1 Siehe auch Vorlesung Theorie A, WS 2001/02

(i) Der physikalische Zustand eines Teilchens ($\equiv$ Massepunktes) zu einer Zeit t wird durch die Angabe von Ort $\mathbf{r}$ und Impuls $\mathbf{p}$ festgelegt. (Dies reicht aus, um das Verhalten des Teilchens zu allen späteren Zeiten anhand der Bewegungsgleichung vorherzusagen, s.u.)

Für ausgedehnte (starre) Körper kommt noch der Drehimpuls $\mathbf{L}$ und die Orientierung im Raum (Eulerwinkel) hinzu.

Für ein System aus vielen Teilchen (od. Körpern) müssen entsprechend *alle* Orte, Impuls, Drehimpulse, Orientierungen angegeben werden.

In der thermodynamischen Beschreibung eines Systems aus vielen ($\approx 10^{23}$) Teilchen begnügt man sich mit Aussagen über das Gesamtsystem. Ein (thermodynamischer) Zustand ist dann charakterisiert durch die gesamte Energie E , Teilchenzahl N , Volumen V , die Entropie S , und/oder durch Temperatur T , Druck p , chemisches Potential μ ...

(ii) Physikalische Größen sind alle (im Prinzip) meßbaren Größen; Beispiele siehe oben.

(iii) Die (Newtonsche) Bewegungsgleichung des Teilchens lautet $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ mit $\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$.

Dies ist eine DGL 2ter Ordnung, daher kann aus der Angabe von Ort x und Geschwindigkeit $\dot{x}$ zur Zeit t_0 (Anfangsbedingungen) für jede Raumrichtung die Zeitentwicklung für $t > t_0$ berechnet werden (falls man die DGL lösen kann ...)

2

a) Da I ein Inertialsystem (unbeschleunigtes Bezugssystem) ist, sind alle Bezugssysteme, die sich relativ zu I gleichförmig bewegen, auch Inertialsysteme. K ist also bestimmt durch eine beliebige Relativgeschwindigkeit $\mathbf{u}$. Der Ortsvektor des Teilchens hat dann in K die Koordinaten $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$ (Galilei-Transformation). Die Bewegungsgleichung in K ergibt sich damit zu $m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}' = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. Man beachte: die Kraft in I hängt vom Ort $\mathbf{r}$ ab, ist aber trotzdem invariant unter der Galilei-Transformation, denn für ein abgeschlossenes System gilt $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{F}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)$. $\mathbf{r}_0$ ist die Position der Sonne, die Ruhelage der Feder, ...

b) In K , das um $\varphi = \omega t_0$ relativ zu I gedreht ist, ist $\mathbf{A}'$ durch $\mathbf{A}$ gegeben, aber um den Winkel $(-\varphi)$ gedreht: Theorie A, Blatt 1, Aufgabe 1 oder LA:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \implies \boxed{\begin{matrix} A'_x = A_x \cos(\varphi) + A_y \sin(\varphi) \\ A'_y = -A_x \sin(\varphi) + A_y \cos(\varphi) \end{matrix}} \quad (1)$$

Alternativ, von Hand:

In I nimmt $\mathbf{A}$ den Winkel θ zur x -Achse ein (θ ist völlig unabhängig von φ). Dann ist

$$A_x = A \cos(\theta), \quad A_y = A \sin(\theta) \quad \text{mit} \quad A = |\mathbf{A}|.$$

In K nimmt dieser Vektor den Winkel $(\theta - \varphi)$ zur x' -Achse ein, also

$$A'_x = A \cos(\theta - \varphi), \quad A'_y = A \sin(\theta - \varphi) \quad \text{mit} \quad A' = A.$$

Mit den Additionstheoremen folgt daraus

$$\begin{aligned} A'_x &= A[\cos(\theta) \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)] \\ A'_y &= A[\sin(\theta) \cos(\varphi) - \cos(\theta) \sin(\varphi)] \end{aligned}$$

Identifiziere nun A_x, A_y , und es folgt (1).

