-Civita Symbol (Epsilon-Tensor)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(3,1,2),(2,3,1)\} \\ -1 & \text{, falls } (i,j,k) \in \{(3,2,1),(1,3,2),(2,1,3)\} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, für i = j} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Zusammenhang zw. δ und ϵ

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det\begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \det\begin{pmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} = \delta_{jm}\cdot\delta_{kn} - \delta_{jn}\cdot\delta_{km}$$

3.9 Besondere Funktionen/Distributionen

$$\text{Diracsche Delta-Distribution } \delta(x) \quad \text{mit } \int_{-\infty}^{t} dx\cdot\delta(x) = \theta(t)$$

$$\text{Heaviside-Theta-Funktion } \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{, für } x = 0 \\ 1 & \text{, für } x > 0 \end{cases}$$

3.10 Vektor- und Skalarprodukt

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\ ;\ c_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}\cdot a_j\cdot b_k$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i\cdot b_i$$

3.11 Vektoranalysis

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T$$

$$\text{Gradient } grad\vec{f} = \nabla\vec{f} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot f_i$$

$$\text{Rotation } rot\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot f_k\cdot\vec{e}_i$$

3.12 Nützliche Vektorumformungen

$$\text{Graßmann-Identität (BAC-CAB-Formel): } \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\text{Lagrange-Identität: } (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$

3.13 (Trigonometrische) Funktionen

$$\begin{aligned}
sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \quad &; \quad cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\
sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \quad &; \quad cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \\
sin^2x + cos^2x = 1 \quad &; \quad cosh^2x - sinh^2x = 1 \\
sin(x+y) = sinx\cdot cosy + cosx\cdot siny \quad &; \quad cos(x+y) = cosx\cdot cosy - sinx\cdot siny \\
sin(2x) = 2sinx\cdot cosx \quad &; \quad cos(2x) = cos^2x - sin^2x \\
sinx + siny = 2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad &; \quad sinx - siny = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
cosx + cosy = 2cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad &; \quad cosx - cosy = -2sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
sinh(x+y) = sinhx\cdot coshy + coshx\cdot sinhy \quad &; \quad cosh(x+y) = coshx\cdot coshy + sinhx\cdot sinhy
\end{aligned}$$

3.14 Besondere Ableitungen/Stammfunktionen

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= arcsinx && +C \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= arctanx && +C \\
\int \frac{1}{1-x^2} dx &= artanhx && +C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= arsinhx && +C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= arcoshx && +C \\
\int sin^2 x dx &= \frac{1}{2}(x - sinx \cdot cosx) && +C \\
\int cos^2 x dx &= \frac{1}{2}(x + sinx \cdot cosx) && +C
\end{aligned}$$

3.15 Sonstiges

$$\text{Weg-/Bogenlänge } s(t) = \int_0^t dt' \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt'} \right|$$

$$\text{Gaußintegral } \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\text{Geometrische Summe } S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$