c) Berechne $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}'(t)$, wobei der Drehwinkel $\varphi = \omega t$ jetzt zeitabhängig ist:

$$\text{Gl. (1)} \implies \begin{aligned} x' &= x \cos(\varphi) + y \sin(\varphi) \\ y' &= -x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\implies \frac{d}{dt} x' = (\dot{x} + y\omega) \cos(\varphi) + (\dot{y} - x\omega) \sin(\varphi)$$

$$\implies \frac{d^2}{dt^2} x' = (\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \cos(\varphi) + (\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \sin(\varphi)$$

und genauso für y ,

$$\frac{d^2}{dt^2} y' = -(\ddot{x} + 2\omega\dot{y} - \omega^2 x) \sin(\varphi) + (\ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2 y) \cos(\varphi)$$

In Vektorschreibweise, mit m anmultipliziert, folgt damit

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \left[m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} - 2m\omega \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

In der rechten Seite:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \implies m \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

$$\text{und} \quad \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{r}'$$

Also lautet die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}' = \mathbf{F}' - m\omega^2 \mathbf{r}' - 2m\omega \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Jetzt müssen $\dot{x}, \dot{y}$ durch $\frac{d}{dt} x' = v'_x$ und $\frac{d}{dt} y' = v'_y$ ersetzt werden: Von oben:

$$v'_x = \dot{x} \cos(\omega t) + \dot{y} \sin(\omega t) + y\omega \cos(\omega t) - x\omega \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$v'_y = -\dot{x} \sin(\omega t) + \dot{y} \cos(\omega t) - x\omega \cos(\omega t) - y\omega \sin(\omega t) \quad (3)$$

Jetzt (2)·cos(ωt) und (3)·sin(ωt), dann Differenz bilden

$$\implies v'_x \cos(\omega t) - v'_y \sin(\omega t) = \dot{x} + y\omega$$

Oder (2)·sin(ωt) und (3)·cos(ωt), dann Summe bilden

$$\implies v'_x \sin(\omega t) + v'_y \cos(\omega t) = \dot{y} - x\omega$$

$\dot{x}, \dot{y}$ in die Bewegungsgleichung einsetzen und alles ausmultiplizieren $\implies$

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v'_y \\ v'_x \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich also

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}' = \underbrace{\mathbf{F}'}_{\text{äußere Kraft in } K} - \underbrace{2m\omega \begin{pmatrix} -v'_y \\ v'_x \end{pmatrix}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{m\omega^2 \mathbf{r}'}_{\text{Zentrifugal}} = \mathbf{F}'_{tot}}$$

Mit dem Vektor $\mathbf{w} = \omega \mathbf{e}_z$ kann dies in der üblichen Form geschrieben werden,

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}' = \mathbf{F}' - 2m[\mathbf{w} \times \mathbf{v}'] - m \mathbf{w} \times [\mathbf{w} \times \mathbf{r}']$$

d) Es ist anschaulicher, die Lage / Bewegung des Teilchens in K vorzugeben.

Also, Modifikation der Aufgabe:

(i) Das Teilchen ruht in K auf der x' -Achse: $\mathbf{F}' = 0, \mathbf{r}' = (r'_0, 0)$.

Mit $\mathbf{v}' = 0$ folgt die totale Kraft

$$\mathbf{F}'_{tot} = m\omega^2 \mathbf{r}' = m\omega r'_0 \mathbf{e}'_x$$

= konstante Zentrifugalkraft.

(ii) Das Teilchen bewegt sich in K gleichförmig auf der x' -Achse: $\mathbf{F}' = 0, \mathbf{r}' = \mathbf{v}'t, \mathbf{v}' = (v'_0, 0)$.

$$\implies \mathbf{F}'_{tot} = m\omega^2 \mathbf{v}'t - 2m\omega v'_0 \mathbf{e}'_y$$

= mit der Entfernung vom Ursprung anwachsende Zentrifugalkraft plus Coriolis senkrecht zur Geschwindigkeit.